5 Různé zápisy soustavy lineárních rovnic

Příklad 28. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12. \end{aligned}$$

i) Přímý zápis

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= 12. \end{aligned}$$

ii) Zápis formou rozšířené matice soustavy

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

Obecně: $\overline{A} = \left[\, A \,\middle|\, B \,\right]$, kde A je matice soustavy a B je matice (sloupcový vektor) pravých stran.

iii) Zápis užitím násobení matic

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Obecně: $A \cdot X = B$, kde X je matice (sloupcový vektor) neznámých.

iv) Zápis jako lineární kombinace sloupcových vektorů matice A

$$x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Lineární kombinací vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ rozumíme výraz (vektor)

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n,$$

kde $k_1, k_2, ..., k_n$ jsou reálná čísla, kterým říkáme **koeficienty** lineární kombinace.

Příklad 29. *Jsou dány vektory* $\vec{a} = (1, 2, 5)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3)$, $\vec{c} = (4, 1, 1)$. *Určete vektor*

$$5\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c},$$

který je jejich lineární kombinací.

6 Gaussova eliminace

Příklad 30. *Řešte v R^3 soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$$

Řešení:

Metoda sčítací	**Metoda maticová**
Soustavu převedeme na trojúhelníkový tvar:	Použijeme Gaussovu eliminaci:
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 6y + z &= 7 \\ x + y + 4z &= 3 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2y - z &= 3 \\ -y + 3z &= 1 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ 2y - z &= 3 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ 5z &= 5 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$
$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y + 3z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$
$[x, y, z] = [-3, 2, 1]$	*Gaussův tvar matice*

6.1 Gaussova eliminační metoda

Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých můžeme řešit uplatněním tzv. *Gaussovy eliminační metody* na její rozšířenou matici. Je založena na vytváření posloupnosti navzájem ekvivalentních matic (tj. jim odpovídající soustavy mají stejná řešení), která končí maticí v tzv. Gaussově tvaru. K tomu používáme následující ekvivalentní úpravy matic.

Ekvivalentní úpravy matic

1) Vzájemné prohození dvojice řádků matice.

2) Vynásobení řádku matice nenulovou konstantou (reálným číslem).

3) Přičtení (odečtení) násobku řádku matice k jinému řádku.

4) Odstranění nulového řádku.

Cílem postupného provádění těchto ekvivalentních úprav je:

Matice v Gaussově tvaru

- matice, u které na každém řádku přibyde zleva alespoň jedna nula oproti řádku předchozímu.

Příklady matic v Gaussově tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Příklady matic, které nejsou v Gaussově tvaru:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ekvivalentní matice

Dvě matice, z nichž jedna vznikla z druhé výše uvedenými úpravami, nazýváme ekvivalentní. Soustavy rovnic, příslušné těmto dvěma maticím, mají stejná řešení. Ekvivalenci matic A, B značíme takto:

$$A \sim B.$$

6.2 Gauss-Jordanova eliminační metoda

Příklad 31. *Řešte soustavu lineárních rovnic:*

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 11 & -1 & 10 \end{array}\right] \sim .$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 120 & 120 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim .$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Pokud pokračujeme v ekvivalentních úpravách i po dosažení Gaussova tvaru, s cílem dostat nuly i nad hlavní diagonálou a v hlavní diagonále samé jedničky, provádíme tzv. **Gauss-Jordanovu eliminaci**. Tu lze použít k řešení soustavy, která má právě jedno řešení (jedná se o tzv. *regulární* matici). Toto řešení (v našem příkladě uspořádanou trojici hodnot $[x, y, z] = [3, 1, 1]$) najdeme v posledním sloupečku matice v **Gauss-Jordanově tvaru** (viz červeně zvýrazněné hodnoty).