SPA1 : Fonctions exponentielles de base *e*

Connaissance travaillée	Non acquise	En cours d'acquisition	Acquise
Utiliser les propriétés algébriques de l'exponentielle pour transformer des expressions.			
Étudier les variations de fonctions somme, produit ou quotient de fonctions exponentielles (du type $x \mapsto e^{kx}$ pour k réel) et de fonctions polynômes.			
Déterminer les limites en - ∞ et en + ∞ de fonctions somme, produit ou quotient de– fonctions exponentielles et de fonctions polynômes.			

I/ Définition et caractéristiques de la fonction.

1) Le nombre *e* :

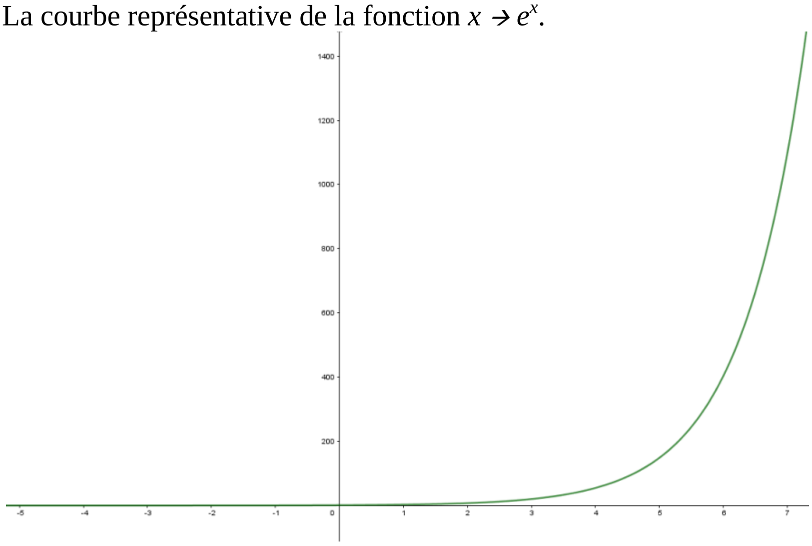
Le nombre e a été calculé afin de répondre à des caractéristiques mathématiques particulières. En effet la valeur de ce nombre permet qu'en tout point de la courbe, la fonction définie par $f(x) = e^x$ est égale à sa dérivée et à sa primitive.
Par le calcul les mathématiciens ont réussis à obtenir une valeur approchée très précise de ce nombre. Nous retiendrons que :
$e \approx 2,718$
Sur la calculatrice il s'obtient avec les touches :


pour avoir *e* ou


pour avoir *e* suivit d'une puissance.

2) Caractéristiques de la fonction.

La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow e^x$.



On admettra que cette fonction est :
- Définie sur R.
- Strictement croissante.
- Positive.
- Passe par le point de coordonnées *(0 ; 1)*

Nous admettrons aussi les résultats suivants :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Enfin nous avons vu dans les conditions qui ont permis de calculer *e* que en tout point de la courbe la valeur de la fonction est égale à sa dérivée et à sa primitive. Donc si :
$f(x) = e^x$ alors $f'(x) = e^x$.

Nous noterons que la fonction exponentielle étant une fonction similaire à celles étudiées précédemment, les formules algébriques de simplifications des puissances fonctionnent de la même manière.

II/ Etudier les variations des fonctions exponentielles.

1) Formules de dérivation :

Nous retiendrons les formules suivantes :

Fonction	**Dérivée**
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{-x}$	$f'(x) = - e^{-x}$
$f(x) = e^{kx}$ avec k e R.	$f'(x) = k\, e^{kx}$

Exemples :

$f(x) = e^{2x}$
Ici $k = 2$ donc :
$f'(x) = 2\, e^{2x}$

$g(x) = e^{12x}$
Ici $k = 12$ donc :
$g'(x) = 12\, e^{12x}$

$h(x) = e^{-7x}$
Ici $k = -7$ donc :
$h'(x) = -7e^{-7x}$

$i(x) = -3e^{-5x}$
Ici $k = -5$ donc :
$i'(x) = -3 \times -5e^{-5x} = 15e^{-5x}$

2) Etudier des fonctions avec des exponentielles :

Lors d'une étude de fonction comprenant des exponentielles, certaines techniques pourront aider à étudier le signe de la dérivée. On devra souvent factoriser par l'exponentielle et se souvenir qu'une exponentielle est toujours positive. Nous ne devrons pas non plus oublier les formules de dérivation de produit et de quotient de fonction vues en classe de première :
$(u(x) \times v(x))' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$$

Exemples :

Etudier les variations de la fonction définie sur R par :
$f(x) = e^x + 3x$
$f'(x) = e^x + 3$
Signe de $f'(x)$:
On sait que $3 > 0$ et $e^x > 0$. Donc $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante.

Etudier les variations de la fonction définie sur R par :
$f(x) = e^x(3x - 9)$
On reconnait ici un produit de fonction du type $u \times v$. Avec :

$u(x) = e^x$
$u'(x) = e^x$

$v(x) = (3x - 9)$
$v'(x) = 3$

Donc :
$f'(x) = e^x \times (3x - 9) + e^x \times 3 = e^x(3x - 9 + 3) = e^x(3x - 6)$
Signe de $f'(x)$:
On sait que $e^x > 0$

$3x - 6 > 0$
$3x > 6$
$x > 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
e^x		$+$	$+$	$+$	
$(3x-6)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Donc on en déduit que f est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ puis croissante sur $[2 ; +\infty[$.

Etudier les variations de la fonction définie sur $]4 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(-5x + 20)}$$
On reconnait ici un quotient de fonctions du type $\frac{u}{v}$ avec :

$u(x) = e^{2x}$
Ici $k = 2$ donc $u'(x) = 2e^{2x}$

$v(x) = (-5x + 20)$
$v'(x) = (-5)$

Donc :
$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \times (-5x + 20) - e^{2x} \times (-5)}{(-5x + 20)^2} = \frac{e^{2x}(2 \times (-5x + 20) - (-5))}{(-5x + 20)^2} = \frac{e^{2x}(-10x + 40 + 5)}{(-5x + 20)^2} = \frac{e^{2x}(-10x + 45)}{(-5x + 20)^2}$$

Etude du signe de *f '(x)* :

On sait que $e^{2x} > 0$

$-10x + 45 > 0$

$-10x > -45$

(On divise par -10 donc on change le sens de l'inégalité !)

$x < 4,5$

$(-5x + 20)^2 > 0$

Car c'est un carré.

x	4		4.5		$+\infty$
e^{2x}		$+$	$+$	$+$	
$(-10x + 45)$		$+$	0	$-$	
$(-5x + 20)^2$		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

On en déduit donc que *f* est croissante sur]4 ; 4,5] et décroissante sur [4,5 ; +∞ [

III/ Limite des fonctions exponentielles.

1) Limites des fonctions e^x et e^{-x} :

Nous avons vu au début de ce chapitre que :

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Donc pour e^{-x} on en déduit logiquement que :

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

2) Formes indéterminées :

Lorsque l'on cherche à déterminer le(s) limites d'une fonction on peut être amenés à rencontrer ce que l'on appelle des formes indéterminées, c'est-à-dire des fonctions ou à priori il n'est pas possible de déterminer la limite. Ce sont les cas où l'on obtient des résultats du type :

$0 \times \pm\infty$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Les fonctions pouvant amener à ce genre de résultats et que nous étudierons sont les fonctions du type :

$x^n e^x$; $\frac{e^x}{x^n}$; $x^n e^{-x}$ $(avec\ n\ entier\ naturel\ non\ nul)$

On utilise pour lever ces formes indéterminées le théorème des croissances comparées. Pour faire simple ce théorème nous permet de dire que la fonction exponentielle croit plus vite que x^n et que donc c'est sa limite qui l'emporte. Ainsi nous retiendrons les résultats suivants :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$; $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$