Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 28 - recta perpendicular a dos rectas cruzadas y que las corta en un punto

1. Sean las rectas:

$$r:\left\{\begin{matrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\} \quad , \quad s:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$$

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas rectas.

b) Calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Primero debemos conocer la posición relativas de ambas rectas. Podemos estudiar el rango de la matriz formada por un vector director de cada recta y por un tercer vector formado por dos puntos pertenecientes a cada una de las rectas.

$\vec{u}_r=(1,1,1)$ → Vector director de r , $A(1,1,0)\in r$

$\vec{u}_s=(-2,1,-2)$ → Vector director de s , $B(1,0,1)\in s$

$\vec{AB}=(0,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Estudiamos su rango} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1+2+0-(0+2-2)=3\neq 0$$

El rango es 3, por lo que tenemos tres vectores linealmente independientes, por lo que ambas rectas son cruzadas.

La recta perpendicular que estamos buscando la denominamos t , y debe cortar ambas rectas r y s de manera perpendicular. Por lo tanto, el producto escalar del vector director de t con cada uno de los vectores directores de las otras rectas debe ser nulo.

El vector director de t lo sacamos a partir de dos puntos genéricos de las otras dos rectas. Para ello, expresamos s en paramétricas.

Punto genérico de r → $\left\{\begin{matrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$

Punto genérico de s → $\left\{\begin{matrix} x=1-2\mu \\ y=\mu \\ z=1-2\mu \end{matrix}\right\}$

Vector director de t $\rightarrow$ $\vec{u}_t=(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda)$

Realizamos los productos escalares.

$$\vec{u}_r\cdot\vec{u}_t=0 \quad\rightarrow\quad (1,1,1)\cdot(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda)=0$$

$$-2\mu-\lambda-1+\mu-\lambda+1-2\mu-\lambda=0 \quad\rightarrow\quad -3\mu-3\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \mu=-\lambda$$

$$\vec{u}_s\cdot\vec{u}_t=0 \quad\rightarrow\quad (-2,1,-2)\cdot(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda)=0$$

$$4\mu+2\lambda-1+\mu-\lambda-2+4\mu+2\lambda=0 \quad\rightarrow\quad 9\mu+3\lambda-3=0 \quad\rightarrow\quad 3\mu+\lambda-1=0$$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde:

$$\mu=-\lambda \quad\rightarrow\quad -2\lambda-1=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=\frac{-1}{2} \quad , \quad \mu=\frac{1}{2}$$

Con estos valores podemos sacar, de la ecuaciones genéricas de puntos, un punto de la recta t. Y podemos sacar su vector director.

$$\left\{\begin{matrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\} \quad\rightarrow\quad \left\{\begin{matrix} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{-1}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$\vec{u}_t=(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda) \quad\rightarrow\quad \vec{u}_t=(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2})$$

Por lo que la recta t buscada es:

$$t:\left\{\begin{matrix} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \end{matrix}\right\}$$

b) La distancia entre ambas rectas coincide con el módulo del vector director $\vec{u}_t=(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2})$, ya que lo obtuvimos como diferencia entre los puntos de corte de la recta perpendicular con las dos rectas de partida del enunciado. Por lo tanto:

$$d(r,s)=|\vec{u}_t|=\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad u$$

2. Sea el punto $P(-1,0,2)$ **y las rectas** $r:\left\{\begin{matrix} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{matrix}\right\}$, $s:\left\{\begin{matrix} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{matrix}\right\}$ **.**

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por P **y corta a ambas rectas.**

c) Determina la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

a) Voy a estudiar la posición relativa de ambas rectas trabajando con un vector director de cada recta y con un vector con origen un punto $A\in r$ y final un punto $B\in s$.

Para ello pasamos la recta r a paramétricas.

$$r \rightarrow z=\alpha \rightarrow x=1+\alpha \ , \ y=-1+\alpha \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=1+\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=\alpha \end{matrix}\right\}$$

Es decir:

$$\vec{u}_r=(1,1,1)$$

$$\vec{u}_s=(1,1,0)$$

$$A\in r \rightarrow A(1,-1,0) \ , \ B\in s \rightarrow B(1,0,3) \rightarrow \vec{AB}=(0,1,3)$$

Estudiamos el rango de la matriz formada por estos tres vectores.

$rango(\vec{u}_r, \vec{y}_s, \vec{AB}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}|=3+1+0-(0+0+3)=1\neq 0 \rightarrow$ Rango 3, ya que tenemos tres vectores linealmente independientes → Las rectas son cruzadas.

b) Ahora tenemos un punto $P(-1,0,2)$ y una recta t , de tal forma que $P\in t$. Además la recta t corta tanto a la recta r como a la recta s .

Una forma de resolver el problema es la siguiente.

La recta t pasa por P y cortará a la recta r en un punto que llamaremos Q .

Además, la recta t pasa por P y cortará a la recta s en un punto que llamaremos M .

Los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{PM}$ estarán alineados, por pertenecer a la misma recta t . Ambos vectores deben ser proporcionales, es decir, linealmente dependientes entre si.

$$P(-1,0,2) \ , \ Q(1+\alpha, -1+\alpha, \alpha) \rightarrow \vec{PQ}=(2+\alpha, -1+\alpha, -2+\alpha)$$

$$P(-1,0,2) \ , \ M(1+\lambda, \lambda, 3) \rightarrow \vec{PM}=(2+\lambda, \lambda, 1)$$

Si ambos vectores son proporcionales, deben cumplirse las siguientes igualdades.

$$\frac{2+\alpha}{2+\lambda}=\frac{-1+\alpha}{\lambda}=\frac{-2+\alpha}{1}$$

Igualando los cocientes primero y segundo.

$$\frac{2+\alpha}{2+\lambda}=\frac{-1+\alpha}{\lambda} \quad \rightarrow \quad (2+\alpha)\lambda=(-1+\alpha)(2+\lambda) \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-2+2\alpha}{3}$$

Igualando los cocientes primero y tercero.

$$\frac{2+\alpha}{2+\lambda}=\frac{-2+\alpha}{1} \quad \rightarrow \quad 2+\alpha=(-2+\alpha)(2+\lambda) \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{6-\alpha}{-2+\alpha}$$

Igualando los cocientes segundo y tercero.

$$\frac{-1+\alpha}{\lambda}=\frac{-2+\alpha}{1} \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-1+\alpha}{-2+\alpha}$$

Llegamos a tres expresiones para λ . Si igualamos la dos últimas expresiones obtenidas:

$$\frac{6-\alpha}{-2+\alpha}=\frac{-1+\alpha}{-2+\alpha} \quad \rightarrow \quad 7=2\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{7}{2}$$

Y con este valor podemos obtener λ de cualquiera de las tres expresiones anteriores. Por ejemplo → $\lambda=\frac{-1+\alpha}{-2+\alpha}$, $\alpha=\frac{7}{2}$ $\rightarrow$ $\lambda=\frac{5}{3}$.

Ya tenemos dos vectores directores de la recta t . Podemos escoger el que queramos, pues son proporcionales.

$$\vec{PQ}=(2+\frac{7}{2},-1+\frac{7}{2},-2+\frac{7}{2})=(\frac{11}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2})$$ → Podemos transformar en $\vec{u}_t=(11,5,3)$

$$\vec{PM}=(2+\frac{5}{3},\frac{5}{3},1)=(\frac{11}{3},\frac{5}{3},1)$$ → Podemos transformar en $\vec{u}_t=(11,5,3)$

Y con vector director y un punto, tenemos la recta t .

$$t:\begin{Bmatrix} x=-1+11\beta \\ y=5\beta \\ z=2+3\beta \end{Bmatrix}$$

c) En el último apartado debemos obtener la recta perpendicular común a las rectas r y s .

La forma de razonar es muy semejante al apartado anterior, pero incluyendo el concepto de producto escalar.

La recta perpendicular que buscamos la vamos a llamar w .

La recta w cortará perpendicularmente a la recta r en un punto que llamaremos Q .

La recta w cortará perpendicularmente a la recta s en un punto que llamaremos M .

El vector $\vec{QM}$ será un vector perpendicular a ambas rectas, por ser un vector director de la recta w . Y el producto escalar de $\vec{QM}$ con cada uno de los vectores directores de las rectas r y s será cero, por ser vectores perpendiculares. Y de aquí obtendremos las condiciones necesarias para determinar a a recta solución w .

En el apartado anterior obtuvimos los siguientes puntos genéricos pertenecientes a cada recta.

$Q(1+\alpha,-1+\alpha,\alpha)\in r$, $M(1+\lambda,\lambda,3)\in s$ $\rightarrow$ $\vec{QM}=(\lambda-\alpha,1+\lambda-\alpha,3-\alpha)$

Hacemos los productos escalares.

$\vec{QM}\cdot\vec{u}_r=0$ $\rightarrow$ $(\lambda-\alpha,1+\lambda-\alpha,3-\alpha)\cdot(1,1,1)=\lambda-\alpha+1+\lambda-\alpha+3-\alpha=2\lambda-3\alpha+4=0$

$\vec{QM}\cdot\vec{u}_s=0$ $\rightarrow$ $(\lambda-\alpha,1+\lambda-\alpha,3-\alpha)\cdot(1,1,0)=\lambda-\alpha+1+\lambda-\alpha=2\lambda-2\alpha+1=0$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$\begin{Bmatrix}2\lambda-3\alpha=-4\\2\lambda-2\alpha=-1\end{Bmatrix}$ → Restamos ambas ecuaciones → $-\alpha=-3$ $\rightarrow$ $\alpha=3$

En consecuencia → $\lambda=\frac{5}{2}$

Con estos valores obtenemos los puntos $Q(1+\alpha,-1+\alpha,\alpha)\in r$ y $M(1+\lambda,\lambda,3)\in s$, y el vector que forman (que será vector director de la recta solución w).

$Q(4,2,3)$, $M(\frac{7}{2},\frac{5}{2},3)$ $\rightarrow$ $\vec{QM}=(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0)$ → Transformamos en $\vec{u}_w=(-1,1,0)$

Y la recta solución, en paramétricas, será:

$$w:\begin{Bmatrix}x=4-\beta\\y=2+\beta\\z=3\end{Bmatrix}$$

3. Sean las siguientes rectas:

$$r:\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ y+z=1 \end{Bmatrix} \quad , \quad s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2$$

a) Comprobar que son cruzadas.

b) Obtener la recta perpendicular a r **y** s **, que corta a ambas rectas a la vez.**

c) Obtener la distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición relativa de ambas rectas tengo dos opciones:

- Obtener un vector director de cada recta y un vector formado por dos puntos cualesquiera de ambas rectas, y estudiar el rango de los tres vectores. Ambas rectas serán cruzadas si el rango de esa matriz es 3.

- Pasar todas las rectas a su ecuación general y plantear un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Ambas rectas serán cruzadas si el rango de la matriz del sistema es 3 y el rango de la matriz ampliada es 4.

Voy a seguir el primer método.

El vector directos $\vec{u}_r \| r$ podemos obtenerlo **pasando la ecuación general a paramétricas, o bien realizando el producto vectorial de los vectores normales a los planos que aparecen en la ecuación general**.

$$\vec{u}_r=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+0+\hat{k}-(0+0+\hat{j})=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}=(1,-1,1)$$

De la ecuación continua de la recta s obtenemos su vector director → $\vec{u}_s=(2,-1,1)$

Dando, por ejemplo, el valor $x=0$ en la ecuación general de la recta r sacamos un punto que pertenezca a la recta r → $A(0,1,0)\in r$

De la ecuación continua de la recta s obtenemos directamente un punto de la recta s → $B(1,0,-2)\in s$

Creamos el vector formado por ambos puntos → $\vec{AB}=(1,-1,-2)$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ → $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Recordamos que el rango coincide con la dimensión del mayor menor no nulos. Y que el rango es el número de vectores linealmente independientes contenidos en la matriz.

Calculamos el determinante de la matriz. Si es no nulo, su rango será 3.

$$|M|=2-2-1-(-1-1+4)=-3\neq 0 \quad \rightarrow \quad rango(M)=3$$

Los tres vectores son linealmente independientes → Rectas cruzadas

b) La recta t es perpendicular a ambas rectas del enunciado y las corta en un punto. Por lo tanto, el vector director de la recta t es igual al producto vectorial de los vectores directores de las rectas del enunciado.

$$\vec{u}_t=\vec{u}_r\times\vec{u}_s=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}-(-2\hat{k}-\hat{i}+\hat{j})=\hat{j}+\hat{k}=(0,1,1)$$

Recuerda que con un vector director de la recta y un punto de la recta, ya podemos trazar la recta. Por lo tanto, nos falta obtener un punto de la recta t .

Para ello vamos a obtener el plano que contiene a la recta r y que es paralelo al vector $\vec{u}_t$. Este plano cortará a la recta s en el punto de intersección de la recta s con la recta t .

El plano lo obtenemos a partir de la determinación lineal, ya que tenemos dos vectores paralelos al plano y podemos tomar un punto de la recta r como punto del plano.

$$\Pi(\vec{u}_r,\vec{u}_t,A) \rightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ -1 & 1 & y-1\\ 1 & 1 & z\end{vmatrix}=0 \rightarrow z+0-x-(x+y-1+0)=0 \rightarrow \Pi:-2x-y+z+1=0$$

Intersectamos este plano con la recta s . Para ellos sustituimos los valores de la ecuación en paramétricas de la recta dentro de la ecuación general del plano.

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2 \rightarrow s:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-2+\lambda\end{cases} \rightarrow -2(1+2\lambda)+\lambda-2+\lambda+1=0 \rightarrow \lambda=\frac{-3}{2}$$

El punto $P\in s, P\in t$ será $\rightarrow$ $P\left(1+2\cdot\frac{-3}{2},\frac{3}{2},-2-\frac{3}{2}\right) \rightarrow P\left(-2,\frac{3}{2},-\frac{7}{2}\right)$

Y la recta t solución resulta $\rightarrow$ $t:\begin{cases}x=-2\\ y=\frac{3}{2}+\alpha\\ z=\frac{-7}{2}+\alpha\end{cases}$

Un poco largo, ¿verdad?

Hay **otra forma de resolverlo**... Sí, siempre hay más de una forma para resolver estos problemas de geometría.

Voy a tomar dos puntos arbitrarios de la rectas. Para ello, debo expresarla en paramétricas.

$$r:\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=1 \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \rightarrow A(\alpha, 1-\alpha, \alpha)$$

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2 \rightarrow s:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases} \rightarrow B(1+2\lambda, -\lambda, -2+\lambda)$$

Donde uso dos letras distintas para los parámetros libres, ya que son dos rectas distintas.

Realizo el vector entre ambos puntos arbitrarios.

$$\vec{AB}=(1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)$$

Y este vector será el vector director de la recta t solución si es perpendicular a ambas rectas del enunciado. Es decir, el producto escalar de este vector con los vectores directores de las rectas debe ser nulo.

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow (1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)\cdot(1,-1,1)=0$$

$$1+2\lambda-\alpha+\lambda+1-\alpha-2+\lambda-\alpha=0 \rightarrow 4\lambda-3\alpha=0$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}_s=0 \rightarrow (1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)\cdot(2,-1,1)=0$$

$$2+4\lambda-2\alpha+\lambda+1-\alpha-2+\lambda-\alpha=0 \rightarrow 6\lambda-4\alpha=-1$$

Y formamos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 4\lambda-3\alpha=0 \\ 6\lambda-4\alpha=-1 \end{cases} \rightarrow \lambda=\frac{-3}{2} \quad , \quad \alpha=-2$$

Con estos valores de los parámetros → $A(-2, 3, -2)$, $B(-2, \frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$ → $\vec{AB}=(0, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

Los puntos A y B pertenecen a la recta solución t .

Este vector es director de la recta t → $\vec{u}_t=\vec{AB}=(0, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

Fíjate que este vector es proporcional a $\vec{u}_t=(0,1,1)$, que es el vector que obtuvimos por el primer método.

Y con el vector director y un punto de la recta t tenemos la recta → $t:\left\{\begin{array}{c} x=-2 \\ y=\frac{3}{2}+\alpha \\ z=\frac{-7}{2}+\alpha \end{array}\right\}$

c) Los dos métodos del apartado anterior son largos. La ventaja del segundo método es que obtenemos los puntos intersección de la recta solución t con las dos rectas del enunciado. Por lo que la distancia entre ambas rectas será la distancia entre ambos puntos de corte.

$$A(-2,3,-2) \quad , \quad B\left(-2,\frac{3}{2},-\frac{7}{2}\right) \quad \rightarrow \quad \vec{AB}=\left(0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

$$d(r,s)=d(A,B)=|\vec{AB}|=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad u$$

Si no tenemos ambos puntos de corte, podemos usar la siguiente fórmula para la distancia de dos rectas cruzadas.

$$d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$$

Donde $\vec{u}_r,\vec{u}_r$ son los vectores directores de las rectas y $\vec{AB}$ es el vector formado por dos puntos que elijamos de ambas rectas. En nuestro ejemplo:

$$\vec{u}_s=(1,-1,1)$$

$$\vec{u}_s=(2,-1,1)$$

$$A(0,1,0)\in r \quad , \quad B(1,0,-2)\in s \quad \rightarrow \quad \vec{AB}=(1,-1,-2)$$

$$d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}=\frac{|\vec{AB}\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{|(1,-1,-2)\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{2}}=\frac{|0-1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad u$$