Funciones: Límites y continuidad.

Límites finitos de sucesiones.

Decimos que una sucesión numérica $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tiene por límite $r \in \mathbb{R}$ y se escribe

$\lim_n a_n = r$ o de forma abreviada $a_n \to r$

cuando para cada número real $\epsilon > 0$ $\exists$ un número natural n_0 tal que $|a_n - r| < \epsilon$ para cada $n \geq n_0$

 # Ejemplo.- La sucesión de término general $a_n = \frac{2n}{n+1}$ *tiene por límite 2, ya que para cada número real* $\epsilon > 0$ $\exists$ *un número natural* n_0 *tal que* $|a_n - r| < \epsilon$ *para cada* $n \geq n_0$

Por ejemplo, si tomamos $\epsilon = 0{,}001$ *, resolviendo la inecuación*

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{2}{\epsilon + 1} = 1999$$

Luego, para cualquier n > 1999 se cumple la desigualdad $|a_n - r| < 0{,}001$

En la mayoría de las sucesiones de límites finitos, de forma intuitiva podemos calcular el límite de una sucesión estudiando su comportamiento mediante una tabla de valores.

 # Ejemplo, en la sucesión dada en el ejemplo, se cumplirá

n	***1***	***10***	***100***	***10 000***	***1 000 000***	**…**	→	$+\infty$
$a_n = \frac{2n}{n+1}$	***1***	***1,8181...***	***1,9802 …***	***1,9998 ...***	***1,9999...***	**.. .**	→	***2***

 # Ejemplo.- El límite de la sucesión $c_n = \frac{3}{n^2+4} = 0$ *, para ello basta con que hagamos una tabla de valores, de la cual se deduce que* $\lim_n c_n = 0$

n	***1***	***10***	***100***	***10 000***	***1 000 000***	**…**	→	$+\infty$
$c_n = \frac{2n}{n+1}$	***0,6***	***0,0288 …***	***0,0003 …***	***0,000 ...***	***0,000 ...***	**.. .**	→	***0***

Si a_n y b_n son dos sucesiones de números reales tal que $\lim_n a_n = P$ y $\lim_n b_n = Q$, entonces se cumplen las siguientes propiedades aritméticas de los límites:

- $lím_n (a_n + b_n) = P + Q$
- $lím_n (a_n - b_n) = P - Q$
- $lím_n (a_n . b_n) = P . Q$

- $Si\, Q \neq 0\, ;\, lím_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{P}{Q}$

Para el cálculo de límites de muchas sucesiones son útiles las propiedades aritméticas de los límites, que el el caso de que el término general sea una fracción algebraica de variable n, es decir de la forma $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ ($P\, y\, Q\, polinomios$), dividiendo el numerador y el denominador por n^h ($h = mínimo(grado\, P\, ,\, grado\, Q)$)

 # Ejemplo.- Para calcular el límite de la sucesión $a_n = \frac{4n^2+n-1}{n^2+1}$ *, si dividimos por* n^2 *, el numerador y el denominador del término de la sucesión, utilizando las propiedades expuestas anteriormente, tenemos*

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{4n^2+n-1}{n^2+1} = \lim_n \frac{4\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_n 4 + \lim_n \frac{1}{n} - \lim_n \frac{1}{n^2}}{\lim_n 1 + \lim_n \frac{1}{n^2}} = \frac{4+0+0}{1+0} = 4$$

Limites más y menos infinitos de una sucesión

El límite de una sucesión, también puede ser $+\infty$ y $-\infty$, mediante la siguiente definición

- Decimos que una sucesión numérica $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tiene por límite $+\infty$ y se escribe

  $\lim_n a_n = +\infty$ o de forma abreviada $a_n \rightarrow +\infty$

  cuando para cada número real positivo K $\exists$ un número natural n_0 tal que $a_n > K$ para cada $n \geq n_0$

- Decimos que una sucesión numérica $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ tiene por límite $-\infty$ y se escribe

  $\lim_n a_n = -\infty$ o de forma abreviada $a_n \rightarrow -\infty$

  cuando para cada número real positivo K $\exists$ un número natural n_0 tal que $a_n < K$ para cada $n \geq n_0$

Sin embargo, como sucede con las sucesiones de límites finitos, en la mayoría de las sucesiones de límites infinitos, de forma intuitiva podemos calcular el límite de una sucesión estudiando su comportamiento mediante una tabla de valores.

También, para el cálculo de límites son útiles las propiedades aritméticas de los límites.

 # Ejemplo.- El límite de la sucesión $a_n = 5 . n^2 = +\infty$ *, para ello basta con que hagamos una tabla de valores, de la cual se deduce que* $\lim_n a_n = 0$

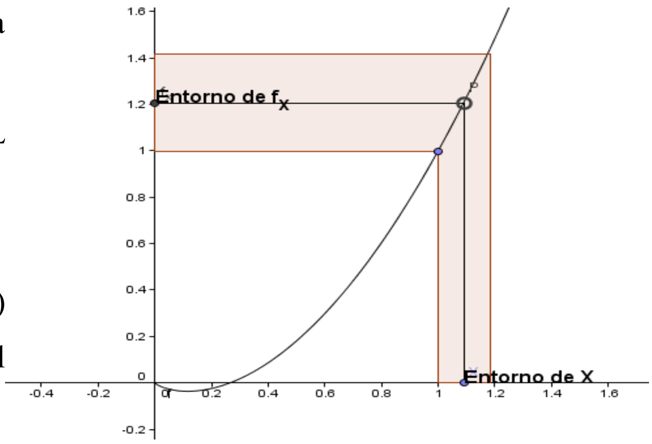
n	***1***	***100***	***10000***	***100000***	***100000000***	**…**	$\rightarrow$	$+\infty$
$a_n = 5 . n^2$	***5***	***50000***	5.10^8	5.10^{12}	5.10^{16}	**.. .**	$\rightarrow$	$+\infty$

 # Ejemplo.- Para calcular el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{-4n^3 + n - 1}{n^2 + 1}$ *, si dividimos por* n^2 *, el numerador, tenemos*

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{-4n^3 + n - 1}{n^2 + 1} = \lim_n \frac{-4\dfrac{n^3}{n^2} + \dfrac{n}{n^2} - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}} = \frac{\lim_n -4n + \lim_n \dfrac{1}{n} - \lim_n \dfrac{1}{n^2}}{\lim_n 1 + \lim_n \dfrac{1}{n^2}} = -\infty$$

Límites finitos para un valor finito de una función

Si I es un intervalo de la recta real, tal que ni $-\infty$ ni $+\infty$ sean extremos de I, c es un punto del intervalo I (*o de sus extremos*) y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real.



Decimos que el límite de $f(x)$ tiene a L (*finito*), cuando x tiende c, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

si para cualquier intervalo abierto (*entorno*) $H \subset f(I)$, existe un intervalo (*entorno*) $J \subset I$, tal $\forall x \in I , f(x) \in f(I)$

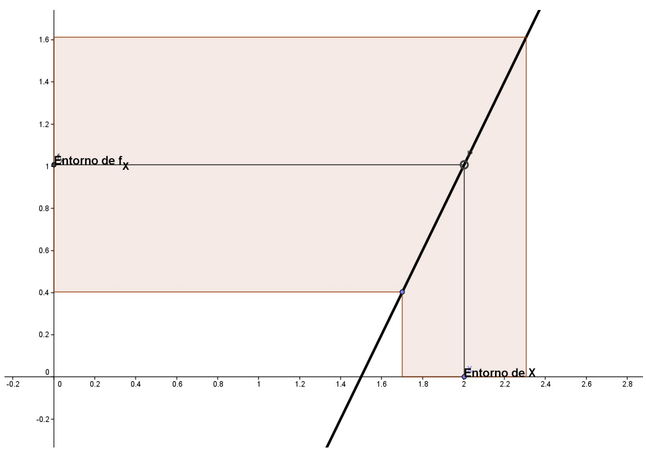
➪ **Utilizando notación matemática:**

$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ **cuando** $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ **tal que:** $|f(x) - L| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x - c| < \delta$

 # Ejemplo.- Si $f(x) = 2.x - 3$ *se cumple que* $\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 3 = 1$ *puesto* $\forall \epsilon > 0$ *tal que* $|f(x) - 1| = |(2x - 3) - 1| = |2x - 4| < \epsilon$ *, como se cumplirá* $-2x + 4 < \epsilon$ *y* $2x - 4 < \epsilon$ *será*

$$-\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + 2 < x < \left(\frac{\epsilon}{2}\right) + 2 \quad \Rightarrow$$

$$|x - 2| < \left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \delta$$



Luego, si tomamos $\delta = \left(\dfrac{\epsilon}{2}\right)$ *, se cumple la definición.*

Sin embargo, en muchas ocasiones de forma intuitiva (*dando valores a x cercanos al punto c*) podemos deducir el $\lim_{x\to c} f(x)$

 # Ejemplo.- El $\lim_{x\to 2} x^2=4$ *, ya que, para ello basta con que hagamos una tabla de valores y tomemos valores de x próximos a 2 (por la izquierda y por la derecha) de la cual se deduce dicho límite*

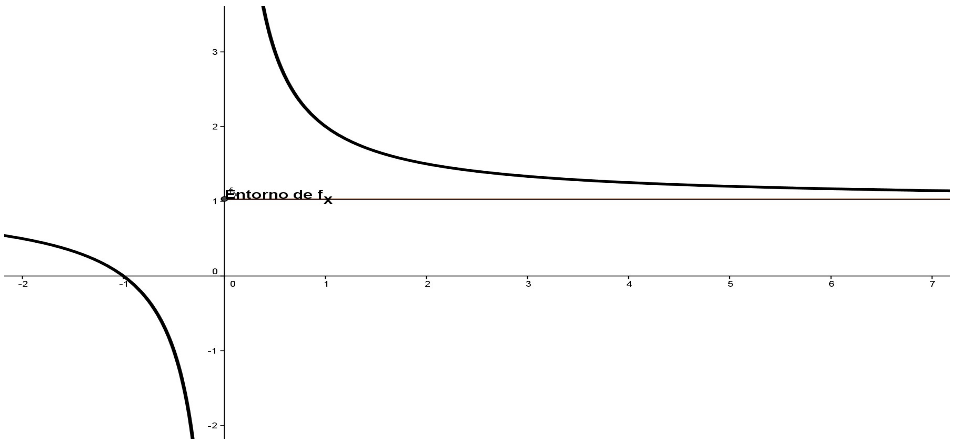
x	***1***	***1,9***	***1,99***	***1,999***	***1,999***	**…**	$\to$	***2***
x^2	***1***	***3,61***	***3,9601***	***3,996001***	***3,9996001***	**.. .**	$\to$	***4***
x	***3***	***2,1***	***2,01***	***2,001***	***2,0001***	**…**	$\to$	***2***
x^2	***9***	***4,41***	***4,0401***	***4,004001***	***4,00040001***	**.. .**	$\to$	***4***

☞ La definición de límite se puede extender al infinito, si tomamos $x\to-\infty$ ó $x\to+\infty$ o si tomamos $L=-\infty$ ó $L=+\infty$, y teniendo en cuenta que en el infinito los intervalos son de la forma $(-\infty, r)$ o $(r, +\infty)$, podemos definir de forma general $\lim_{x\to c} f(x)=L$ tal y como se resume en la siguiente tabla

$\lim_{x\to c} f(x)=L$	$L=-\infty$	$L\in\mathbb{R}$	$L=+\infty$
$c=-\infty$	$\forall\, t\in\mathbb{R}, \exists s\in\mathbb{R}\ /$ $f(x)<t \quad \Leftarrow x<s$	$\forall\, \epsilon>0, \exists s\in\mathbb{R}\ /$ $\lvert f(x)-L\rvert<\epsilon \quad \Leftarrow x<s$	$\forall\, t\in\mathbb{R}, \exists s\in\mathbb{R}\ /$ $f(x)>t \quad \Leftarrow x<s$
$c\in\mathbb{R}$	$\forall\, t\in\mathbb{R}, \exists\delta>0\ /$ $f(x)<t \quad \Rightarrow\lvert x-c\rvert<\delta$	$\forall\, \epsilon>0, \exists\delta>0\ /$ $\lvert f(x)-L\rvert<\epsilon \quad \Rightarrow\lvert x-c\rvert<\delta$	$\forall\, t\in\mathbb{R}, \exists\delta>0\ /$ $f(x)>t \quad \Rightarrow\lvert x-c\rvert<\delta$
$c=+\infty$	$\forall\, t\in\mathbb{R}, \exists s\in\mathbb{R}\ /$ $f(x)<t \quad \Leftarrow x>s$	$\forall\, \epsilon>0, \exists s\in\mathbb{R}\ /$ $\lvert f(x)-L\rvert<\epsilon \quad \Leftarrow x>s$	$\forall\, t\in\mathbb{R}, \exists s\in\mathbb{R}\ /$ $f(x)>t \quad \Leftarrow x>s$

 # Ejemplo.- La función $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ *tiene* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ *, puesto que* $\forall\,\epsilon>0$

tal que $\lvert f(x)-1\rvert=\left\lvert\dfrac{x+1}{x}-1\right\rvert=\left\lvert\dfrac{1}{x}\right\rvert<\epsilon$ *, será* $\dfrac{1}{x}<\epsilon \Leftarrow x>\dfrac{1}{\epsilon}=s$ *. Luego, si tomamos* $s=\dfrac{1}{\epsilon}$ *se cumple la definición.*



Sin embargo, al igual que pasa con los límites finitos, en muchas ocasiones de forma intuitiva podemos deducir el $\lim_{x\to c} f(x)$

 # Ejemplo.- El $\lim_{x\to -\infty} x^2=+\infty$ *, ya que si tomamos una tabla de valores y observamos su comportamiento cuando* $x\to -\infty$

x	-10^0	-10^1	-10^3	-10^4	-10^5	**...**	→	$-\infty$
x^2	10^0	10^2	10^6	10^8	10^5	**...**	→	$+\infty$

Luego, $\lim_{x\to -\infty} x^2=+\infty$

☞ *Otra posible definición, utilizando sucesiones es la siguiente*

Una función $f(x)$ *tiene por límite L en* $x=u$ *, si para toda sucesión de valores* $x_n\neq u$ *, del dominio de* f *, que tenga por límite u, la sucesión de los valores correspondientes* $f(x_n)$ *tiene por límite L.*

Teniendo en cuenta que u puede ser un número real, $-\infty$ *o* $+\infty$ *, y también puede ser L un número real,* $-\infty$ *o* $+\infty$ *.*

Esta última definición, la podemos utilizar para calcular los límites laterales de $f(x)$ en un punto c, cuando nos aproximamos a c por la izquierda y por la derechas respectivamente, y que denominamos

$$\lim_{x\to c^-} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x)$$

 # Ejemplo.- Dada la función $f(x)=x^2$ *, para calcular los límites laterales en* $x=2$ *, podemos definir las sucesiones que tienden a 2, por la izquierda y derecha respectivamente dadas por*

1,9; 1,99; 1,999; 1,9999; ...

2,1; 2,01; 2,001; 2, 0001; ...

Y podemos obtener

Límite por la izquierda								Límite por la derecha				
x	**1,90000**	**1,99000**	**1,99900**	**1,99990**	**...**		**x**	**2,10000**	**2,11000**	**2,11100**	**2,11110**	**...**
f(x)	$1{,}9^2$	$1{,}99^2$	$1{,}999^2$	$1{,}9999^2$	**...**		**f(x)**	$1{,}9^2$	$1{,}99^2$	$1{,}999^2$	$1{,}9999^2$	**...**

Que se observa que en ambos caso f(x) tiende a 4, cuando x tiende a 2

☞ Si $L=\lim_{x\to c} f(x)$, se cumple $\lim_{x\to c^-} f(x)=L=\lim_{x\to c^+} f(x)$.

Luego, este resultado lo podemos utilizar para ver que una función f, no tiene límite en un punto c, si encontramos dos límites laterales distintos.

Límites indeterminados.

Decimos que $\lim_{x\to c} f(x)$ es un límite indeterminado, si al intentar calcular el límite como operación o composición de límites obtenemos en términos de límites expresiones de la forma

$$\frac{0}{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; 0.\infty \;;\; \infty-\infty \;;\; 1^{\infty} \;;\; \infty^{0} \;;\; 0^{0}$$

En el caso de límites indeterminados si existen, no se pueden calcular directamente, si no que se debe de transformar la expresión previamente.

 # Ejemplo.- ¿Para que valores el límite de la función $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ *es un límite indeterminado?. Calcula* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

El límite es indeterminado para los valores en los que se anula el denominador, es decir para $x=-1$ *y* $x=1$ *, ya que en estos casos se obtiene un límite de la forma* $\dfrac{0}{0}$ *, por ser*

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^4-1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1^4-1}{1^2-1}=\frac{0}{0}$$

Sin embargo, a pesar de ser $\lim_{x\to 1} f(x)$ *para x = 1 un límite indeterminado, como*

$$\frac{x^4-1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1).(x^2+1)}{x^2-1}=x^2+1$$

Se cumple

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1} x^2+1=1^2+1=2$$

Límites polinomios, funciones racionales y funciones irracionales

☞ En el caso de los polinomios de la forma $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_a x+a_0$ para cualquier $c\in\mathbb{R}$, se cumple

$$\lim_{x\to c} P(x)=a_n c^n+a_{n-1}c^{n-1}+...+a_a c+a_0$$

Si $a_n>0$, se cumplirá

$$\lim_{x\to -\infty} P(x)=\begin{Bmatrix}-\infty\, si\, n\, es\, impar\\ +\infty\, si\, n\, es\, par\end{Bmatrix} \qquad \lim_{x\to +\infty} P(x)=+\infty$$

Si $a_n<0$, se cumplirá

$$\lim_{x\to -\infty} P(x)=\begin{Bmatrix}+\infty\, si\, n\, es\, impar\\ -\infty\, si\, n\, es\, par\end{Bmatrix} \qquad \lim_{x\to +\infty} P(x)=-\infty$$

 # Ejemplo.- $\lim_{x\to -1} 2x^3 - x + 1 = 2(-1)^3 - (-1) + 1 = 0$

☞ En el caso de fracciones algebraicas de la forma $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ con P(x) y Q(x) dos polinomios de grado m y n respectivamente.

Los puntos en los que se anule el denominador, serán puntos en los que no existe el límite o puntos de indeterminación del límite, salvo que la fracción se pueda simplificar y se pueda calcular el límite. Y en el caso de límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, dividiendo el numerador y denominador por $x^{min(m,n)}$ posiblemente (aplicando las propiedades algebraicas de los límites) desaparecerá la indeterminación.

 # Ejemplos.-

- *Como* $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ *es de la forma* $\frac{1}{0}$.

  Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ *y* $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ *, no existe*

  $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

- *Como* $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$ *es de la forma* $\frac{0}{0}$ *, pero como*

  $\frac{x^4-1}{x^2-1} = \frac{(x^2-1).(x^2+1)}{x^2-1} = x^2+1$ *, se cumple* $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2+1 = 1^2+1 = 2$

- *Como* $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{4x^2+x-1}{x^2+1}$ *es de la forma* $\frac{+\infty}{+\infty}$ *, dividiendo el numerador y el denominador por* x^2 *, se cumple*

  $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = 4$$

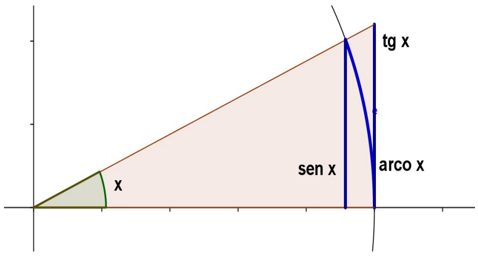
☞ En el caso de funciones irracionales la forma $f(x)=\sqrt{P(x)}$ con P(x) un polinomio, las indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ o $\infty - \infty$, se suele multiplicar por la expresión radical conjugada, y en ocasiones desaparece la indeterminación.Y en el caso de límites de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, en funciones de la forma $f(x)=\frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$ con $grado\, P = m$ y $grado\, Q = n$, dividiendo el numerador y denominador por $x^{min\left(\frac{m}{2,},n\right)}$ posiblemente (aplicando las propiedades algebraicas de los límites) desaparecerá la indeterminación.

 # Ejemplo.- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}{\frac{x}{x}}=1$

Funciones equivalentes. Límites de funciones trigonométricas.

Teniendo en cuenta que las funciones trigonométricas son periódicas, expondremos algunos ejemplos de límites de funciones trigonométricas que nos pueden ser útiles para el cálculo de otros límites o de funciones derivadas

 # Ejemplo.- $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$ *, ya que teniendo en cuenta que en un entorno de 0, se cumple (ver figura)* $sen\,x<x<tg\,x$ ⇨ $1<\frac{x}{sen\,x}<\frac{tg\,x}{sen\,x}$ ⇨ $1>\frac{sen\,x}{x}>\cos x$



Y teniendo en cuenta que

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

Se cumplirá

$$\lim_{x\to 0}1>\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}>\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$$

Diremos que dos funciones $f(x)$ y g(x) son equivalentes en un punto $x=u$ si $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

 # Ejemplos.-

- $sen\,x$ *y* x *son equivalentes en x = 0, ya que* $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1$
- *Utilizando las funciones equivalentes en un punto podemos resolver algunas indeterminaciones, pues por ejemplo como* $sen\,6x$ *y* $6x$ *son funciones equivalentes en x =0, se cumplirá* $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,6x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{6x}=6$

 # Ejemplo.-

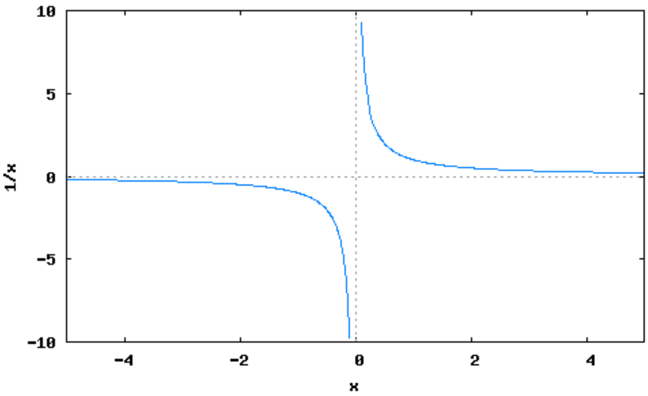
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\,sen\left(\frac{x}{2}\right)sen\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\frac{\lim_{x\to 0}x}{2}=0$$

Continuidad en un punto

Decimos que la función $f(x)$ es continua en un punto c, cuando existe $\lim_{x\to c} f(x)$ y se cumple $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=\frac{1}{x}$ *, no es continua en* $x=0$ *, ya que en este punto ni está definido* $f(0)$ *, ni existe el límite.*



Continuidad lateral. Continuidad en un intervalo.

Continuidad lateral.

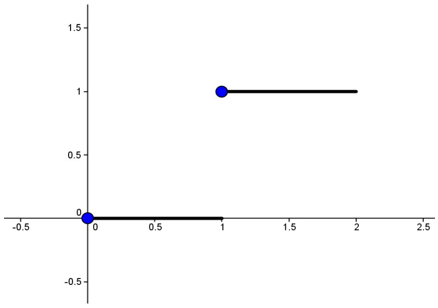
Decimos que la función $f(x)$ es continua por la izquierda en el punto c, cuando existe $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y se cumple . $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$

Decimos que la función $f(x)$ es continua por la derecha en el punto c, cuando existe $\lim_{x\to c^+} f(x)$ y se cumple . $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$

 # Ejemplo.- La función $f(x)=[x]$ *(parte entera de x), es continua por la derecha en* $x=1$ *, pero discontinua por la izquierda, ya*

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0\neq f(1)=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1$$

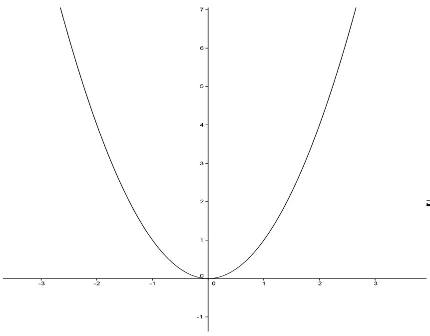


Continuidad en un intervalo.

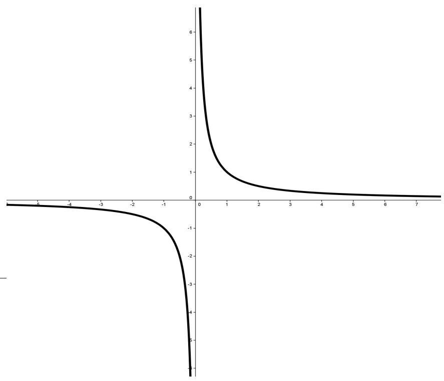
Decimos que la función $f(x)$ es continua en un intervalo (a,b) si lo es en cada uno de sus puntos. Y decimos que la función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ si lo es en cada uno de sus puntos de (a,b), y además, es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

 # Ejemplo.- Si observamos las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=[x]$ *, vemos que* $f(x)$ *es continua en cualquier intervalo real,* $g(x)$ *no es continua en* $[-1,1]$ *, ya que* $g(x)$ *no está definida en* $x=0$ *, y la función* $h(x)$ *tampoco es continua en el intervalo* $[0,2]$ *, puesto que es discontinua en* $x=1$.

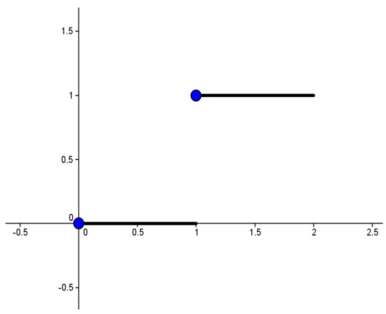
$f(x)$



$g(x)$



$h(x)$



Discontinuidades.

Teniendo en cuenta, que si una función $f(x)$ está definida en el entorno simétrico de un punto c, entonces $f(x)$ es continua en $x=c$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$. Una función es discontinua en un punto $x=c$ cuando se cumple una de las dos condiciones siguientes

$$\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c) \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to c^-} f(x)\neq \lim_{x\to c^+} f(x)$$

Discontinuidad evitable.

Decimos que la función $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x=c$, cuando existe $\lim_{x\to c} f(x)$ y $\lim_{x\to c} f(x)\neq f(c)$.

Al valor $\lim_{x\to c} f(x)$, lo denominamos valor verdadero de la función en $x=c$.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\neq 0 \\ 1 & si\ x=0 \end{cases}$ *tiene una discontinuidad evitable en* $x=0$ *, de valor verdadero* $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

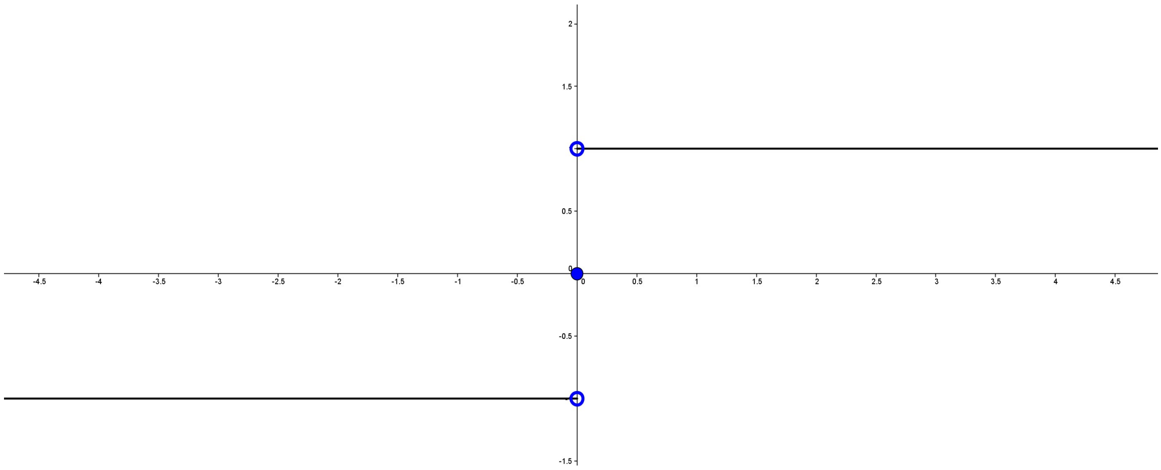
Discontinuidad inevitable.

Decimos que la función $f(x)$ tiene una discontinuidad inevitable en $x=c$, cuando existen $\lim_{x\to c^-} f(x); \lim_{x\to c^+} f(x)$ y se cumple $\lim_{x\to c^-} f(x)\neq \lim_{x\to c^+} f(x)$. Al valor

$$\left|\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)\right|$$

se le denomina salto de la función $f(x)$ en el punto $x=c$, y puede ser finito o infinito.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x=0 \\ -1 & si \quad x<0 \end{cases}$ *es una función de discontinuidad inevitable en* $x=0$ *. El salto de la función en* $x=0$ *es 2.*



 # Ejemplo.- La función es $f(x)=\dfrac{1}{x}$ *es una función de discontinuidad inevitable en* $x=0$*. El salto de la función* $x=0$ *es* ∞ *.*