

## Teoría – Tema 1

### Teoría - 8 - Sistema de inecuaciones de dos incógnitas - Programación lineal

#### ¿Cómo resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas?

Sea una inecuación con dos incógnitas, ambas elevadas a la potencia uno. Por ejemplo:

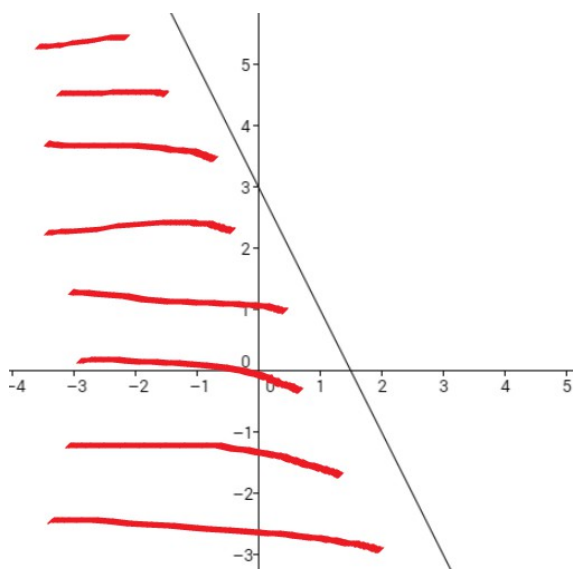
$$2x + y \leq 3$$

Al tener dos incógnitas, la solución será la **región del plano** donde se cumpla la desigualdad (dos dimensiones: eje OX, eje OY) . Es decir: nuestra solución por lo general no será un intervalo en la recta real ni un punto. La solución será una zona concreta del plano bidimensional.

Si cambiamos la desigualdad por una igualdad estricta, tendremos una **recta**. Y esta recta **divide al plano en dos trozos (semiplanos)**. Si representamos la recta  $2x + y = 3$  de nuestro ejemplo, podemos obtener la región solución eligiendo un punto arbitrario fuera de la recta y viendo si para ese punto (que pertenecerá a uno de los dos trozos en que ha quedado dividido el plano) se cumple la desigualdad.

En la gráfica inferior hemos representado la recta  $2x + y = 3$  , que divide al plano en dos secciones. Si elegimos el punto  $(0,0)$  y sustituimos en la inecuación  $2x + y \leq 3 \rightarrow 0 \leq 3 \rightarrow$  vemos que se cumple la desigualdad, por lo que la solución de la inecuación será el semiplano que contiene al punto  $(0,0)$  , incluido los valores que están sobre la recta (ya que la desigualdad contiene al signo igual).

En la gráfica hemos indicado esta sección solución resaltada en rojo.



Si en vez de una inecuación, tenemos dos, tres, etc. partiremos de un sistema de inecuaciones, cuya solución será la intersección en el plano formada por las soluciones particulares de cada inecuación individual.

Podemos resumir el proceso de solución de sistemas de inecuaciones lineales de la siguiente forma:

1. Transformamos la primera inecuación del sistema en una igualdad, obteniendo una recta.
  - Pintamos en el plano la recta, dando dos valores a la variable independiente y obteniendo los correspondientes valores de la variable dependiente.
  - La recta divide al plano en dos zonas. Tomamos un punto arbitrario en alguna de las dos zonas y evaluamos ese punto en la inecuación. Si se cumple la desigualdad, la solución es el semiplano que contiene al punto; si no, la solución será el otro semiplano.
  - Si la desigualdad incluye el signo igual, los puntos que pertenecen a la recta también serán solución.
2. Repetir los pasos del apartado 1 para cada una de las inecuaciones del sistema.
3. La solución final del sistema será la intersección de las regiones solución de cada inecuación.

### Ejemplo 1 resuelto

Resolver 
$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x - y > 5 \end{cases}$$

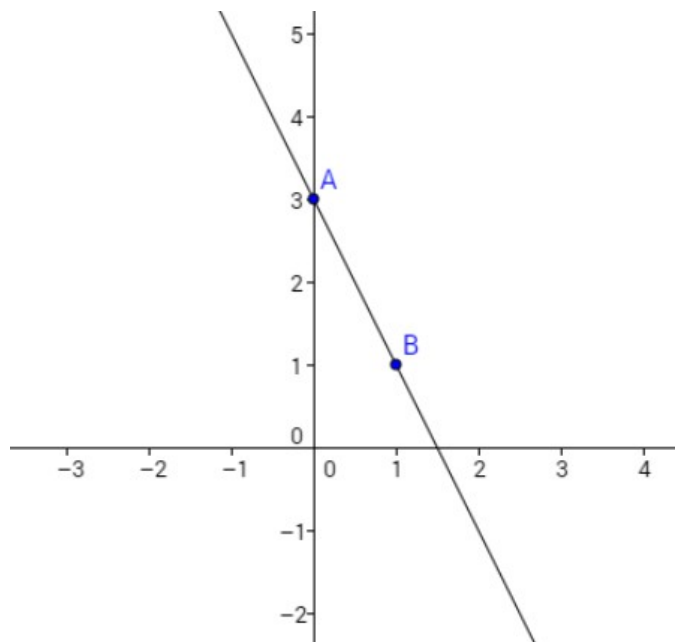
Tomamos la primera inecuación y representamos su recta asociada:

$$2x + y = 3$$

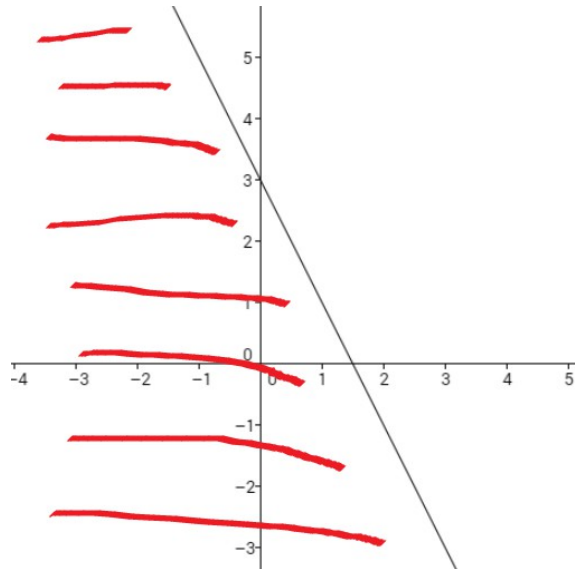
Si  $x=0 \rightarrow y=3 \rightarrow (0,3)$

Si  $x=1 \rightarrow y=1 \rightarrow (1,1)$

Con estos dos puntos ya podemos representar la recta.



Tomamos el punto arbitrario  $(0,0)$ , que ha quedado en el semiplano a la izquierda de la recta. Al evaluar la inecuación en ese punto, obtenemos  $2x + y \leq 3 \rightarrow 0 \leq 3 \rightarrow$  La desigualdad se cumple, por lo tanto el semiplano que contiene a  $(0,0)$  es solución, junto a los puntos de la recta (ya que la desigualdad incluye el signo igual).

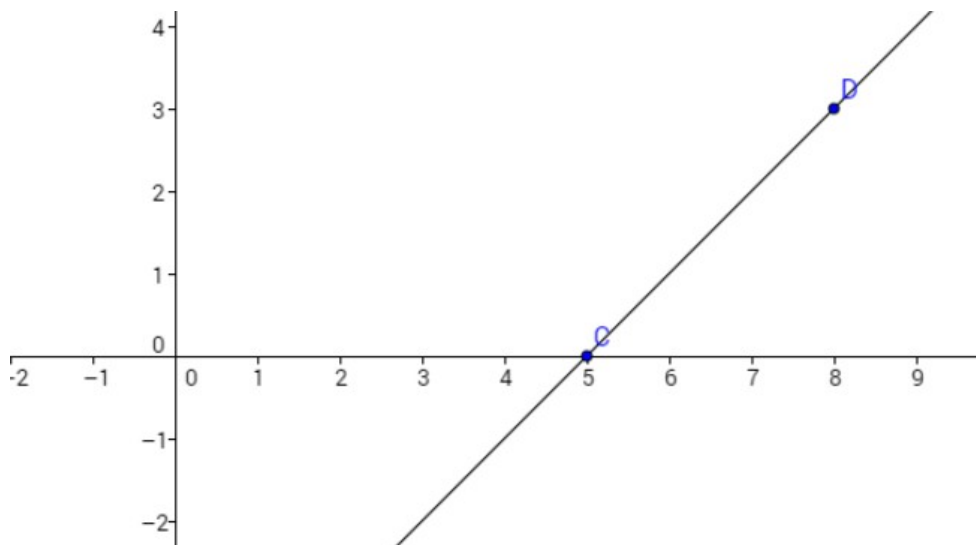


Repetimos el razonamiento con la recta asociada a la segunda inecuación:

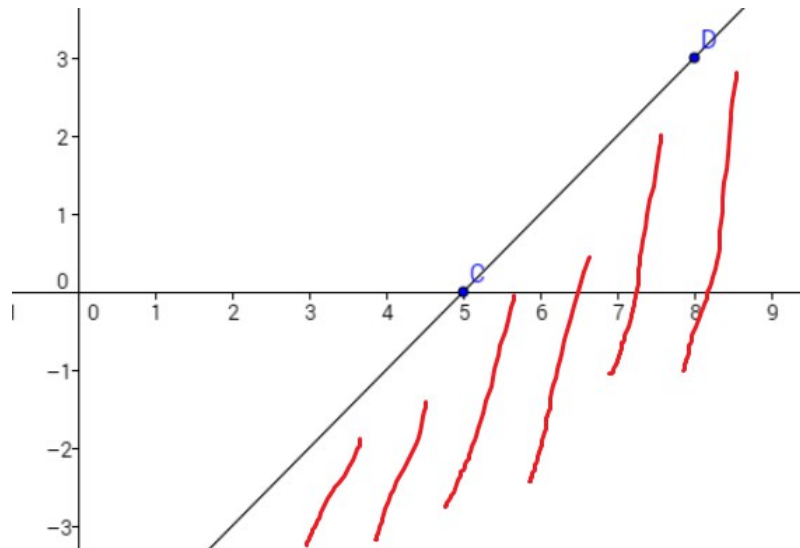
$$x - y = 5$$

Si  $x=5 \rightarrow y=0 \rightarrow (5,0)$

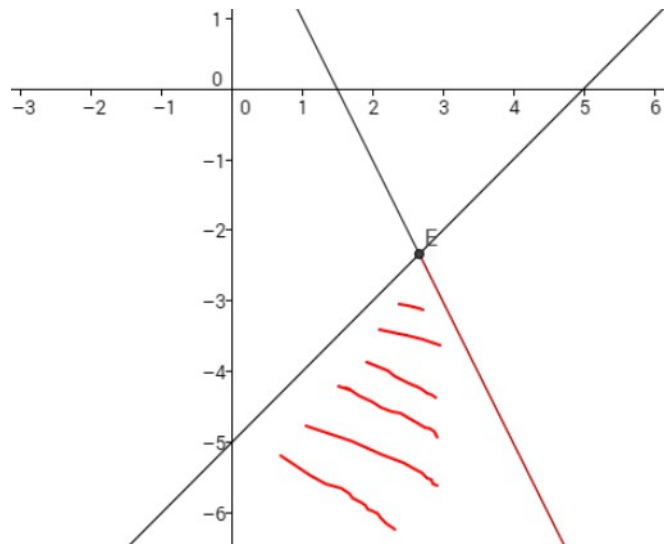
Si  $x=8 \rightarrow y=3 \rightarrow (8,3)$



Elegimos nuevamente el punto  $(0,0)$ , por facilidad en los cálculos. Al evaluar la inecuación en ese punto, obtenemos  $x - y > 5 \rightarrow 0 > 5 \rightarrow$  La desigualdad no se cumple, por lo tanto el semiplano que contiene a  $(0,0)$  no es solución. Los puntos de la recta tampoco serán solución, porque la desigualdad no contiene el signo igual.



La solución final del sistema de inecuaciones será la intersección de ambas soluciones particulares (en la imagen inferior la semirecta en rojo indica que también pertenece a la solución).



El punto E será el vértice del área solución. Sus coordenadas se obtienen como la intersección de las dos rectas  $\rightarrow E\left(\frac{8}{3}, \frac{-7}{3}\right) \rightarrow$  Este punto cumple la primera inecuación  $2x + y \leq 3$ , pero no cumple la segunda inecuación  $x - y > 5$ . Por lo tanto, el punto  $E\left(\frac{8}{3}, \frac{-7}{3}\right)$  no pertenece a la solución final.