

33 Mètodes de càlcul. Exemples

33.1 Matricial

Es tracta d'una estructura porticada formada per la biga 1-2 i els suports 3-1 i 4-2. Les interseccions entre biga i suports són nusos rígids o hiperestàtics i els punts de contacte amb la fonamentació 3 i 4 són encastaments perfectes (fig. 33.1). Aquesta aplicació resoldrà estàticament el pòrtic, és a dir, definirà les sol·licitacions formades per les reaccions, esforços tallants i moments flectors utilitzant el mètode matricial, també dit matricial de les deformacions.

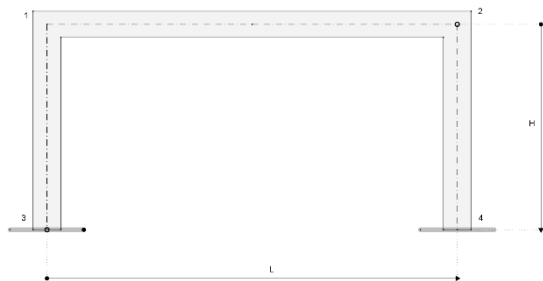


Fig. 33.1

Del pòrtic es coneix la seva llum L i la seva altura H , controlades per punts mòbils de GeoGebra. Punts lliscants col·locats a la segona pantalla gràfica permeten definir les dimensions de la biga: la seva amplària bb i el seu cantell hb . De la mateixa manera, es controlen les dimensions dels suports, la mateixa per als dos: bs l'amplària i hs el cantell. L'entrada de dades es completa amb l'única càrrega actuant q , uniformement repartida sobre la biga, i el mòdul d'elasticitat E , igual per a tots els elements del pòrtic. Aquest és molt elemental, però serà totalment representatiu del mètode matricial per a la seva resolució. A continuació, s'indicarà el procés seguit en un exemple concret, amb els següents paràmetres: $L= 7.07$ m, $H= 3.54$ m, $bb= 38$ cm, $hb= 45$ cm, $bs= 22$ cm, $hs= 48$ cm i $q= 25$ kN/m.

1. Referència eixos biga. Tant per a la biga com per als suports, es proposa un sistema d'eixos locals que serviran per establir les matrius particularitzades als elements analitzats (fig. 33.2). De la mateixa manera, s'estableixen, de forma arbitrària, signes que seran positius si coincideixen amb les fletxes de les dues figures següents i negatius en cas contrari.

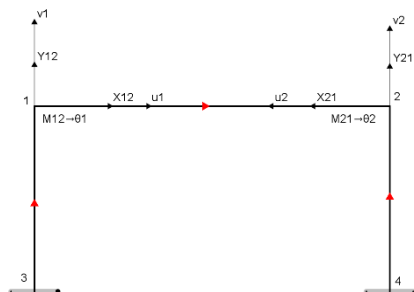


Fig. 33.2

2. Referència eixos suports. Seguint les explicacions donades per a la biga, es dona a la figura 33.3 la referència d'eixos per als suports.

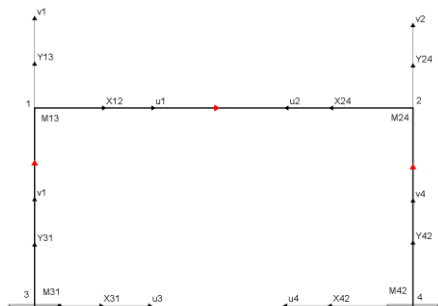


Fig. 33.3

3. Propietats. A continuació, s'han de col·locar les propietats de cadascuna dels elements de

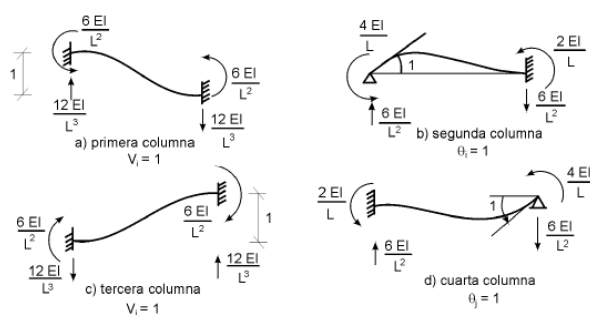


Figura 11.14 Significado físico de los términos de la matriz de rigidez de un elemento prismático sometido a flexión y corte. En todos los casos los desplazamientos nodales no indicados explícitamente son cero.

Ensamblando los términos correspondientes a las cuatro columnas, con debida consideración a la convención de signos adoptada (fuerzas hacia arriba y momentos antihorarios son positivos), se obtiene la matriz de rigidez del elemento:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{matrix} \quad (11.44)$$

Fig. 33.4

Amb la geometria del pòrtic i el seu mòdul de elasticitat es calculen els següents valors: $A \cdot E/L$, $E \cdot I$, $2 \cdot E \cdot I/L$, $4 \cdot E \cdot I/L$, $6 \cdot E \cdot I/L^2$ i $12 \cdot E \cdot I/L^3$, sent E el mòdul de elasticitat de qualsevol element del pòrtic. Diferenciant si es tracta de la biga o dels suports, es calcula l'àrea A de les seccions, la longitud dels elements i el seu moment d'inèrcia I . Las unitats són en kN i m i es dona un resum endreçat a la figura 33.5.

Propietats	$A \cdot E/L$	$E \cdot I$	$2 \cdot E \cdot I/L$	$4 \cdot E \cdot I/L$	$6 \cdot E \cdot I/L^2$	$12 \cdot E \cdot I/L^3$
1-2	499925	59649.62	16872.47	33744.94	7158.81	2024.94
3-1...4-2	617235.95	41911.47	23701.86	47403.72	20105.89	11370.32

Fig. 33.5

4. Matrius de rigidesa dels elements estructurals. A partir de les propietats es presenta la matriu de rigidesa de la biga (fig. 33.6).

Matriu rigidesa. Biga							
K12	u1	v1	θ_1	u2	v2	θ_2	
X12	499925	0	0	-499925	0	0	u1
Y12	0	2024.94	7158.81	0	-2024.94	7158.81	v1
M12	0	7158.81	33744.94	0	-7158.81	16872.47	θ_1
X21	-499925	0	0	499925	0	0	u2
Y21	0	-2024.94	-7158.81	0	2024.94	-7158.81	v2
M21	0	7158.81	16872.47	0	-7158.81	33744.94	θ_2

Fig. 33.6

A partir de les propietats es presenta la matriu de rigidesa del suport 3-1 (fig. 33.7)

Matriu rigidesa. Suport 3-1							
K31	u3	v3	θ_3	u1	v1	θ_1	
X31				-11370.32	0	-23701.86	u3
Y31				0	-617235.95	0	v3
M31				23701.86	0	23701.86	θ_3
X13				11370.32	0	23701.86	u1
Y13				0	617235.95	0	v1
M13				20105.89	0	47403.72	θ_1

Fig. 33.7

A partir de les propietats es presenta la matriu de rigidesa del suport 4-2 (fig. 33.8)

Matriu rigidesa. Suport 4-2							
K42	u4	V4	θ_4	u2	v2	θ_2	
X42				-11370.32	0	-23701.86	u4
Y42				0	-617235.95	0	V4
M42				23701.86	0	23701.86	θ_4
X24				11370.32	0	23701.86	u2
Y24				0	617235.95	0	v2
M24				20105.89	0	47403.72	θ_2

Fig. 33.8

5. Acoblant de la matriu de rigidesa del pòrtic. Acoblant les matrius dels tres elements que intervenen a l'estructura, s'obté la matriu de rigidesa K (fig. 33.9).

u1	v1	θ_1	u2	v2	θ_2	
511295.32	0	23701.86	-499925	0	0	u1
0	619260.89	7158.81	0	-2024.94	7158.81	v1
20105.89	7158.81	81148.66	0	-7158.81	16872.47	θ_1
-499925	0	0	511295.32	0	23701.86	u2
0	-2024.94	-7158.81	0	619260.89	-7158.81	v2
0	7158.81	16872.47	20105.89	-7158.81	81148.66	θ_2

Fig. 33.9

6. Vector de les càrregues. Les accions que actuen en el pòrtic són els esforços tallants de la biga $V_{12} = V_{21} = 88.38$ kN i els moments flectors d'encastament perfecte, que són $M_{12} = 104.15$ mkN i $M_{21} = -104.15$ mkN. Amb aquests valors, es confecciona el vector de càrregues C, que resulta ser el que es veu a la figura 33.10.

0
88.38
104.15
0
88.38
-104.15

Fig. 33.10

7. Inversió de la matriu de rigidesa K. La inversió de matrius és una operació que GeoGebra efectua amb molta senzillesa. La figura 33.11 dona els valors de matriu inversa de rigidesa K multiplicats per 10.000.

0.78	0	-0.19	0.77	0	-0.19
0	0.02	0	0	0	0
-0.16	0	0.17	-0.16	0	0.01
0.77	0	-0.19	0.78	0	-0.19
0	0	0	0	0.02	0
-0.16	0	0.01	-0.16	0	0.17

Fig. 33.11

8. Resultats. Una vegada invertida la matriu de rigidesa K i amb el vector de càrregues, ja es poden tenir els resultats, que són els que es veuen a la figura 33.12.

X31	38.26	kN
Y31	88.38	kN
M31	-38.31	mkN
X13	-38.26	kN
Y13	-88.38	kN
M13	-76.61	mkN
X42	-38.26	kN
Y42	88.38	kN
M42	38.31	mkN
X24	38.26	kN
Y24	-88.38	kN
M24	76.61	mkN

Fig. 33.12

9. Diagrames. Obtinguts els resultats, és immediat traduir-los en diagrames d'esforços tallants i de moments flectors, tal com s'observa a la figura 33.13.

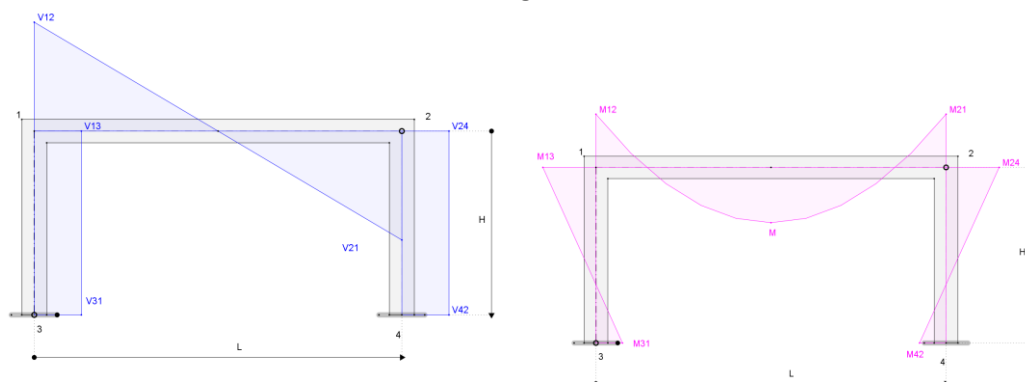


Fig. 33.13

Les fonts consultades, entre altres, han estat:

- 'Análisis de Estructuras' de Jairo Uribe Escamilla. Editat per ECOE Ediciones. 2002.
- 'Análisis estático de estructuras por el método matricial' de José Luis Blanco-Antonio Gonzalez-José Manuel García. Departamento de Ingeniería Civil, Materiales y Fabricación. Universidad de Málaga. 2012.