

Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 7 - Ejemplos y más ejemplos de límites resueltos

Practicar y practicar

Ejemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{1 + 2 - 3}{1 + 4 + 1 - 6} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x)}{(x-1)(x^2 + 5x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1 + 3}{1 + 5 + 6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2. Estudia la continuidad de la función en $x=3$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 8 & \text{si } x \leq 3 \\ 3x - 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\exists f(3) = -2 \cdot 3 + 8 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} -2x + 8 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x - 7 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 = L$$

$$f(3) = L = 2$$

La función es continua en $x=3$

Ejemplo 3. Estudia la continuidad de la función en $x=-1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -1 \\ -x + 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\exists f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - 4 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} -x + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x = -1$

Ejemplo 4. Estudia la continuidad de la función en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

$$\exists f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 = L$$

$$f(2) = 3 \neq 4 = L$$

Discontinuidad evitable en $x = 2$

Ejemplo 5. Estudia la continuidad de la función en $x = -2$ y en $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 6 & \text{si } -2 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\exists f(-2) = -(-2)^2 + 6 = -4 + 6 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^2 + 6) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2 = L$$

$$f(-2) = 2 = L$$

Función continua en $x = -2$

$$\exists f(3) = -(3)^2 + 6 = -9 + 6 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 + 6) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -3 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

Discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito en $x=3$

Ejemplo 6

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{3}{x^2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty \rightarrow \text{Estudiamos los límites laterales}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{3}{x^2 - 2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{3}{x^2 - 2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Ejemplo 7. Indica el valor de k para que la función sea continua en $x = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2x-2} & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ k & \text{si } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\exists f\left(\frac{1}{2}\right) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{3x}{2x-2} = \frac{-3}{2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{3x}{2x-2} = \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \frac{-3}{2} = L$$

Por continuidad $\rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = k = L \rightarrow k = \frac{-3}{2}$

Ejemplo 8. El número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función $f(x) = \frac{14500x + 7200}{2x + 1}$, donde la variable x mide los años transcurridos desde un tiempo inicial $x=0$.

a) ¿Cuántos habitantes tiene la población actualmente?

$$f(0) = 7200 \text{ habitantes}$$

b) ¿Y dentro de dos años?

$$f(2) = \frac{14500 \cdot 2 + 7200}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{36200}{5} = 7240 \text{ habitantes}$$

c) ¿La población crecerá de manera indefinida o tenderá a estabilizarse en torno a un determinado número de habitantes?

Nos preguntan por el comportamiento de la función en un tiempo infinito. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14500x + 7200}{2x + 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{Cociente de polinomios del mismo grado}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14500x + 7200}{2x + 1} = \frac{14500}{2} = 7250 \text{ habitantes}$$

La población muestra una asíntota horizontal en el valor $f(x) = 7250$ habitantes .