PROBABILIDAD CONDICIONADA

Índice:

1. Probabilidad condicionada.

Se denomina **probabilidad condicionada de un suceso B respecto de un suceso A**, y la denotamos por p(B/A), al cociente siguiente

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)},\ si\ p(A)\neq 0$$

Análogamente, la **probabilidad condicionada de un suceso A respecto de un suceso B**, y la denotamos por p(B/A), al cociente siguiente

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)},\ si\ p(B)\neq 0$$

2. Sucesos dependientes e independientes

1.- Dos sucesos A y B son independientes si $p(B)=p(B/A)$

2.- Dos sucesos A y B son dependientes si $p(B)\neq p(B/A)$

Además, de 1 se deduce que si A y B son independientes, se cumple

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=p(B)\Rightarrow p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

 # Ejemplo.- Si extraemos sucesivamente, dos cartas de una baraja española, para calcular la probabilidad de obtener dos reyes, denominamos

$$R_1=\text{“ sacar rey en la primera extracción ”}$$

$$R_2=\text{“ sacar rey en la segunda extracción ”}$$

Como las dos cartas se extraen sucesivamente, equivale a extraer la primera y, sin devolverla, realizar una nueva extracción.

Utilizando el suceso $R_1\cap R_2$ *, si p es la función de probabilidad, obtenemos*

$$p(R_1\cap R_2)=p(R_1).p(R_2/R_1)=\frac{4}{40}.\frac{3}{39}=\frac{1}{130}$$

Sin embargo, si extraemos las dos cartas, pero devolviendo la primera carta una vez extraída, y volviendo a recoger la segunda

Utilizando el suceso $R_1\cap R_2$ *, si p es la función de probabilidad, obtenemos*

$$p(R_1\cap R_2)=p(R_1).p(R_2/R_1)=p(R_1).p(R_2)=\frac{4}{40}.\frac{4}{40}=\frac{1}{100}$$

Por cumplirse la independencia de los sucesos.

Para la resolución de problemas de un número pequeño de experimentos compuestos (*tanto para sucesos dependientes como independientes*), es útil la resolución gráfica mediante la utilización de un árbol (*grafo*).

3. Probabilidad compuesta o de la intersección de sucesos

Si A, B son dos sucesos del espacio muestral E, y p es la función la probabilidad, se cumplirá

$$p(A\cap B)=\begin{cases} =p(A).p(B) & \text{si A y B son independientes} \\ =p(A).p(B/A) & \text{si A y B son dependientes} \end{cases}$$

Este resultado se puede generalizar para n sucesos, es decir

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son n sucesos del espacio muestral E, y p es la función la probabilidad, se cumplirá

$$p(A_1\cap A_2\ldots\cap A_n)=\begin{cases} =p(A_1).p(A_2)\ldots p(A_n);\ \text{si } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ son independientes} \\ =p(A_1).p(A_2/A_1)\ldots p(A_n/A_1\cap A_2\ldots\cap A_{n-1});\ \text{si } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ son dependientes} \end{cases}$$

 # Ejemplos.-

- *Si denominamos el espacio muestral E = {C,X} asociado al lanzamiento de un dado, y p es la función de probabilidad. La probabilidad de obtener cuatro caras en cuatro lanzamientos será:*

$$p(C\cap C\cap C\cap C)=p(C).p(C).p(C).p(C)=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

- *Si denominamos el espacio muestral E = {10 R, 6 N } asociado a la extracción de bolas de una urna que contiene 10 bolas rojas y 6 bolas negras, y p es la función de probabilidad. La probabilidad de obtener dos bolas negras cuando efectuamos una extracción sin remplazamiento será:*

$$p(N_1\cap N_2)=p(N_1).p(N_2/N_1)=\frac{6}{16}.\frac{5}{15}=\frac{1}{8}$$

4. Tabla de contingencias

Las tablas de contingencia utiliza las probabilidades condicionadas para registrar y analizar la relación entre varias variables. Que para el caso de dos variables, y dos sucesos, es de de la forma

	B	B'	
A	p(A/B)	p(A/B')	p(A)
A'	p(A'/B)	p(A'/B')	p(A')
	p(B)	p(B')	

En ocasiones, esta tabla se usa para obtener probabilidades de intersección de sucesos, en vez de probabilidades de sucesos condicionados.

 # Ejemplos.- Si consideramos las variables de sexo E = {H, M} (hombre, mujer) y la variable si la persona es diestra o zurda F = { D, Z}. Si se efectuá este estudio a 1000 personas, de los cuales 520 son hombres y 480 mujeres, se puede utilizar una tabla de contingencia para expresar la relación entre estas dos variables, del siguiente modo:

	H	*M*
D	$p(D/H)=\frac{430}{520}$	$p(D/M)=\frac{440}{480}$
Z	$p(Z/H)=\frac{90}{520}$	$p(Z/M)=\frac{40}{480}$
	$p(H)=\frac{520}{1000}$	$p(D)=\frac{480}{1000}$

5. Teorema de probabilidad total

Si $A_{1,}A_{2,}A_{3,}\ldots,A_n$ es un sistema completo de sucesos E (*espacio muestral*) tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y B un suceso cualquiera de E, y p la función de probabilidad tal que para cada $i\in\{1,2,3,\ldots,n\}$ se conoce $p(B/A_i)$, entonces

$$p(B)=p(A_1).P(B/A_1)+p(A_2).P(B/A_2)+\ldots+p(A_n).P(B/A_n)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i).P(B/A_i)$$

 # Ejemplos.- Si consideramos el ejemplo anterior de personas (hombres y mujeres) diestros y zurdos, y queremos calcular las probabilidades de ser diestro y zurdo, utilizamos el teorema de probabilidad total

$$p(D)=p(H).p(D/H)+p(M).p(D/M)=\frac{520}{1000}.\frac{430}{520}+\frac{480}{1000}.\frac{440}{480}=\frac{870}{1000}$$

$$p(Z)=p(H).p(Z/H)+p(M).p(Z/M)=\frac{520}{1000}.\frac{90}{520}+\frac{480}{1000}.\frac{40}{480}=\frac{130}{1000}$$

Y podemos completar la tabla con dichas probabilidades

	H	*M*	
D	$p(D/H)=\frac{430}{520}$	$p(D/M)=\frac{440}{480}$	$p(D)=\frac{870}{1000}$
Z	$p(Z/H)=\frac{90}{520}$	$p(Z/M)=\frac{40}{480}$	$p(Z)=\frac{130}{1000}$
	$p(H)=\frac{520}{1000}$	$p(D)=\frac{480}{1000}$	

6. Teorema de Bayes

Si $A_{1,} A_{2,} A_{3,} \ldots , A_n$ es un sistema completo de sucesos E (*espacio muestral*) tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y B un suceso cualquiera de E, y p la función de probabilidad tal que para cada $i \in \{1,2,3, \ldots , n\}$ se conoce $p(B/A_i)$, entonces para cada suceso A_i será

$$p(A_i/B)=\frac{p(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i).P(B/A_i)}$$

 # Ejemplos.- Si consideramos el ejemplo anterior de personas (hombres y mujeres) diestros y zurdos, y queremos calcular las probabilidad de ser hombre, sabiendo que es zurdo, utilizamos el teorema de Bayes

$$p(D)=p(H).p(D/H)+p(M).p(D/M)=\frac{520}{1000}.\frac{430}{520}+\frac{480}{1000}.\frac{440}{480}=\frac{870}{1000}$$

$$p(H/Z)=\frac{p(H).p(Z/H)}{p(H).p(Z/H)+p(M).p(Z/M)}=\frac{\frac{520}{1000}.\frac{90}{520}}{\frac{130}{1000}}=\frac{90}{130}$$