Teoría – Tema 9

Teoría - 7 - ecuación general del plano - ecuación canónica - parte 2 de 2

Continuación sobre ecuación general plano: ecuación canónica o segmentaria

La ecuación general nos presenta una ecuación de coeficientes que multiplican a cada una de las incógnitas x, y, z más un término independiente:

$$A x+B y+C z+D=0$$

Algunos casos especiales de esta ecuación general son los siguientes.

Si $A=0$ $\rightarrow$ $B y+C z+D=0$ $\rightarrow$ El plano no corta al eje OX $\rightarrow$ El plano es paralelo al eje OX

Si $B=0$ $\rightarrow$ $A x+C z+D=0$ $\rightarrow$ El plano no corta al eje OY $\rightarrow$ El plano es paralelo al eje OY

Si $C=0$ $\rightarrow$ $A x+B y+D=0$ $\rightarrow$ El plano no corta al eje OZ $\rightarrow$ El plano es paralelo al eje OZ

Si $A=0$ y $B=0$ $\rightarrow$ $C z+D=0$ $\rightarrow$ El plano no corta al eje OX ni al eje OY $\rightarrow$ El plano es paralelo al plano XY $\rightarrow$ Corta al eje OZ en $z=\frac{-D}{C}$

Si $A=0$ y $C=0$ $\rightarrow$ $B y+D=0$ $\rightarrow$ El plano no corta al eje OX ni al eje OZ $\rightarrow$ El plano es paralelo al plano XZ $\rightarrow$ Corta al eje OY en $y=\frac{-D}{B}$

Si $B=0$ y $C=0$ $\rightarrow$ $A x+D=0$ $\rightarrow$ El plano no corta al eje OY ni al eje OZ $\rightarrow$ El plano es paralelo al plano YZ $\rightarrow$ Corta al eje OX en $x=\frac{-D}{A}$

Por norma general, **si falta alguna de las variables en la ecuación general significa que el plano será paralelo al eje cartesiano asociado a esa variable**.

Si tenemos tres puntos no alineados de un plano tenemos la ecuación del plano (podemos aplicar la determinación lineal $\Pi(\vec{u}, \vec{v}, A)$).

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3) \in \Pi$ $\rightarrow$ Tres puntos no alineados

$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\vec{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ $\rightarrow$ Linealmente Independientes

Donde la ecuación general, como ya hemos demostrado en el apartado anterior, se obtiene de anular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Supongamos que nuestro plano corta a los tres ejes cartesianos en los siguientes puntos:

$A(a,0,0)$ → Corte con el eje OX

$B(0,b,0)$ → Corte con el eje OY

$C(0,0,c)$ → Corte con el eje OZ

Por lo tanto los vectores resultan:

$$\vec{AB}=(-a,b,0) \quad , \quad \vec{AC}=(-a,0,c)$$

Quedando el determinante:

$$\begin{vmatrix} -a & -a & x-a \\ b & 0 & y \\ 0 & c & z \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad bc(x-a)+ac\,y+ab\,z=0 \quad \rightarrow \quad bc\,x+ac\,y+ab\,z=abc$$

Dividiendo ambos miembros por abc llegamos a la ecuación segmentaria del plano.

Ecuación segmentaria o canónica del plano

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$A(a,0,0)$ → Corte del plano con el eje OX

$B(0,b,0)$ → Corte del plano con el eje OY

$C(0,0,c)$ → Corte del plano con el eje OZ

Ejemplo 1 resuelto

Determina la ecuación segmentaria del plano $\Pi: x+2y+4z-4=0$ **.**

Debemos llevar el término independiente a la derecha de la igualdad y dejarlo reducido al valor 1 . Es decir:

$$\Pi: x+2y+4z-4=0 \quad \rightarrow \quad x+2y+4z=4 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$$

La ecuación canónica también es útil para obtener, rápidamente, tres punto del plano. Observando la ecuación canónica obtenida es inmediato que los siguientes tres puntos pertenecen al plano:

$$A(4,0,0) \quad , \quad B(0,2,0) \quad , \quad C(0,0,1)$$

En los planos que corten a los tres ejes coordenadas, es muy fácil pasar de la ecuación general a la paramétrica, ya que la ecuación canónica nos da tres puntos del plano, de donde podemos obtener dos vectores (que seguro serán linealmente independientes) y de ahí aplicar la determinación lineal $\Pi(\vec{u},\vec{v},A)$.