APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Índice:

1. Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Monotonía: crecimiento y decrecimiento en un intervalo.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **creciente** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $f(x)<f(x+h)$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **constante** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $f(x)=f(x+h)$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **decreciente** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $f(x)>f(x+h)$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **monótona** si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$ o $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$.

Tasa de variación y monotonía

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **creciente** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $TVM_{(x,h)}f(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **constante** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $TVM_{(x,h)}f(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **decreciente** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $TVM_{(x,h)}f(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}<0$

Derivada y monotonía.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **creciente** si para todo $x\in[a,b]$ es $f'(x)>0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **constante** si para todo $x\in[a,b]$ es $f'(x)=0$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **decreciente** si para todo $x\in[a,b]$ es $f'(x)<0$

\# *Ejemplo.- Como la función* $f(x)=x^4-2x^2$ *tiene por derivada* $f'(x)=4.x.(x-1).(x+1)$ *. Se cumplirá*

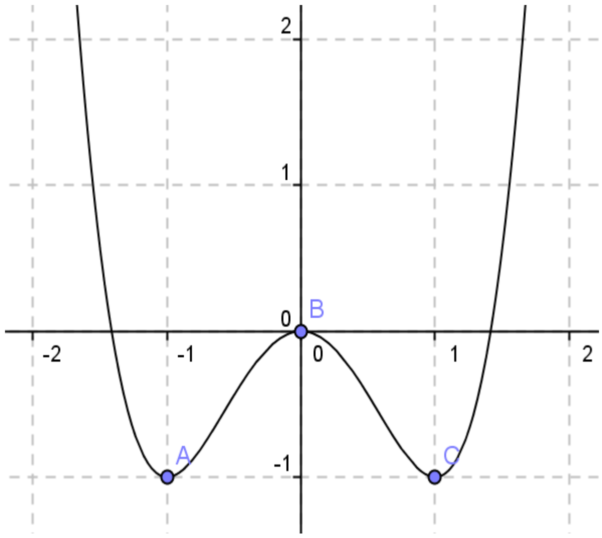
$$f'(x)<0 \; si \; x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$$

$$f'(x)>0 \; si \; x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$$

Luego, se cumplirá

$f(x)$ es decreciente $si\, x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$

$f'(x)$ es creciente $si\, x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$



2. Curvatura: concavidad y convexidad

Tasa de variación media y curvatura

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **lineal** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $TVM_{(x,h)}f(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es **constante**.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **convexa** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $TVM_{(x,h)}f(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es **creciente**.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **cóncava** si para todo $x \in [a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h \in [a,b]$ es $TVM_{(x,h)} f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es **decreciente.**

 # Ejemplo.- Como la tasa de variación media en el intervalo $[x, x+h]$ *de la función* $f(x)=x^3$ *es*

$$TVM_{(x,h)} f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3.x^2 + 3.x.h + h^2$$

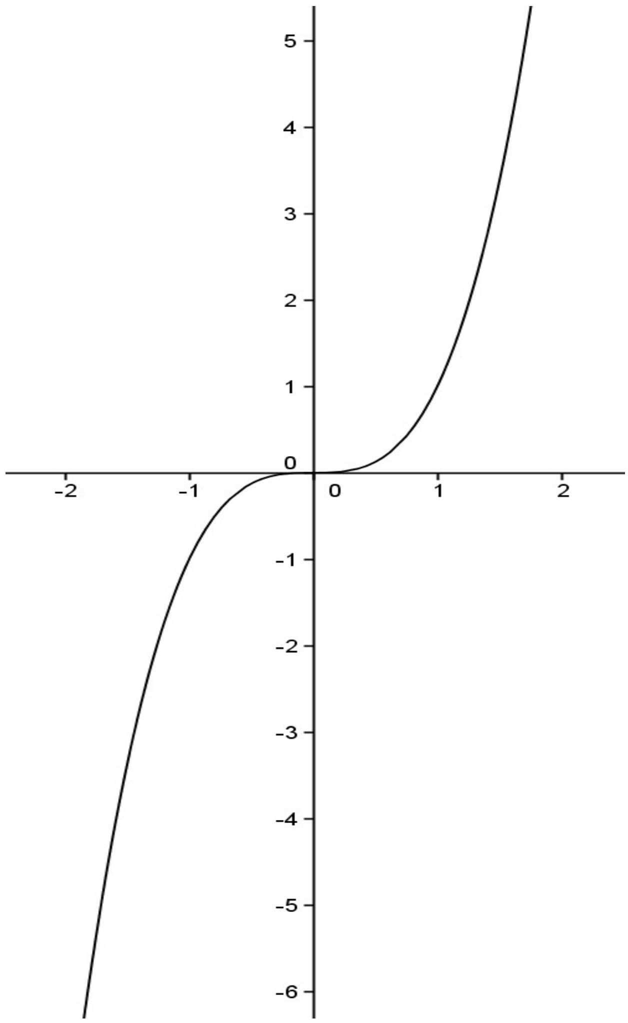
Se cumplirá

$TVM_{(x,h)} f(x)$ es decreciente *para* $x<0$

$TVM_{(x,h)} f(x)$ es creciente *para* $x>0$

La función $f(x)=x^3$ *, será*

Cóncava en $(-\infty, 0)$ *y convexa en* $(0, +\infty)$



Derivada y curvatura

Primera derivadas y curvatura

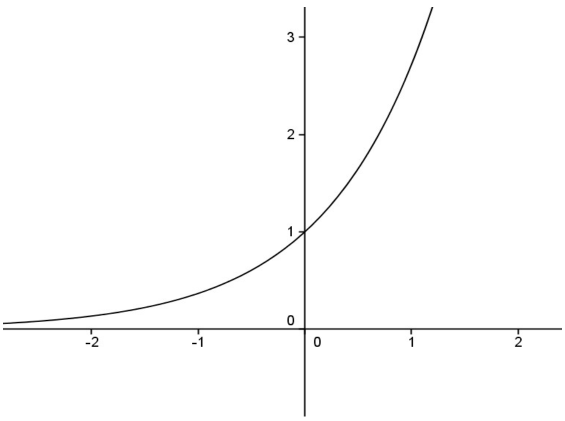
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **lineal** si para todo $x \in [a,b]$ $f'(x)$ es **constante**.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **convexa** si para todo $x \in [a,b]$ $f'(x)$ es **creciente**.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **cóncava** si para todo $x \in [a,b]$ $f'(x)$ es **decreciente.**

Segunda derivada y curvatura

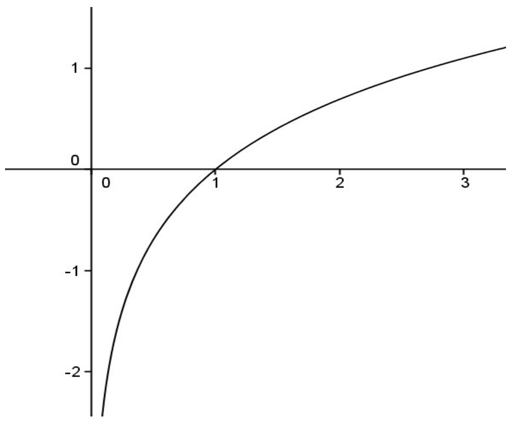
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **lineal** si para todo $x \in [a,b]$ $f''(x)=0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **convexa** si para todo $x \in [a,b]$ $f''(x)>0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **cóncava** si para todo $x \in [a,b]$ $f''(x)<0$ **.**

 # Ejemplo.- La función $f(x)=e^x$ *es convexa en todo* $\mathbb{R}$ *, ya que* $f'(x)=e^x$ *que es una función creciente en* $\mathbb{R}$ *o bien utilizando la segunda derivada* $f''(x)=e^x>0$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$ *. Mientras que la función* $f(x)=\ln x$ *es cóncava en todo* $\mathbb{R}^+$ *, ya que* $f'(x)=\frac{1}{x}$ *que es una función decreciente en* $\mathbb{R}^+$ *o bien utilizando la segunda derivada* $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}^+$

$f(x)=e^x$



$f(x)=\ln(x)$



3. Extremos relativos y puntos de inflexión

Máximos y mínimos relativos

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ y $c\in(a,b)$, decimos que el punto $P(c,f(c))$ es un **máximo relativo** de $f(x)$, si existe un entorno de c, $E(c,h)\subset[a,b]$ tal que $f(x)<f(c)$, para todo $x\in\{E(c,h)-\{c\}\}$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ y $c\in(a,b)$, decimos que el punto $P(c,f(c))$ un **mínimo relativo** de $f(x)$, si existe un entorno de c, $E(c,h)\subset[a,b]$ tal que $f(x)>f(c)$, para todo $x\in\{E(c,h)-\{c\}\}$.

Si una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ tiene puntos extremos relativos (*máximos o mínimos*), y la función $f(x)$ es derivable en el intervalo (a,b), entonces, su derivada se anula en dichos extremos relativos. Es decir

Si $P(c,f(c))$ es punto extremo de $f(x)$ ⇨ $f'(c)=0$.

El teorema reciproco no es cierto, ya que por ejemplo $f(x)=x^3$, *cumple* $f'(0)=3.0^2=0$. *Sin embargo, el punto* $P(0,f(0))=P(0,0)$ *no es ni máximo ni mínimo relativo, ya que la función es creciente, y por tanto no tiene ningún máximo, ni ningún mínimo relativo. El punto* $P(0,0)$ *es un punto de inflexión, donde la función pasa en este punto de concavidad a convexidad.*

Puntos de inflexión

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ tiene un **punto de inflexión** en $(c,f(c))$ con $c\in[a,b]$ si la función $f(x)$ cambia de curvatura en dicho punto.

Además, si una función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(c,f(c))$ y es derivable en (a,b), su segunda deriva se anula, es decir

$(c,f(c))$ es punto de inflexión ⇨ $f''(c)=0$

El teorema recíproco no es cierto en general, es decir puede ser $f''(c)$ *= 0 y no ser* $(c,f(c))$ *un punto de inflexión*

 # Ejemplo.- Para hallar los puntos de inflexión de la función $f(x)=x^4-6x^2$, *hallamos la segunda derivada* $f''(x)=12.(x^2-1)$, *que se hace cero para* $x=-1$ *y* $x=1$. *Y como*

$f''(x)>0\ para\ x<-1$ ⇨ $f(x)\ es\ convexa\ en\ (-\infty,-1)$

$f''(x)<0\ para\ -1<x<1$ ⇨ $f(x)\ es\ cóncava\ en\ (-1,1)$

$f''(x)>0\ para\ x>1$ ⇨ $f(x)\ es\ convexa\ en\ (1,+\infty)$

Los puntos $(-1,f(-1))$ *y* $(1,f(1))$ *son puntos de inflexión de* f

Para estudiar los máximos o los mínimos relativos de una función, podemos utilizar la primera derivada que nos aporta información del crecimiento o decrecimiento de la función, o la segunda derivada que nos aporta información de la concavidad o convexidad.

Es decir si $f(x)$ es una función definida y continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $c\in(a,b)$. Si $f'(c)=0$ y $E(c,h)$ es un entorno de c

- Si $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c)$ y $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c,c+h)$, $(c,f(c))$ es un **máximo relativo** de la función $f(x)$.
- Si $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c)$ y $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c,c+h)$, $(c,f(c))$ es un **mínimo relativo** de la función $f(x)$ **.**
- Si $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ o $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$, $(c,f(c))$ es un punto de **inflexión** de la función $f(x)$.
- Si $f''(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ la función $f(x)$ es convexa en un entono de $P(c,f(c))$, luego $(c,f(c))$ es un **mínimo relativo** de la función $f(x)$.
- Si $f''(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ la función $f(x)$ es cóncava en un entono de $P(c,f(c))$, luego $(c,f(c))$ es un **máximo relativo** de la función $f(x)$.

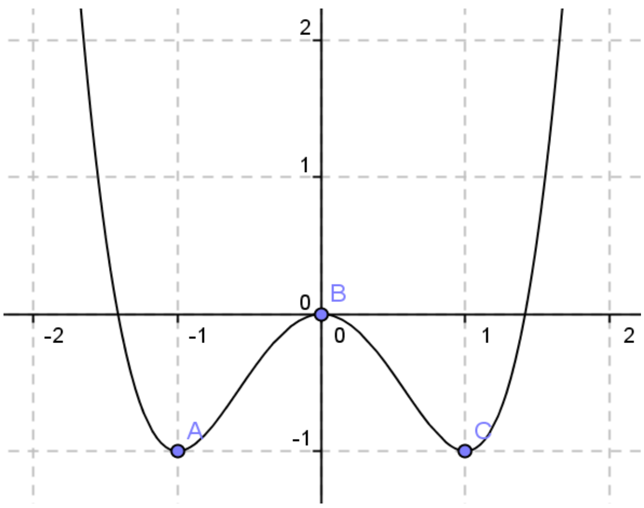
 # Ejemplo.- ¿De qué tipo son los posibles puntos extremos de $f(x)=x^4-2x^2$ *?*

Como la derivada primera es $f'(x)=4x^3-4x$ *. Los posibles puntos críticos son* $x=0, x=-1, x=1$ *. Y como la derivada segunda es* $f''(x)=12x^2-4$

Para $x=-1, f''(x)=8 \Rightarrow$ es convexa en $x=-1 \Rightarrow P(-1,-1)$ es un punto mínimo .

Para $x=0, f''(x)=-4 \Rightarrow$ es cóncava en $x=0 \Rightarrow P(0,)$ es un punto máximo .

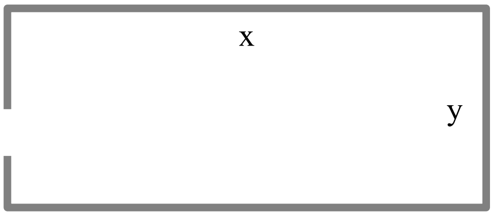
Para $x=1, f''(x)=8 \Rightarrow$ es convexa en $x=1 \Rightarrow P(1,-1)$ es un punto mínimo .



4. Problemas de optimización

Para resolver un problema de optimización, en el cual podemos utilizar una función real para interpretar el problema. Podemos hallar el óptimo del problema (*mínimo o máximo*) estudiando los extremos relativos de dicha función.

 # Ejemplo.- En una ciudad de la costa el ayuntamiento dispone de unos terrenos públicos en las afueras de la población. Se quiere construir un parque y zona de recreo de $10\,000\,m^2$ *, pero con la condición de que tenga forma rectangular, y que el coste del vallado sea mínimo. ¿Qué dimensiones tendrá que tener dicho parque, si queremos dejar 10 metros sin vallar en la zona de entrada?*



Si denominamos x e y las dimensiones en metros, del parque, debemos de hallar el mínimo valor del vallado $2.x+2.y-10$ *, sujeto a que su área sea* $x.y=10000$.

Eliminando, y de ambas ecuaciones, obtenemos la función del vallado

$$f(x)=2.x+2.\frac{10000}{x}-10=\frac{2.x^2-10.x+20000}{x} \quad , \quad 10<x<1000$$

Y teniendo en cuenta que

$$f'(x)=\frac{2x^2-20000}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{40000}{x^3}$$

Y como

$$f'(x)=0 \Rightarrow x=100$$

$$f''(100)>0$$

f(x) tendrá un mínimo relativo en $x=100$ *, por tanto el rectángulo buscado será un cuadrado de lado 100 m.*

5. Asíntotas

Una asíntonta de una función $f(x)$ es una recta a la que se acerca la función cuando x tiende a un determinado punto o también cuando x tiene al infinito. Distinguiremos tres tipos de asíntotas:

- La recta $x=a$ es una una **asíntota vertical** de la función $f(x)$ en el punto $x=a$, si se cumple cualquiera de las tres condiciones:

  1) $|\lim_{x\to a} f(x)|=\infty$ 2) $|\lim_{x\to a^-} f(x)|=+\infty$ 3) $|\lim_{x\to a^+} f(x)|=+\infty$

- La recta $y=b$ es una una **asíntota horizontal** de la función $f(x)$, si se cumple cualquiera de las dos condiciones:

  1) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=b$ 2) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=b$

- *La recta $y=mx+n$ es una una asíntota oblicua de la función $f(x)$, si se cumple cualquiera de las dos condiciones:*

  1) $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}=m$ y $\lim_{x\to -\infty} [f(x)-mx]=n$

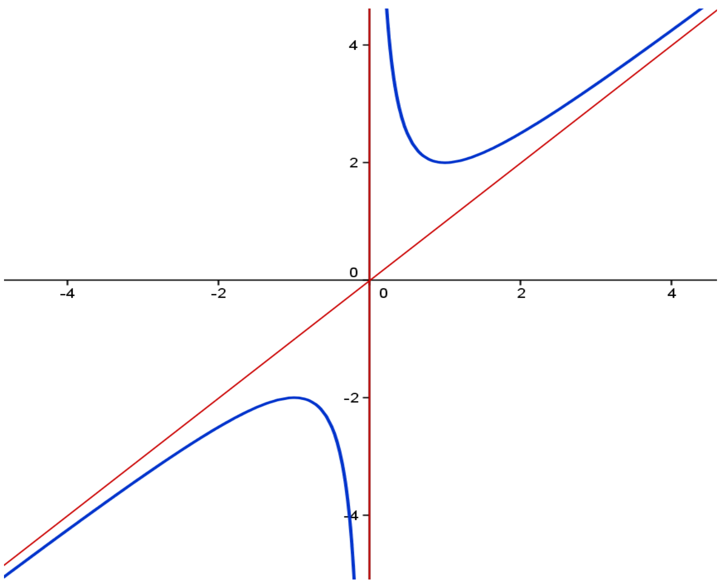
  2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=m$ y $\lim_{x\to +\infty} [f(x)-mx]=n$

 # Ejemplo.- Para determinar las asíntotas de la función $y=\frac{x^2+1}{x}$, como:

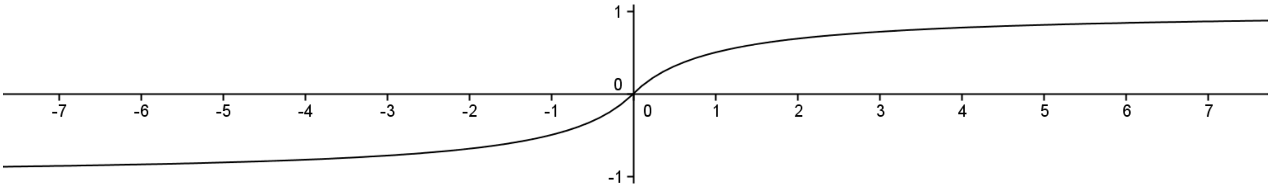
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ *y* $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ⇨ $x=0$ *es una asíntota vertical.*

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ *y* $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ ⇨ f *no tiene asíntotas horizontales.*

$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}=1$ *y* $\lim_{x\to +\infty} [f(x)-x]=0$ ⇨ $y=x$ *es asíntota oblicua de* f.

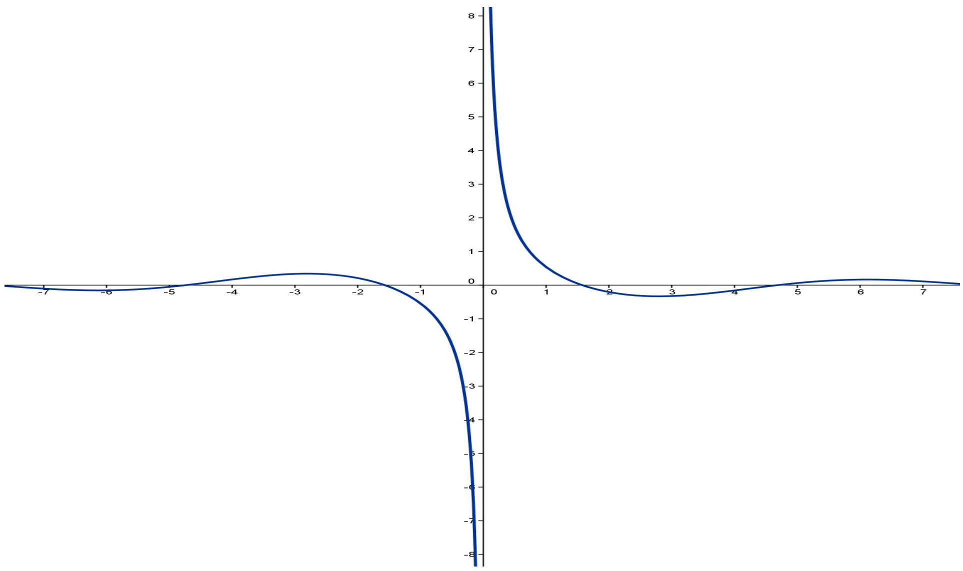


 # Ejemplo.- la función $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ *tiene por asíntotas las rectas* $y=-1$ *e* $y=+1$.

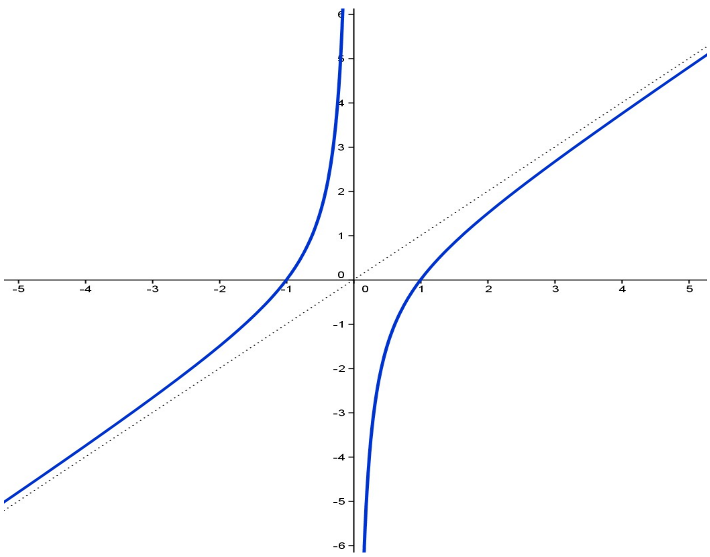


 # Ejemplo.- La función $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ *tiene una asíntota vertical en x = 0, ya que*

$$\lim_{0^-} f(x)=-\infty \quad y \quad \lim_{0^+} f(x)=+\infty$$



 # Ejemplo.- La función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ *tiene como asíntota oblicua la recta* $y=x$



6. Dominio, recorrido, puntos de corte y regiones gráficas

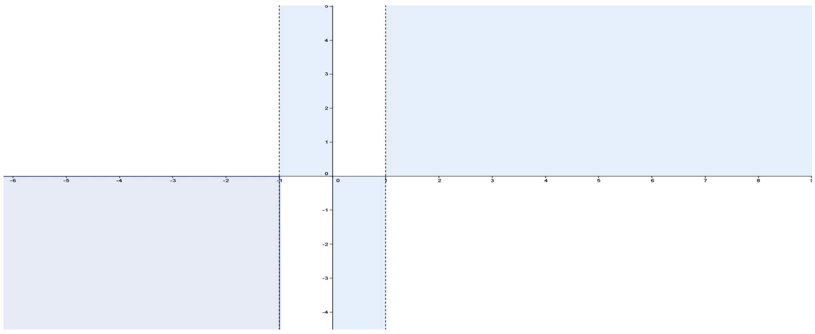
Dado que el Dominio de una función f es el subconjunto $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\text{está definido } f(x)\}$, y el recorrido es el subconjunto $\operatorname{Im}_f=\{y\in\mathbb{R}:\exists x\in\mathbb{R}\ \textit{tal que}\ f(x)=y\}$. El dominio y el recorrido de una función nos permite obtener las regiones del plano que las que existe la función

 # Ejemplo.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ *, como* $D_f=\{\mathbb{R}-\{-1,1\}\}$ *e* $\operatorname{Im}_f=\mathbb{R}$

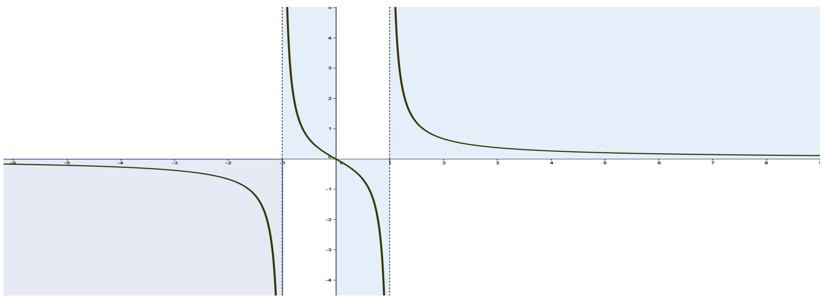
Estudiando el signo de x y de $f(x)$ *en los intervalos* $(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$

- *si* $x\in(-\infty,-1)$ ⇨ $y\in(-\infty,0)$
- *si* $x\in(-1,0)$ ⇨ $y\in(0,+\infty)$
- *si* $x\in(0,1)$ ⇨ $y\in(-\infty,0)$
- *si* $x\in(1,+\infty)$ ⇨ $y\in(0,+\infty)$

Luego, si coloreamos de azul las regiones del plano que contienen la gráfica será



Que si representamos la función comprobamos que efectivamente está dentro de esta región



<u>Puntos de corte de una función $f(x)$ con los ejes de coordenadas</u>.

- Para calcular los puntos de corte de una función $f(x)$ con el eje X , resolviendo la ecuación $f(x)=0$, si obtenemos las raíces $r_1,r_2,\ldots,r_k$, los puntos de corte serán:
  $(r_1,f(r_1)),(r_2,f(r_2)),\ldots,(r_k,f(r_k))$
- El punto de corte (*si existe*) de una función $f(x)$ con el eje Y , será $(0,f(0))$

 # Ejemplo.- Los puntos de corte de $y=x^3-x$ *con los ejes serán:* $(-1,0),(0,0),(1,0)$

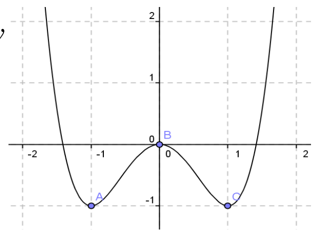
7. Simetría y periodicidad

Simetrías.

Función par. Eje de simetría x = 0.

Un función $f(x)$ es **par**, si para cualquier x se cumple $f(x)=f(-x)$.

Es decir, la gráfica de f es simétrica con respecto a eje OY (*recta x = 0*).



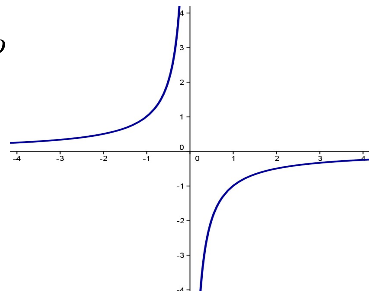
 # Ejemplo.- La función $f(x)=x^4-2x^2$ *es una función par, y por tanto simétrica, respecto de eje OY, ya que para cualquier x se cumple*

$$x^4-2x^2=f(x)=f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2$$

Función impar. Centro de simetría C(0,0).

Un función $f(x)$ es **impar**, si para cualquier x se cumple $f(x)=-f(-x)$.

Es decir, la gráfica de f es simétrica con respecto al origen de coordenadas $(0,0)$.

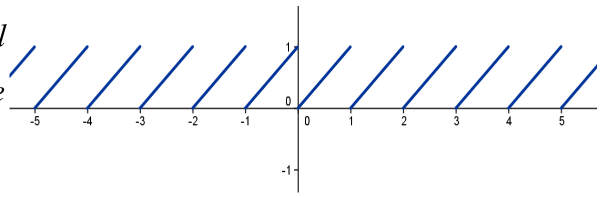


 # Ejemplo.- La función $f(x)=-\frac{1}{x}$ *es impar, y por tanto simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que*

$$-\frac{1}{(-x)}=f(-x)=-f(x)=-\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Periodicidad.

Un función $f(x)$ es **periódica**, si existe un número T, tal que para cualquier x se cumple $f(x+T)=f(x)$. Al número T se le denomina periodo de la función.



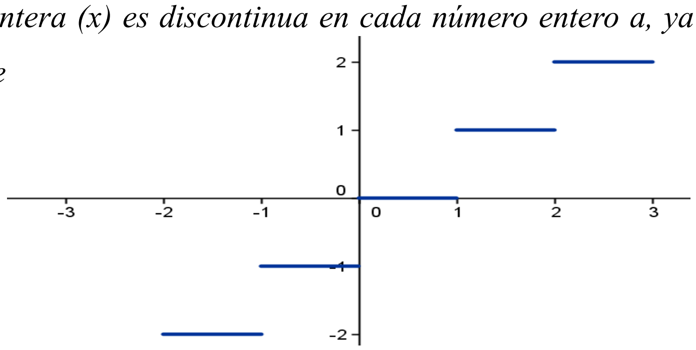
 # Ejemplo.- La función f(x) = parte decimal (x) = x – parte entera (x) es una función periódica de periodo T = 1

Puntos de discontinuidad.

Un función $f(x)$ es **discontinua** en un punto x = a, cuando se cumple alguna de las dos condiciones siguientes $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ $\lim_{x\to a^-} f(x)\neq \lim_{x\to a^-} f(x)$

 # Ejemplo.- La función f(x) = parte entera (x) es discontinua en cada número entero a, ya que si a es un número entero, se cumple

$$\lim_{a^-} f(x)=a-1\neq a=f(a)=\lim_{a^+} f(x)$$



8. Representación gráfica de funciones

Para representar una función debemos de seguir al menos el siguiente esquema

	Propiedades de $f(x)$ obtenidas directamente	**Caracterización**
1	**Dominio de** $f(x)=D_f$	Valores que puede tomar x
	Recorrido de $f(x)\mathrm{Im}_f$	Valores que puede tomar la y
	Regiones gráfica	
	a) Regiones negativa y positiva	$\{(x,f(x)):f(x)<0\}$ (*por encima de OX*) $\{(x,f(x)):f(x)>0\}$ (*por debajo de OX*)
	b) Cortes con el eje OX	$(r_1,f(r_1)),(r_2,f(r_2)),\ldots,(r_k,f(r_k))$ Con $r_1,r_2,\ldots,r_k$ raíces de la ecuación $f(x)=0$
	c) Cortes con el eje OY	$(0,f(0))$ (*si existe*)
2	**Simetrías**	
	a) Función par	$f(x)=f(-x)$ (*eje de simetría el eje OY*)
	b) Función impar	$f(x)=-f(-x)$ (*centro de simetría el origen*)
3	**Periodicidad**	$f(x+T)=f(x)$ (*T es el periodo mínimo*)
4	**Puntos de discontinuidad**	$\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ o $\lim_{x\to a^-} f(x)\neq\lim_{x\to a^+} f(x)$
5	**Ramas infinitas y asíntotas**	
	a) Ramas o asíntotas verticales $x=a$	$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \; o \; \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty \; o \; \lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$
	b) Ramas o asíntotas horizontales $y=b$	$\lim_{x\to\pm\infty}=b$
	c) Ramas o asíntotas oblicuas $y=mx+n; m,n\in\mathbb{R}, m\neq 0$	$m=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=f'(x)$ $n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-m.x)$
	Propiedades de f(x) obtenidas por las derivadas sucesivas	**Características**
6	**Monotonía**	
	a) Crecimiento	$\{x\in\mathbb{R}:f'(x)>0\}$ (*intervalos de crecimiento*)
	b) puntos críticos y extremos $(a,f(a))$ tal que	$f'(a)=0 \; y \; f''(a)>0$ (*mínimo relativo)* $f'(a)=0 \; y \; f''(a)<0$ (*máximo relativo)*
	c) Decrecimiento	$\{x\in\mathbb{R}:f'(x)<0\}$ (*intervalos de crecimiento*)
7	**Curvatura**	
	a) Convexidad	$\{x\in\mathbb{R}:f''(x)>0\}$ (*intervalos de convexidad*)
	b) Puntos de inflexión $(a,f(a))$ tal que	$f''(a)=0 \; y \; f'''(a)>0$ (*cóncavo-convexo*) $f''(a)=0 \; y \; f'''(a)<0$ (*convexo-cóncavo*)
	c) Concavidad	$\{x\in\mathbb{R}:f''(x)<0\}$ (*intervalos de concavidad*)

Construcción de funciones a partir de otra

$f(x)$ y $g(x)$ son funciones opuestas $\Leftrightarrow$ $g(x)=-f(x)\,\forall\,\in D_f \cap D_g$

 # Ejemplo.- la función $g(x)=x^3$ *es opuesta a* $f(x)=-x^3$, ya que $g(x)=-f(x)$

Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son pares entre si $\Leftrightarrow$ $g(x)=f(-x)\,\forall\,\in D_f \cap D_g$

 # Ejemplo.- $f(x)=x^3+1$ *y* $g(x)=-x^3+1$ *son pares entre sí, ya que* $g(x)=f(-x)$

Valor absoluto de una función $|f(x)|$ **y simetría horizontal (OX)**

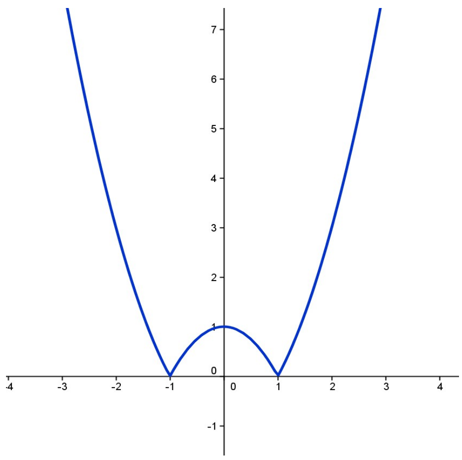
Para representar una función valor absoluto

a) Dibujamos primero la función f(x), sin el valor absoluto.

b) Los trozos de curva positiva se dejan como están.

c) Los trozos de curva negativos se sustituyen por los trozos de curva simétricos de aquellos respecto del eje OX.

 # Ejemplo.- La gráfica de la función $f(x)=|x^2-1|$ *es*



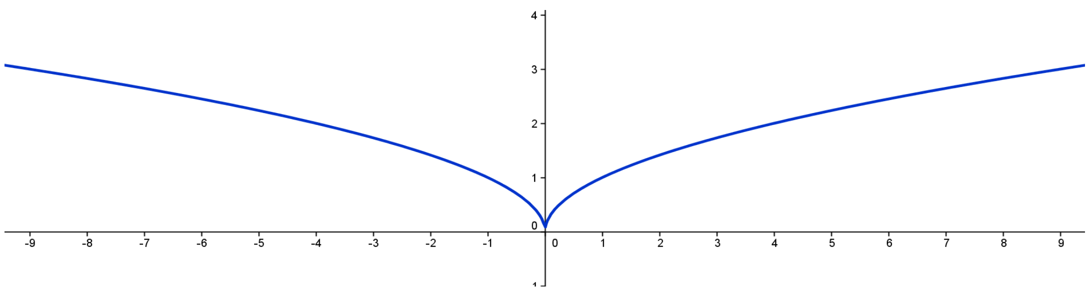
Valor absoluto de la variable $f(|x|)$ **y simetría vertical (OY)**

Para representar una función valor absoluto de la variable

a) Dibujamos primero la función f(x), sin el valor absoluto para valores de x positivos.

b) Para valores negativos de x, la gráfica es simétrica respecto del eje OY de la parte anterior dibujada.

 # Ejemplo.- La representación gráfica de la función $f(x)=\sqrt{(x)}$ *será*



Funciones recíprocas.- Dos funciones $f(x)\, y\, g(x)$ (*con* $Ima_f \subset D_g$) son recíprocas si $g(f(x))=x\, ;\, f(g(y))=y$.

La función recíproca de f(x) se de designa por $f^{-1}(x)$.

Dos funciones recíprocas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

 # Ejemplo.- $f(x)=2^x$ *y* $g(x)=\log_2 x$ *son funciones recíprocas, ya que se cumple:*

$\log_2 2^x = x$ *y* $2^{\log_2 y} = y$