Oficina 7

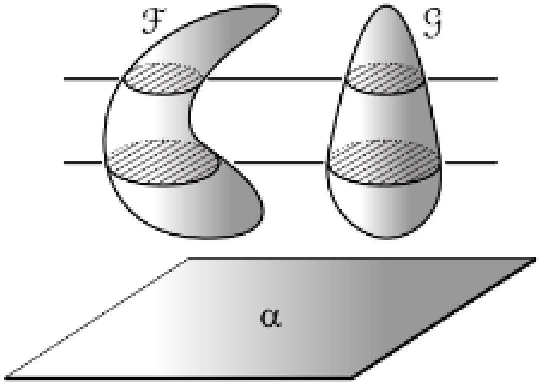
O Princípio de Cavalieri - comparando áreas e deduzindo volumes

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

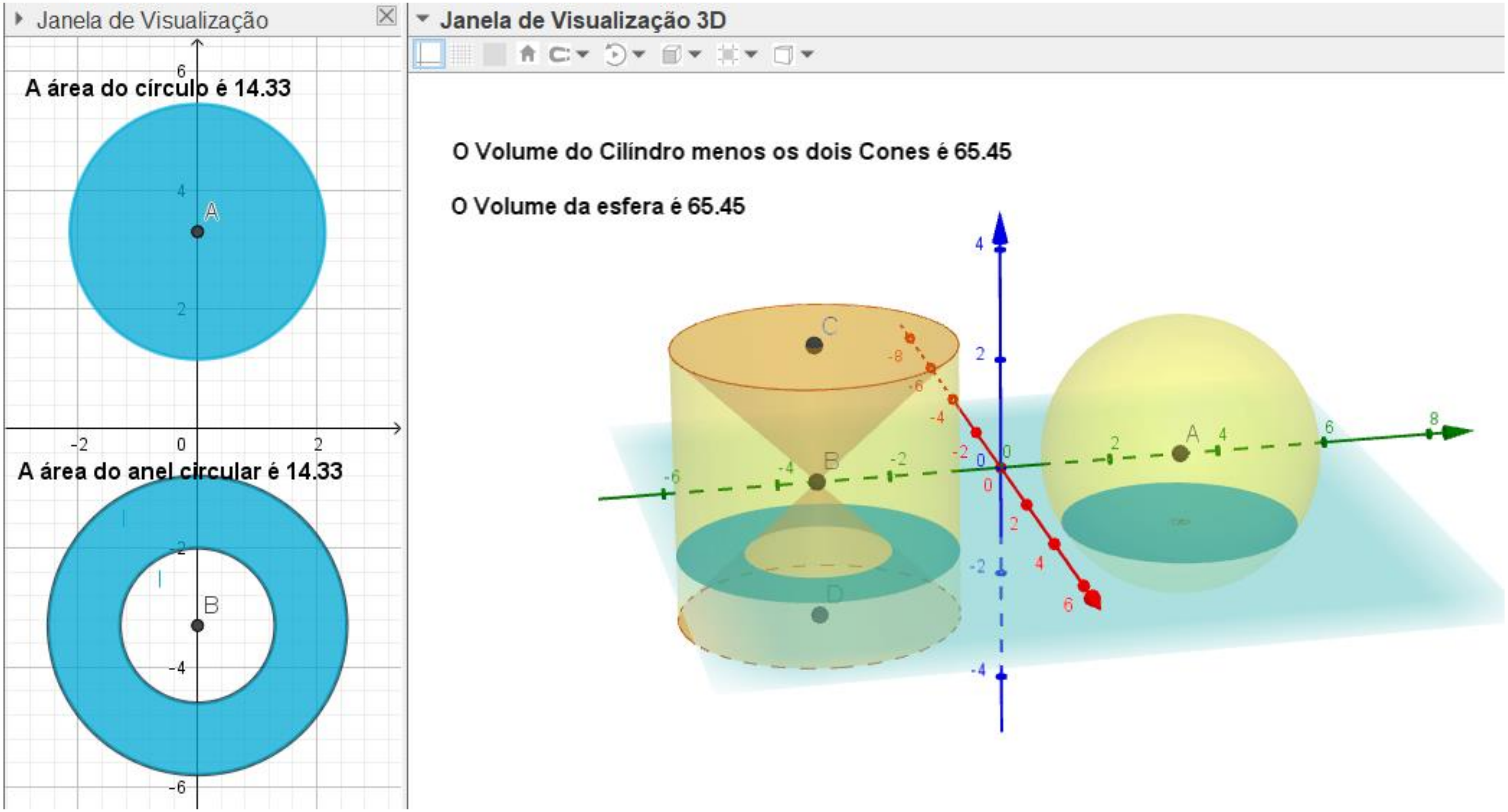
Permite tirar conclusões sobre os volumes de dois sólidos por meio da análise de áreas de determinadas secções.

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

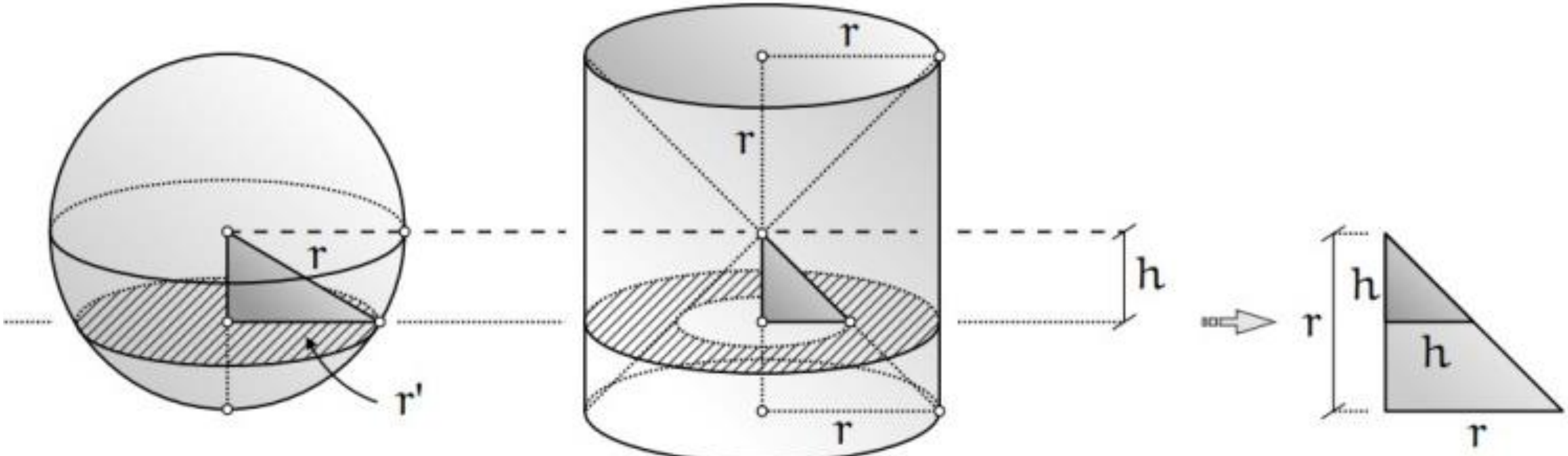
Teorema (Princípio de Cavalieri) *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois sólidos no espaço e α um plano. Se todo plano paralelo a α determina nos sólidos secções de mesma área, então $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ possuem o mesmo volume.*

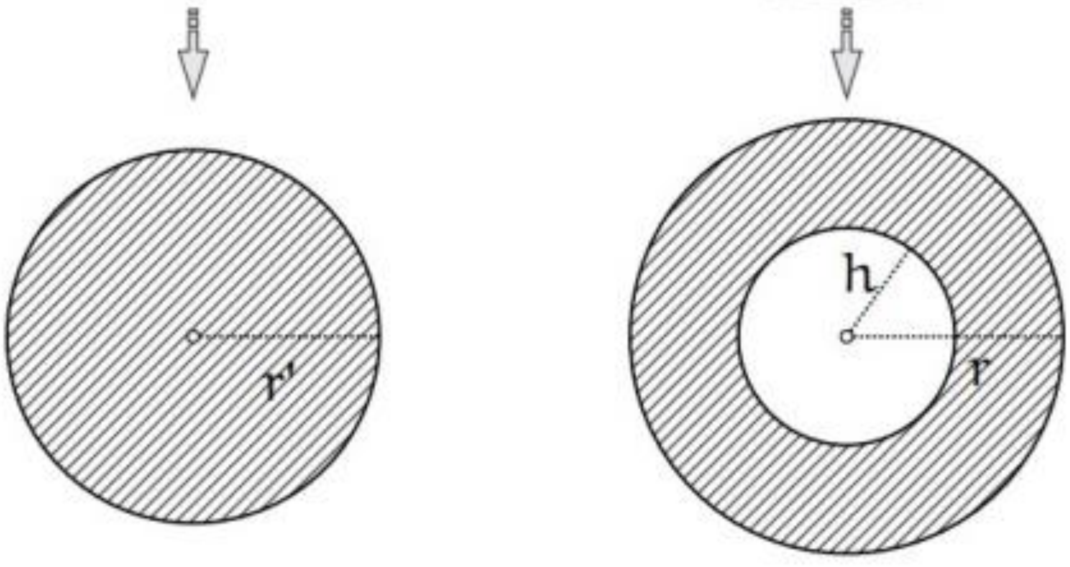


PROPOSTA:



Construir uma animação em que seja possível **comparar áreas de fatiamentos de dois sólidos e concluir a igualdade de volumes pelo Princípio de Cavalieri** sendo que os sólidos são a **esfera** e o sólido geométrico gerado a partir de um cilindro equilátero onde se subtrai dois cones opostos pelo vértice cujas bases coincidem com as bases do cilindro (anticlepsidra - **cilindro menos dois cones**).



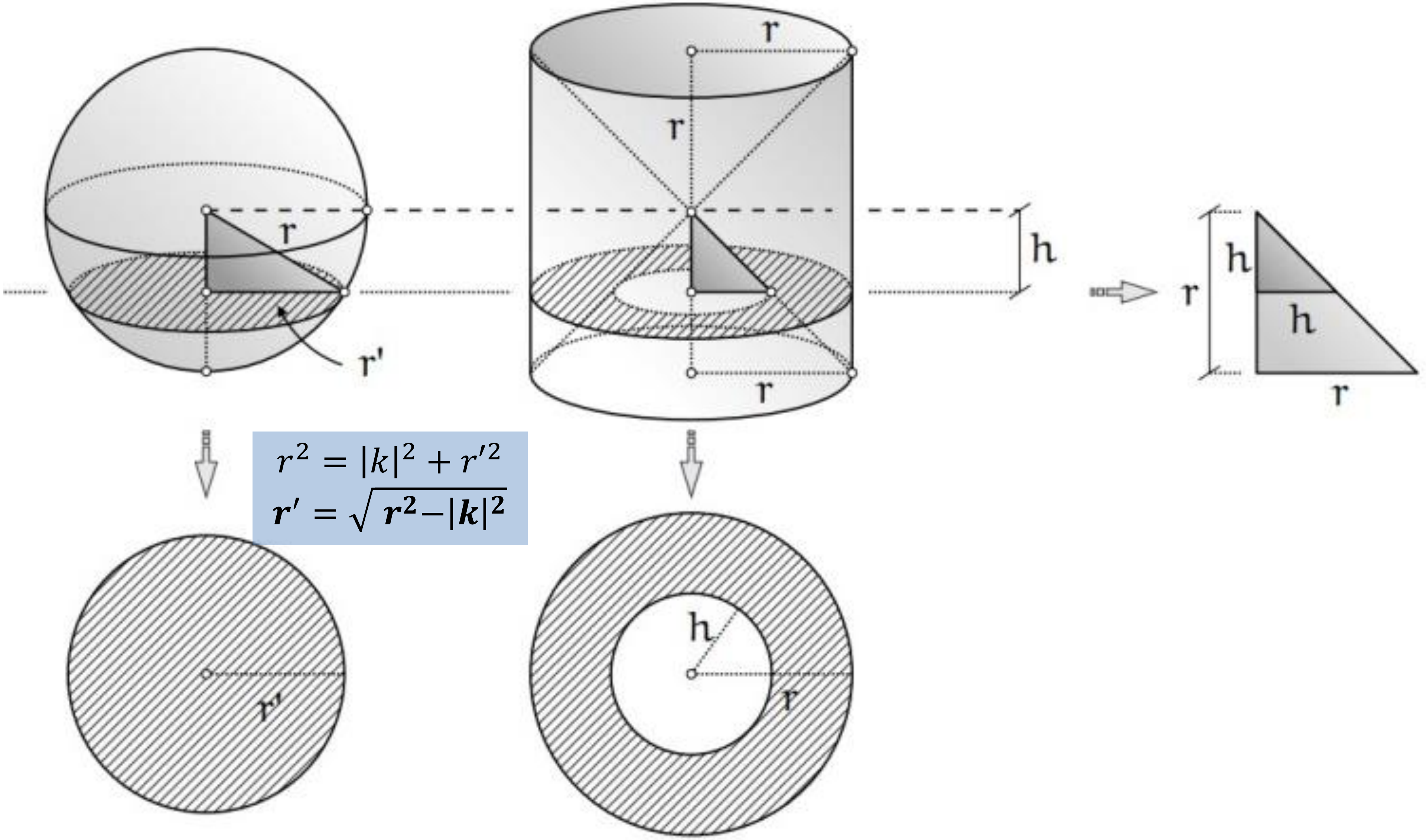


O triângulo maior é um triângulo retângulo isósceles

O triângulo menor é semelhante ao triângulo maior

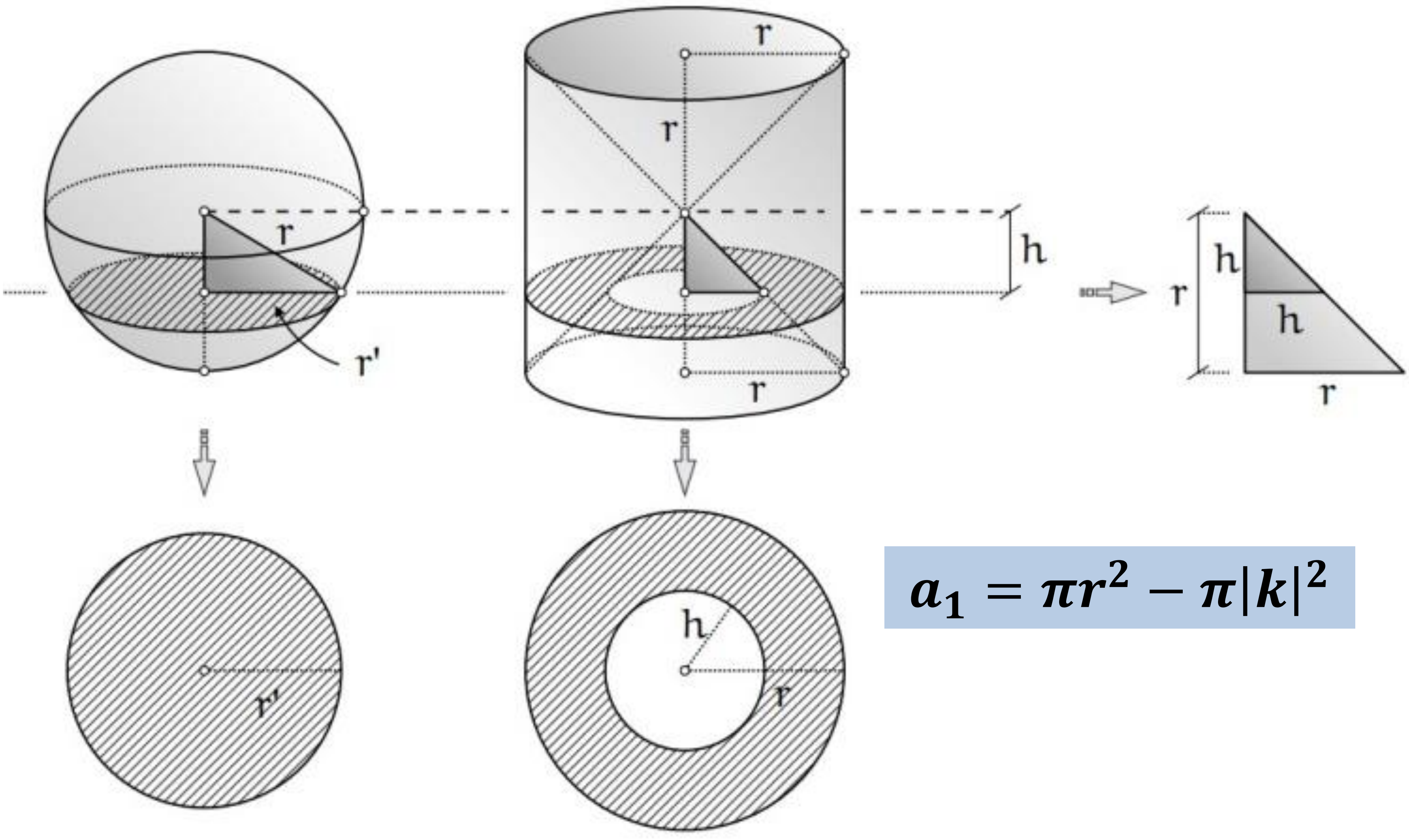
$$h = |k|$$

Raio do círculo menor

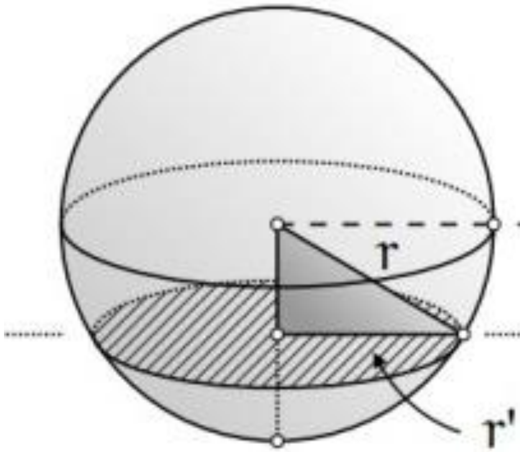


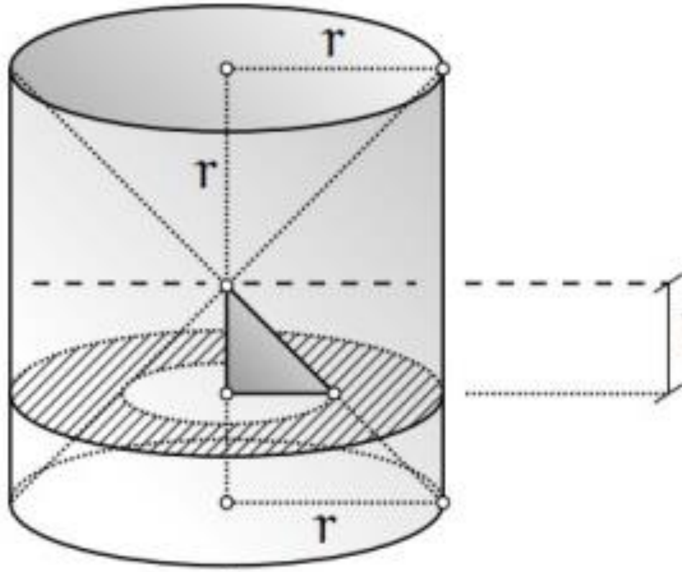
$$r^2 = |k|^2 + r'^2$$

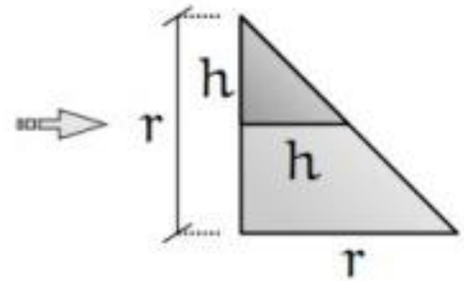
$$\boldsymbol{r' = \sqrt{r^2 - |k|^2}}$$



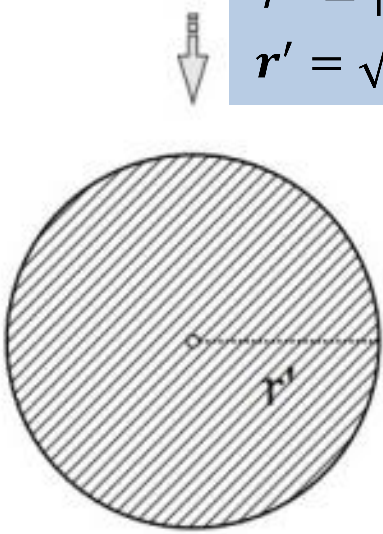
$$a_1 = \pi r^2 - \pi |k|^2$$

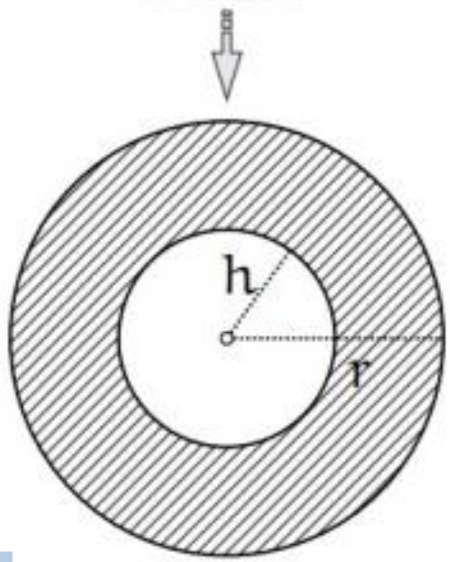






$$r^2 = |k|^2 + r'^2$$
$$\boldsymbol{r' = \sqrt{r^2 - |k|^2}}$$





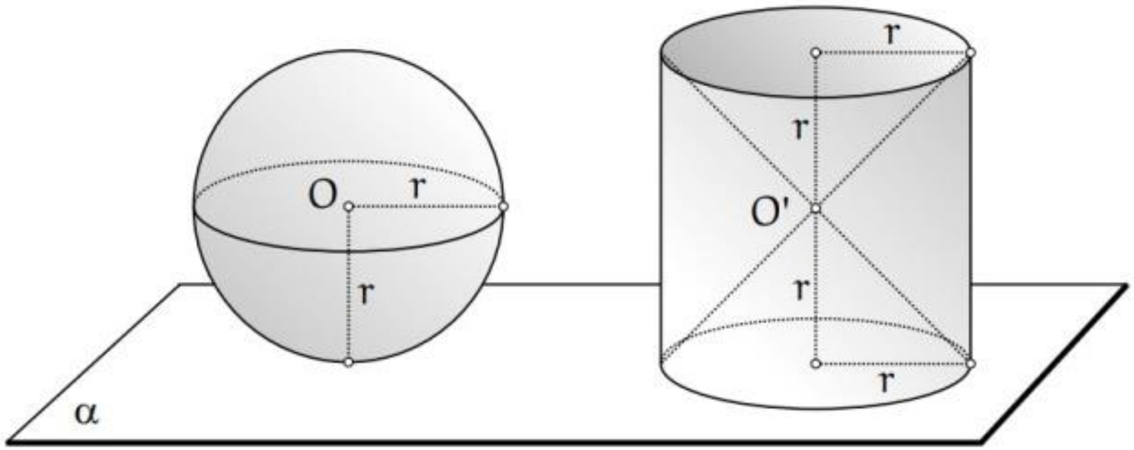
$$\boldsymbol{a_2 = \pi\left(\sqrt{r^2 - |k|^2}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{a_2 = \pi\left(r^2 - |k|^2\right)}$$

O objetivo "algébrico" do Princípio de Cavalieri é deduzir a fórmula do volume da esfera.

Os fatiamentos de mesma área são sempre feitos em dois sólidos: um em que conhecemos a fórmula do volume (neste caso, do cilindro e dos cones) e outro em que ainda não conhecemos a fórmula do volume (neste caso, da esfera).

Como $A_{\text{disco}} = A_{\text{anel circular}}$, então, pelo Princípio de Cavalieri, $V_{\text{esfera}} = V_{\text{anticlepsidra}}$, ou seja:

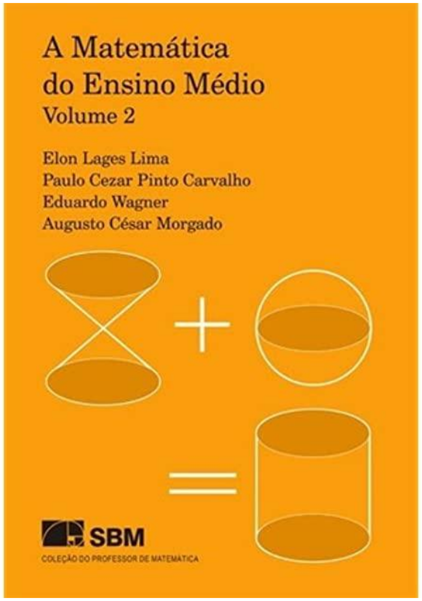


$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{anticlepsidra}} = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}} = \pi r^2(2r) - 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 r\right)$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

- Com essa construção conseguimos ilustrar o Princípio de Cavalieri (que é uma consequência do Teorema de Fubini, que envolve integrais múltiplas) onde utilizamos o volume do cilindro e o volume do cone para deduzir o volume da esfera.
- Agora você poderá dizer que uma esfera é igual a um cilindro menos dois cones. Ou ainda, que **um cilindro é igual a uma esfera mais dois cones!**
- (Curiosidade: Veja a ilustração da capa do livro “A Matemática do Ensino Médio” Volume 2 da SBM.)



- Sabia que também é possível **deduzir o volume da esfera** utilizando o Princípio de Cavalieri comparando-a com um **poliedro**?

- Construir uma animação em que seja possível comparar áreas de fatiamentos de dois sólidos e concluir a igualdade de volumes pelo Princípio de Cavalieri sendo que os sólidos são a **esfera** e uma **pirâmide reta de base retangular** (r x 2r) e altura 2*pi*r.