Teoría – Tema 2

Teoría - 10 - suma y diferencia de ángulos, ángulo doble y ángulo mitad

Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

Una demostración geométrica detallada del seno de la suma, lo encontramos en el siguiente enlace de YouTube donde se utiliza Geogebra para la demostración:

https://www.youtube.com/watch?v=RjdFktWrpkE

$$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$ → **seno de la suma**

La relación para el seno de la diferencia podemos justificarla de la siguiente forma:

$$sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha+(-\beta))=sen(\alpha)\cdot\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(-\beta)$$

Recordamos que la función coseno es par y la función seno es impar. Por lo tanto:

$$sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$$ → **seno de la diferencia**

Para el coseno de la suma $\cos(\alpha+\beta)$ hacemos uso de un ángulo auxiliar γ que será complementario al ángulo suma. Es decir: $\gamma=90º-(\alpha+\beta)$.

Y recordando la relación entre razones trigonométricas de ángulos complementarios:

$$\cos(\alpha+\beta)=sen(\gamma)=sen(90º-(\alpha+\beta))=sen((90º-\alpha)+(-\beta))$$
$$\cos(\alpha+\beta)=sen(90º-\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(90º-\alpha)\cdot sen(-\beta)$$

Recordando la relación entre ángulos complementarios, y que la función seno es impar:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$ → **coseno de la suma**

El coseno de la diferencia podemos justificarlos a partir del coseno de la suma:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta)-sen(\alpha)\cdot sen(-\beta)$$

Si la función coseno es par y la función seno es impar:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+sen(\alpha)\cdot sen(\beta)$$ → **coseno de la diferencia**

En la tangente de la suma partimos de la definición de tangente como cociente entre seno y coseno.

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{sen(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-sen(\alpha)\cdot sen(\beta)}$$

Dividimos numerador y denominador por la expresión $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)$.

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{sen(\beta)}{\cos(\beta)}}{1-\frac{sen(\alpha)\cdot sen(\beta)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}} \rightarrow tg(\alpha+\beta)=\frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\beta)}$$ → **tangente de la suma**

Para la tangente de la diferencia:

$$tg(\alpha-\beta)=tg(\alpha+(-\beta))=\frac{tg(\alpha)+tg(-\beta)}{1-tg(\alpha)\cdot tg(-\beta)}$$

La función tangente es impar. Por lo tanto:

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg(\alpha)-tg(\beta)}{1+tg(\alpha)\cdot tg(\beta)}$$ → **tangente de la diferencia**

Razones trigonométricas del ángulo doble

Las razones de ángulos dobles queda expresadas de la siguiente forma:

$$sen(2\alpha)=sen(\alpha+\alpha)=sen(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\cdot sen(\alpha)$$

$sen(2\alpha)=2\,sen(\alpha)\cos(\alpha)$ → **seno del ángulo doble**

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-sen(\alpha)\cdot sen(\alpha)$$

$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$ → **coseno del ángulo doble**

$$tg(2\alpha)=tg(\alpha+\alpha)=\frac{tg(\alpha)+tg(\alpha)}{1-tg(\alpha)\cdot tg(\alpha)}$$

$tg(2\alpha)=\dfrac{2\,tg(\alpha)}{1-tg^2(\alpha)}$ → **tangente del ángulo doble**

Razones trigonométricas del ángulo mitad

Para expresar, de forma compacta, el seno, coseno y tangente del ángulo mitad, partimos de las siguientes relaciones ya conocidas y demostradas:

$$1=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Sumamos ambas expresiones.

$$1+\cos(\alpha)=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad\rightarrow\quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$ → **coseno del ángulo mitad**

Si restamos las dos expresiones de partida.

$$1-\cos(\alpha)=2\,sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad\rightarrow\quad sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$ → **seno del ángulo mitad**

Utilizamos estos dos resultados del coseno y del seno del ángulo mitad, llegamos a una igualdad para la tangente del ángulo mitad.

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad\rightarrow\quad tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$ → **tangente del ángulo mitad**