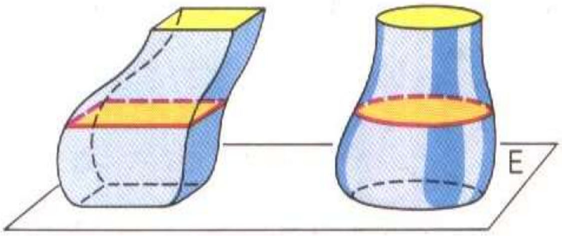
Lernumgebung: https://www.geogebra.org/m/ectcrsag

Das Volumen der Pyramide

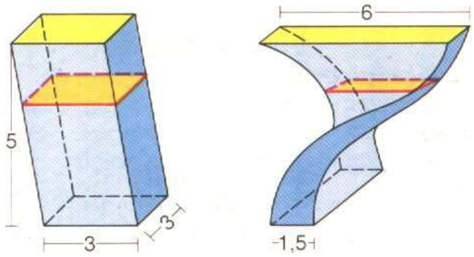
1. Das Prinzip von Cavalieri:

Haben zwei Körper gleicher Höhe beim Schnitt mit einer Ebene E inhaltsgleiche Schnittflächen und gilt dies auch für jeden Schnitt mit einer zu E parallelen Ebene, dann haben die Körper den gleichen Rauminhalt.



(Dieser Satz ist für uns noch nicht beweisbar; wir fassen ihn als Axiom auf.)

Beispiel: Zeige, dass die beiden nebenstehenden Figuren gleichen Rauminhalt besitzen, und berechne diesen.

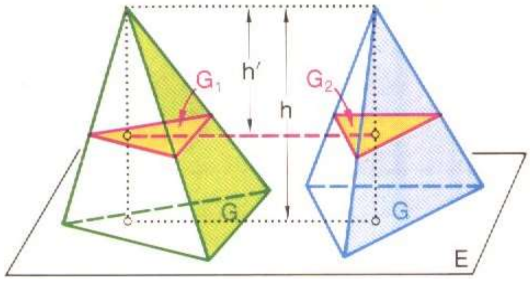


____

____

2. Anwendung dieses Prinzips auf Pyramiden:

Nach dem Prinzip von Cavalieri folgt:

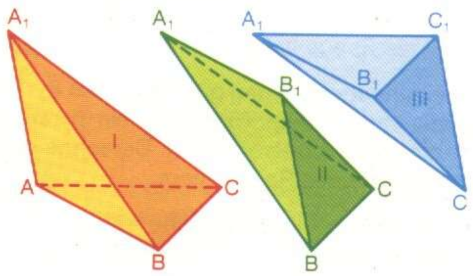


Zwei Pyramiden mit ________________

____

besitzen den gleichen Rauminhalt.

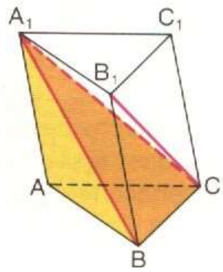
3. Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide:



Wir ergänzen eine dreiseitige Pyramide (I), deren Flächeninhalt wir berechnen wollen, durch zwei Ergänzungspyramiden (II) und (III) zu einem dreiseitigen Prisma. Da je zwei Pyramiden stets in Grundfläche und Höhe übereinstimmen, stimmen deren drei Rauminhalte also überein.

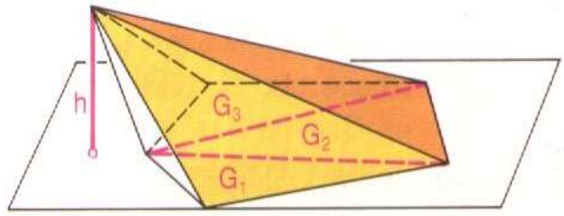
Der Rauminhalt des Prismas berechnet sich durch _____________

Damit ergibt sich für das Volumen der Pyramide: _______________



4. Das Volumen einer beliebigen Pyramide:

Jede Pyramide lässt sich (wie nebenstehende Figur zeigt) in dreiseitige Pyramiden zerlegen. Sind $G1, \dots, Gn$ ihre Grundflächen, so gilt:



$$V = \frac{1}{3} G1 \cdot h + \frac{1}{3} G2 \cdot h + \dots + \frac{1}{3} Gn \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (G1 + G2 + \dots + Gn) \cdot h = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Merke:

Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat den Rauminhalt: $V_{Pyramide}$ =