Musique et Math

Situation d'apprentissage

MAT-5161-2 et MAT-5171-2

Modélisation algébrique et graphique en contexte appliqué 2
et en contexte fondamental 2

Source de l'image : https://pixabay.com/

Cahier de l'adulte

Version de juin 2019

Louise Roy

Présentation de la situation

Quels principes sous-tendent la conception d'une guitare ? Quelle est la relation entre la musique et les mathématiques ?

Dans cette situation d'apprentissage, vous utiliserez des concepts mathématiques pour comprendre la structure d'une guitare et les caractéristiques d'une onde sonore émise par celle-ci.

Intention pédagogique

- Représenter une situation par un modèle algébrique ou graphique ;
- Acquérir des connaissances dans un contexte réaliste ;
- Mobiliser des stratégies de résolution de problèmes complexes ;
- Développer des compétences dans le traitement de situations faisant intervenir des modèles algébriques.

Matériel

Pour réaliser les tâches de cette situation, vous aurez besoin

- d'une guitare classique ou acoustique ;
- d'un mètre à mesurer ;
- d'un ordinateur avec un microphone ;
- du logiciel Audacity ;
- des applications pour émettre des fréquences et pour mesurer les décibels [1];
- d'un accès Internet pour l'utilisation des activités qui se trouvent dans le livret GeoGebra. (Le travail avec les activités est indiqué tout au long de la situation d'apprentissage.)

S'il n'est pas possible d'avoir certains outils, votre enseignant vous remettra les tableaux de données.

Prévoyez environ de 5 à 6 heures pour faire cette situation.

Ressources

Livret GeoGebra : https://monurl.ca/guitare

Ce symbole indique une activité avec GeoGebra

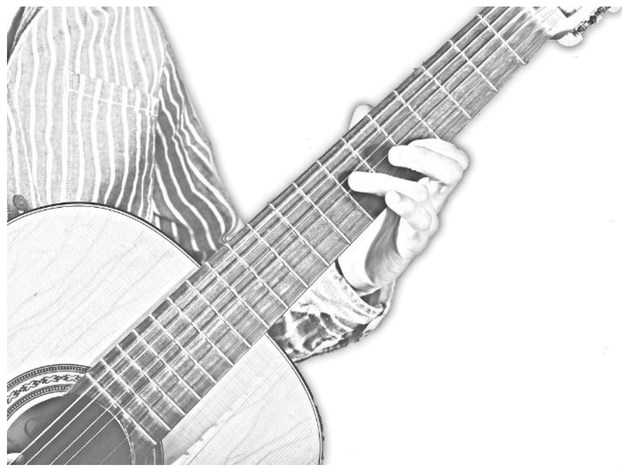
Ce symbole indique le visionnement d'une capsule

[1] Des propositions d'applications sont données en annexe.

vidéo

Tâche 1 : structure de la guitare

Une guitare standard, classique, acoustique ou électrique, possède six cordes. Les cordes à vide produisent une note. En appuyant sur le manche, le guitariste réduit la longueur de la corde.



Plus la corde est courte, plus elle émet une note aigüe. **Il y a donc une relation de dépendance entre la longueur de la corde et la note émise.**

La distance à laquelle on place les frettes doit être très précise pour obtenir une note juste. Mais comment calcule-t-on cette distance ?

Dans cette première tâche, vous identifierez le type de relation qu'il y a entre la longueur de la corde et la fréquence de la note obtenue. Vous expliquerez ensuite le principe qui permet de calculer la distance entre les frettes de la guitare.

Avant de poursuivre, visionnez la première capsule vidéo.

PARTIE PRATIQUE

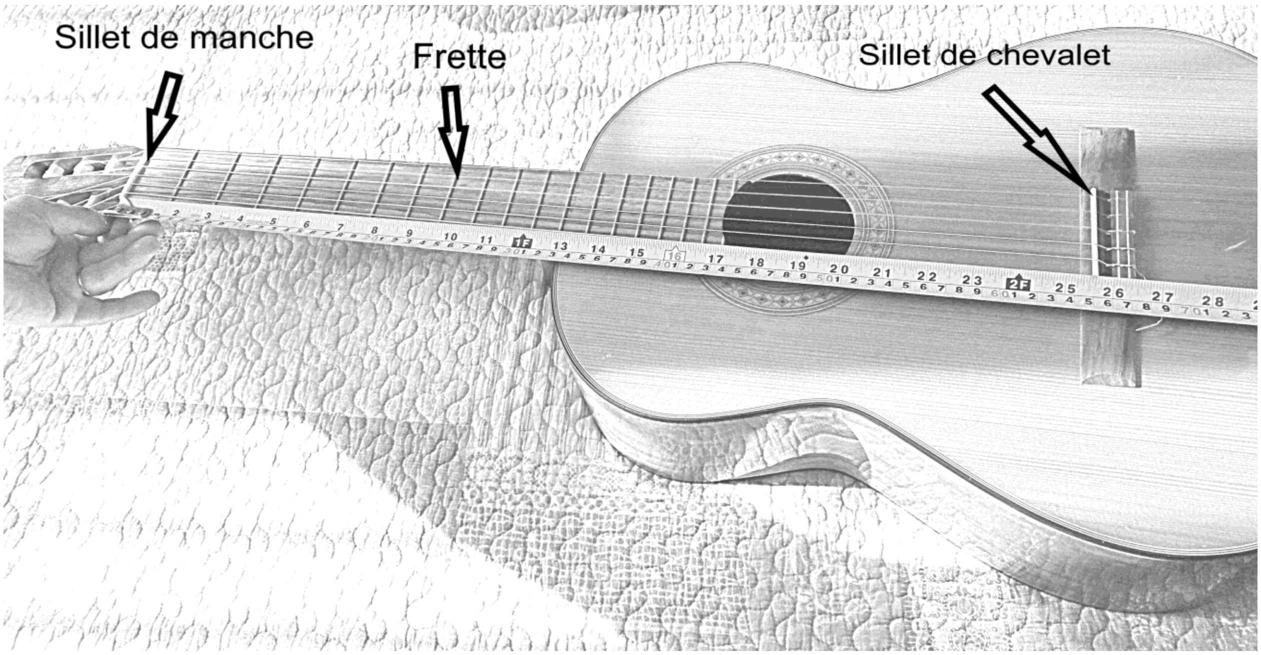
Pour cette situation, vous pouvez utiliser une guitare classique ou acoustique[2].

D'abord, observez la guitare, en particulier la distance entre les frettes. Que remarquez-vous ?

---

[2] Si vous ne pouvez avoir de guitare, demandez un tableau avec la longueur des cordes.

À l’aide d’un mètre à mesurer, notez la longueur d’une corde à vide, du sillet de manche au sillet de chevalet, puis la mesure à chacune des frettes au sillet de chevalet tel que montré sur la photo.



Inscrivez d’abord vos mesures dans un tableau ou directement dans le tableur GeoGebra, activité *Étude de la guitare*. Ensuite, complétez le tableau en indiquant la fréquence en *Hertz*[3], de la note émise pour la cinquième corde. Pour cela, vous pouvez trouver la valeur de ces fréquences sur Internet ou demander à votre enseignant. Entrez également ces valeurs dans le tableau GeoGebra.

Note : pour vous aider pour l’utilisation du tableur GeoGebra, consultez la capsule vidéo sur le Livret (https://monurl.ca/guitare).

[3] Nombre de cycles par seconde, vous verrez cette notion plus en détail dans la tâche 2.

Corde :					
Frette	Longueur (cm)	Fréquence (Hertz)	Frette	Longueur (cm)	Fréquence (Hertz)
0			8		
1			9		
2			10		
3			11		
4			12		
5			13		
6			14		
7			15		

Entrez les données dans l'activité *Étude de la guitare* et générez le graphique des relations suivantes[4] :

- Longueur de la corde en fonction de la position de la frette ;
- Fréquence de la note en fonction de la position de la frette pour la corde de votre choix ;
- Fréquence de la note en fonction de la longueur de la corde pour la cinquième corde.

Selon vous quelle fonction décrit mieux la relation entre :

	Fonction exponentielle	Fonction polynomiale du second degré	Fonction rationnelle
La longueur de la corde et la position de la frette			
La fréquence de la note et la position de la frette			
La fréquence de la note et la longueur de la corde			

Pour valider vos réponses, faites la partie théorique et les exercices qui suivent. Vous reviendrez ensuite à vos graphiques.

[4] Visionnez la vidéo au début de l'activité afin de savoir comment y arriver.

Partie théorique

Comment trouver le modèle algébrique d'une fonction exponentielle et d'une fonction rationnelle ?

La fonction exponentielle

La fonction exponentielle est de la forme : $f(x) = a \times c^{b(x-h)} + k$

Ouvrez l'activité *La fonction exponentielle* et notez les caractéristiques de la fonction exponentielle en manipulant les paramètres *a*, *b*, *c*, *h* et *k* en complétant les phrases suivantes :

- Lorsque *b* est positif, la fonction est _____________lorsque $c>1$ et elle est ____________ lorsque $0<c<1$. La fonction devient constante lorsque *c* est égal *à* _________.
- La fonction est ouverte vers le __________ lorsque $a>0$ et elle est ouverte vers le __________ lorsque $a<0$
- Il y a présence d'une asymptote dont l'équation est ______________
- Le paramètre *k* permet un déplacement ____________ de la courbe
- Lorsque $h=0$, la valeur de l'ordonnée à l'origine est égale à ___________________________

En gardant les autres paramètres à la même valeur, démontrez algébriquement et graphiquement[5] que si $c=2$ et $b=-1$ on a la même fonction que lorsque $c=1/2$ et $b = 1$.

[5] Utilisez l'activité *Comparaison de deux fonctions exponentielles* pour la démonstration.

Retour sur vos graphiques

Les relations **longueur de la corde en fonction de la position de la frette** et **fréquence de la note en fonction de la position de la frette** sont des fonctions exponentielles. Donnez les caractéristiques de leur fonction :

> **Stratégie** : Utilisez les graphiques de l'activité *Étude de la Guitare* pour faire les simulations.

Longueur en fonction de la position de la frette :

a. Le paramètre *a* est ______________, car la courbe est ouverte vers le ______________

b. En posant l'hypothèse que le paramètre *b* est positif alors le paramètre *c* est ___________, car la courbe est ___________.

c. L'équation de l'asymptote est de ________, car la _____________ est toujours positive.

d. Parmi les modèles suivants, lequel représente le mieux la relation entre la longueur et la position de la frette

$f(x)=65\times 0{,}94^{x}$	$f(x)=-65\times 0{,}8^{0{,}2x}+130$	$f(x)=40\times 0{,}94^{x}-25$	$f(x)=40\times 1{,}6^{x}+25$

Fréquence en fonction de la position de la position de la frette

e. Le paramètre *a* est ____________, car la courbe est ouverte vers le _______________

f. En posant l'hypothèse que le paramètre *b* est positif alors le paramètre *c* est ___________, car la courbe est _____________.

g. L'équation de l'asymptote est de __________, car la fréquence est toujours _____________.

h. Parmi les modèles suivants, lequel représente le mieux la relation entre la fréquence et la position de la frette

$f(x) = 110 \times 0{,}94^{x}$	$f(x) = -110 \times 1{,}06^{0.5x} + 160$	$f(x) = 110 \times 1{,}06^{x}$	$f(x) = 70 \times 1{,}06^{x} - 30$

La fonction rationnelle

La fonction rationnelle est sous la forme $f(x)=a\left(\frac{1}{b(x-h)}\right)+k$

Ouvrez l'activité *La fonction rationnelle* et notez les caractéristiques de cette fonction en manipulant les paramètres *a*, *b*, *h* et *k* et en complétant les phrases suivantes :

- La fonction est ______________ lorsque ____ et ________ sont de même signe. Si $h=0$ et $k=0$, le graphique est alors dans les quadrants ______________
- La fonction est _____________ lors que ________ et __________ sont de signe contraire. Si $h=0$ et $k=0$, le graphique est alors dans les quadrants _____________
- Il y a présence de ___________ asymptotes dont les équations sont ___________________________
- Le paramètre *h* permet un déplacement __________ de la courbe.
- Le paramètre *k* permet un déplacement ___________ de la courbe.

Retour sur votre graphique

La relation **fréquence de la note en fonction de la longueur de la corde** est une fonction rationnelle. Donnez les caractéristiques de la fonction.

- Les paramètres *a* et *b* sont ________________, car la fonction est ___________________
- Parmi les modèles suivants, lequel représente le mieux la relation entre la fréquence de la note et la longueur de la corde pour la cinquième corde ?

$f(x)=-7150\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=7150\left(\frac{1}{x}\right)$	$f(x)=7150\left(\frac{1}{-x}\right)$	$f(x)=\left(\frac{1}{7150x}\right)$

- Quelle valeur devra avoir le paramètre *b* pour obtenir le modèle de la relation de la fréquence en fonction de la longueur de la cinquième corde ?
  ____

Stratégie : Multipliez la mesure de la longueur de la corde et la fréquence pour chaque note.

SITUATION À RÉSOUDRE

Pour construire une mini guitare de quatre cordes et 15 frettes, à quelle distance les frettes devront-elles être placées ?

Ouvrez l’activité *Construire une mini-guitare* et démontrez vos résultats.

D’où vient le nombre 1,06 ? En fait, c’est plus précisément $\sqrt[12]{2}$. Dans une octave, il y a 12 demi-tons et lorsqu’on augmente la fréquence d’une note d’une octave, on multiplie la fréquence de cette note par deux. Ainsi, le rapport de la fréquence de deux notes consécutives, distantes d’un demi-ton, sera de $\sqrt[12]{2}$. $0{,}94 \cong \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$. (Voyez la vidéo explicative.)

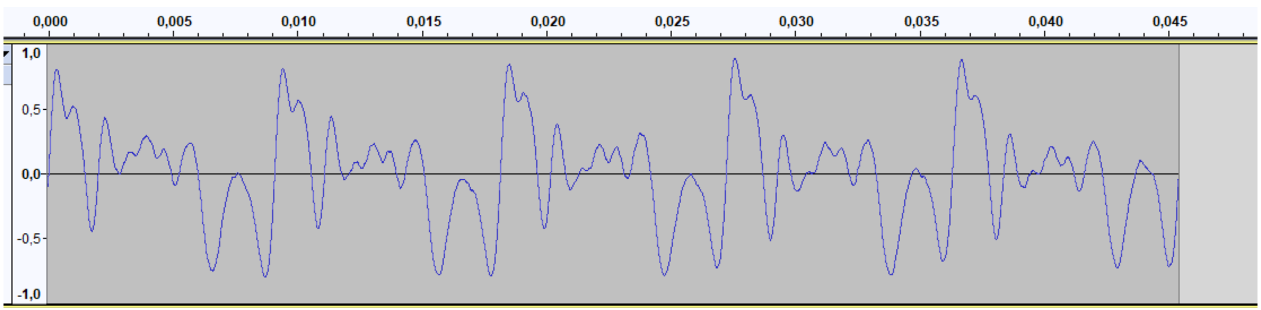
Tâche 2 : étude de l'onde sonore

Lorsqu'un guitariste joue sur son instrument, les notes émises sont amplifiées par la caisse de résonnance de la guitare ce qui fait la richesse du son.

PARTIE PRATIQUE

On peut représenter graphiquement une onde sonore à l'aide d'un logiciel tel *Audacity.* Ouvrez le logiciel et enregistrez une note jouée sur une corde à vide de la guitare.

Vous devriez obtenir une courbe semblable à celle-ci (exemple de la cinquième corde à vide de la guitare, **La 110 Hz**) :



Le son provenant d'un instrument de musique ou de toute autre source est rarement pur. Il est composé de plusieurs sons de fréquences et d'amplitudes différentes qu'on nomme *harmoniques*. Le graphique du son complexe résulte de la somme du graphique du son pur et de ceux de ses harmoniques. La note *fondamentale*[6] et ses harmoniques peuvent être décrites par des fonctions cosinus.

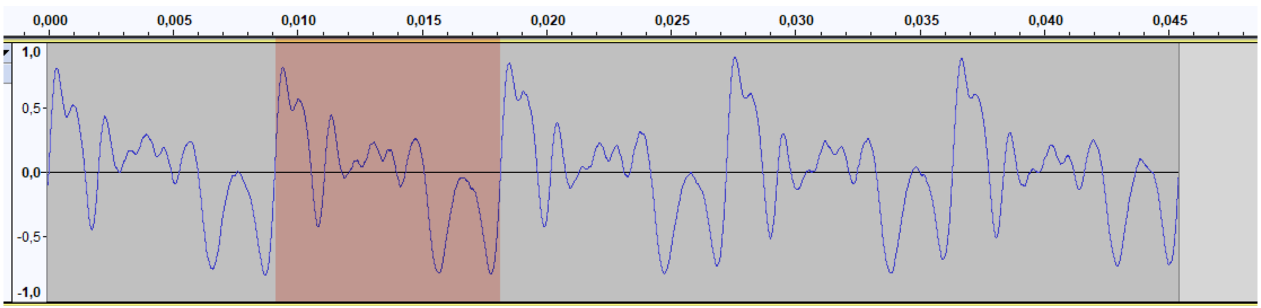
Avant de poursuivre, visionnez la seconde capsule vidéo.

[6] La note fondamentale est la note de base, la note réelle que le musicien choisit de jouer.

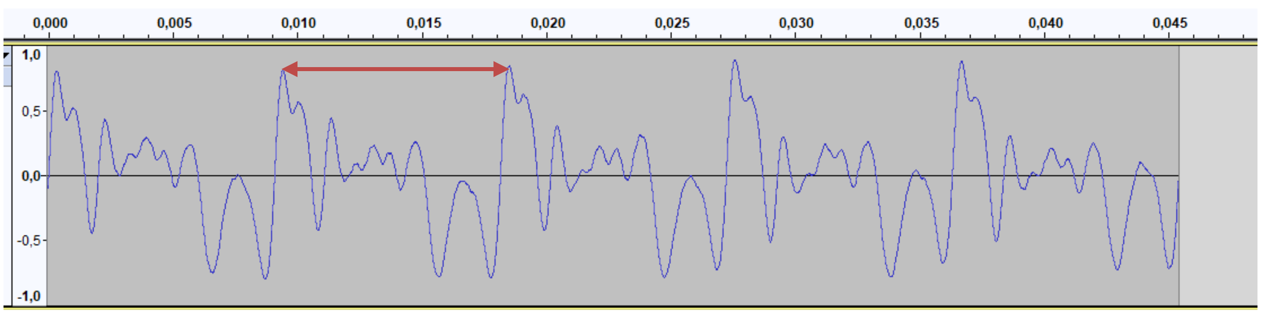
PARTIE THÉORIQUE

La courbe obtenue est **périodique**, mais de forme complexe. Ce type de fonction se caractérise par un cycle, une période, une amplitude, des extrémums, des intervalles de croissance et de décroissance.

Le *cycle* de la fonction se définit comme la partie du graphique qui se répète.

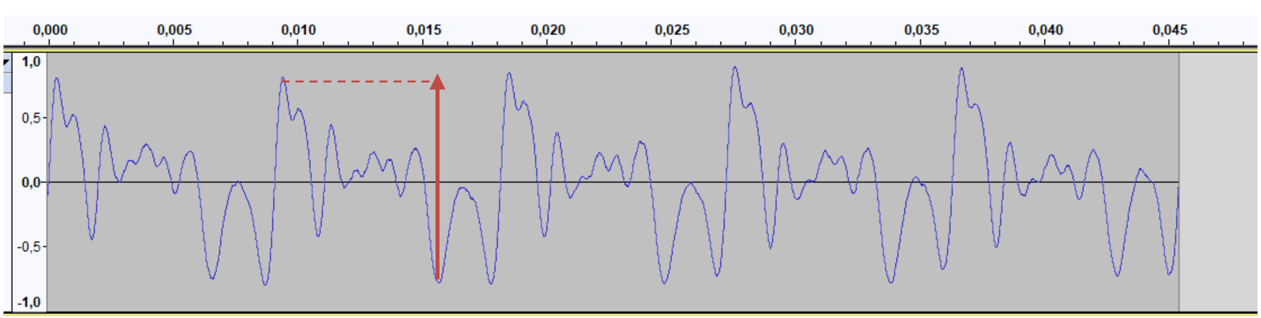


La *période* se définit par l'intervalle entre les abscisses de deux points correspondants de deux cycles consécutifs.



Quelle est la période de la courbe précédente : _______________

L'amplitude se définit par la **moitié de la différence** entre la valeur maximale et la valeur minimale en ordonnée.



Quelle est l'amplitude de la courbe précédente : _____________

La séquence montre l'onde sonore durant 0,0455 seconde, combien observe-t-on de cycles complets durant cet intervalle ? ________

La fréquence d'une note est le nombre de cycles qu'elle fait en une seconde. Dans l'exemple, combien de cycles fait cette note ?

Donc, plus une note est grave, plus sa fréquence sera___________ et plus son cycle sera __________________.

L'amplitude de la courbe correspond à l'énergie de la vibration causée par la note de musique. Plus l'amplitude est grande, plus le son est fort.

Un son **pur** produit une courbe parfaitement sinusoïdale. Les courbes sinusoïdales sont les fonctions sinus et cosinus.

Un son **complexe** est produit par la note fondamentale à laquelle s'ajoutent ses harmoniques qui ont une amplitude plus faible, une fréquence égale à un multiple de la fréquence de la fondamentale et un léger décalage dans le temps. Le graphique du son complexe résulte donc de la somme de plusieurs fonctions cosinus.

Les fonctions sinus et cosinus sont appelées fonctions trigonométriques. Dans ce cours, ces deux fonctions sont étudiées ainsi que la fonction tangente qui est le quotient du sinus et du cosinus.

Les fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus ont un cycle semblable. La fonction sinus est de la forme $f(x)=a\sin\left(b\left(x-h\right)\right)+k$.

Ouvrez l'activité *Les fonctions trigonométriques*, sélectionnez la fonction sinus et notez les caractéristiques de la fonction sinus en manipulant les paramètres *a*, *b*, *h* et *k*. Complétez le tableau en indiquant le paramètre dont la modification de la valeur entraine :

Effet	Paramètre
Une modification du cycle	
Une modification de la période	
Une modification de l'amplitude	
Un déplacement vertical de la courbe	
Un déplacement horizontal de la courbe	

Identifiez les caractéristiques de la fonction $f(x)=\frac{5}{4}\sin\left(\frac{-1}{4}\pi\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}$ Complétez le tableau en inscrivant vos démarches :

la période	
l'amplitude	
le domaine	
l'image (le codomaine)	
les zéros	
l'ordonnée à l'origine	
un intervalle de croissance	

un intervalle de décroissance	

Donnez une fonction qui a les caractéristiques suivantes :

la période	$P=1$
l’amplitude	$A=\frac{1}{2}$
le domaine	$\mathbb{R}$
l’image (le codomaine)	$\left[\frac{-3}{2},\frac{-1}{2}\right]$
les zéros	Aucun
l’ordonnée à l’origine	$\frac{-3}{2}$
un intervalle de croissance	$\left[0,\frac{1}{2}\right]$
un intervalle de décroissance	$\left[\frac{1}{2},1\right]$

(Plusieurs réponses possibles) :

La fonction cosinus est de la forme $f(x) = a\cos\left(b\left(x-h\right)\right)+k$

Ouvrez l'activité *Les fonctions trigonométriques*, sélectionnez la fonction cosinus et notez les caractéristiques de la fonction cosinus en manipulant les paramètres *a*, *b*, *h* et *k*. Complétez le tableau en indiquant le paramètre dont la modification de la valeur entraine :

Effet	Paramètre
Une modification du cycle	
Une modification de la période	
Une modification de l'amplitude	
Un déplacement vertical de la courbe	
Un déplacement horizontal de la courbe	

Pour la fonction $f(x) = \frac{-1}{2}\cos\left(-1\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}$, donnez :

la période	
l'amplitude	
le domaine	
le codomaine	
les zéros	
l'ordonnée à l'origine	
un intervalle de croissance	
un intervalle de décroissance	

Donnez une fonction qui a les caractéristiques suivantes :

la période	4
l'amplitude	2
le domaine	$\mathbb{R}$
le codomaine	$[0,4]$
les zéros	$\{-2+4n\}\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$
l'ordonnée à l'origine	4
un intervalle de croissance	$[2,4]$
un intervalle de décroissance	$[0,2]$

LA FONCTION TANGENTE

La fonction tangente est de la forme $f(x) = a\tan\big(b(x-h)\big)+k$

Ouvrez l'activité *Les fonctions trigonométriques*, sélectionnez la fonction tangente et notez les caractéristiques de la fonction tangente en manipulant les paramètres *a*, *b*, *h* et *k*. Complétez le tableau en indiquant le paramètre dont la modification de la valeur entraine :

Effet	Paramètre
Une modification du cycle	
Une modification de la période	
Une modification de l'amplitude	
Un déplacement vertical de la courbe	
Un déplacement horizontal de la courbe	

Pour la fonction $f(x) = 3\tan\left(\frac{-3}{2}\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$, donnez :

la période	
les asymptotes	
le domaine	
le codomaine	
les zéros	
l'ordonnée à l'origine	
un intervalle de croissance	
un intervalle de décroissance	

Donnez une fonction qui a les caractéristiques suivantes :

la période	4
les asymptotes	$\{2+4n\}\ \forall n \in \mathbb{Z}$
le domaine	$\mathbb{R}$
le codomaine	$\mathbb{R}$
les zéros	$\{-1+4n\}\ \forall n \in \mathbb{Z}$
l'ordonnée à l'origine	$\frac{1}{2}$
un intervalle de croissance	
un intervalle de décroissance	Aucun

SITUATION À RÉSOUDRE

Sachant que

— les harmoniques d'une note de musique sont moins fortes (amplitude plus petite),

— leur fréquence est un multiple de la note de base (fondamentale)

— le son des harmoniques suit la fondamentale avec un léger décalage.

Quelle est la fonction mathématique d'une note fondamentale avec deux harmoniques ?

Ouvrez le fichier *Son pur et son complexe*. Modifiez les caractéristiques de la note fondamentale et de ses harmoniques. Écrivez la fonction obtenue ainsi que les caractéristiques de son graphique.

Tâche 3 : étude de la hauteur du son

Lorsqu'un guitariste joue seul, le son de sa guitare n'est pas très fort. La force du son est mesurée par le décibel (dB). Le décibel (un dixième de bel) se calcule à partir de l'intensité du son capté par l'oreille. Des instruments de mesure et des applications permettent de mesurer le nombre de décibels émis par une source sonore.

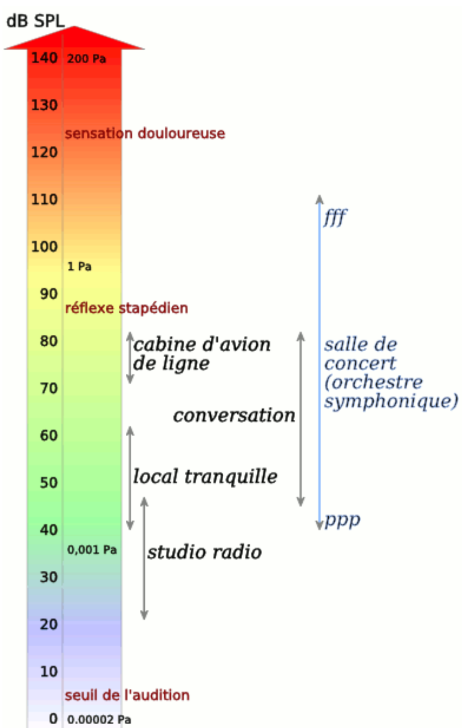
Avant de poursuivre, consultez la troisième capsule vidéo.

PARTIE PRATIQUE

À l'aide d'un instrument de mesure ou une application, mesurez approximativement[7] la hauteur du son (en décibel) lorsqu'on joue de la guitare classique. Si vous ne savez pas jouer de la guitare et n'avez pas de guitariste sous la main, jouez la sixième corde à vide. Quelle mesure obtenez-vous ? __________________.

PARTIE THÉORIQUE

Le nombre de décibels émis par une source sonore se calcule par la fonction suivante : $f(x) = 10 \times log_{10}(P)$, où P, est l'intensité du son émis. On fait généralement correspondre l'échelle de décibels à des sources sonores ou à des niveaux de perceptions tel que montré sur l'image[8].



[7] C'est très difficile d'avoir une mesure précise d'un son en décibel, car tous les sons ambiants sont mesurés. Généralement, les applications conservent la mesure maximale, vous pourriez prendre celle-ci.

[8] Source de l'image : https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Sound_levels.png, 8 juin 2018

La fonction logarithmique est de la forme $f(x)=a\times\log_c\left(b\left(x-h\right)\right)+k$

Ouvrez l'activité *Fonction logarithmique* et complétez les propriétés de la fonction logarithmique en manipulant les paramètres *a*, *b*, *c*, *h* et *k*.

Lorsque *a* et *b* sont de même signe, pour quelle condition la fonction sera :

croissante	
décroissante	

Pour quelle valeur de *b* le domaine est

$]-\infty, h[$	
$]h, +\infty[$	

L'asymptote est donnée par l'équation : $x=$ ________________

Pour la fonction, $f(x)=2\log_{10}\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)$ donnez :

l'asymptote	
le domaine	
l'image (le codomaine)	
le zéro de la fonction	
l'ordonnée à l'origine	
le signe	
l'intervalle de croissance	
l'intervalle de décroissance	

Donnez une fonction qui a les caractéristiques suivantes :

l'asymptote	$x=-2$
le domaine	$]-\infty,-2[$
l'image (le codomaine)	$\mathbb{R}$
le zéro de la fonction	$x\cong-4{,}01$
l'ordonnée à l'origine	$y\cong-1{,}21$
le signe	positive pour $]-\infty,-1{,}21[$ et négative pour $]-1{,}21,\infty[$
l'intervalle de croissance	Aucun
l'intervalle de décroissance	$]-1{,}21,\infty[$

RAPPEL DES LOIS DES LOGARITHMES[9]

1. $log_c 1 = 0$
2. $log_c c = 1$
3. $log_c c^n = n$
4. $log_c(M \times N) = log_c M + log_c N$
5. $log_c \frac{M}{N} = log_c M - log_c N$
6. $log_{\frac{1}{c}} M = -log_c M$
7. $log_c M^n = n log_c M$
8. $log_c M = \frac{log_a M}{log_a c}$

[9] Source : http://www.alloprof.qc.ca/BV/pages/m1500.aspx

Situation à résoudre

Combien de décibels de plus émettront deux guitaristes par rapport à un seul ? Et combien de décibels pourrions-nous mesurer avec un orchestre de vingt guitaristes ?

Ouvrez l’activité *Les décibels*. Modifiez le nombre de guitaristes à l’aide du curseur. Démontrez vos résultats par calcul.

En conclusion

En introduction de cette situation d'apprentissage, vous aviez les questions suivantes :

Quels principes sous-tendent la conception d'une guitare ? Quelle est la relation entre la musique et les mathématiques ?

La fabrication d'une guitare fait appel au modèle ______________________, afin de placer les frettes à la bonne distance.

Le son émis peut être décrit par une somme de fonctions _________________________.

On calcule la force de l'émission d'un son selon un modèle ________________________.

En espérant que maintenant, vous porterez un regard nouveau sur la guitare et sur le lien entre la musique et les mathématiques.

Annexes

Quelques ressources Internet

Vous retrouverez ces liens dans le livret GeoGebra. Tous les liens ont été consultés entre janvier et juin 2018.

Sites

Allô Prof, https://www.alloprof.qc.ca/Pages/Accueil.aspx

Couleur science, L'échelle des décibels, https://couleur-science.eu/?d=2014/08/07/18/30/15-lechelle-des-decibels

La perception sonore chez l'être humain, travaux pratiques sur le son : http://perceptionsonoretpe.free.fr/I-1.html,.

Tableau des fréquences en format PDF, https://www.deleze.name/marcel/physique/musique/Frequences.pdf

TPE 1s Saint-Michel : Le son, site plutôt complet, https://sites.google.com/site/tpe1ssaintmichelleson/home

Vidéos

Le logarithme et l'audition (28:07), https://youtu.be/Y-x_LiE6jzQ

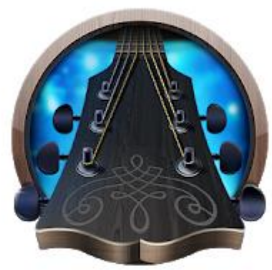
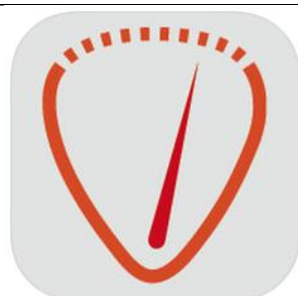
Les mathématiques et la musique (24:31), https://youtu.be/cTYvCpLRwao

Micmaths, Merveilleux logarithmes (15:12) https://youtu.be/rWfl7Pw8YVE

Son pur et son complexe (5:22) https://youtu.be/2328B6D5Joo

Applications

À installer sur cellulaire ou tablette

Lien	Image	Détails
Accordeur Chromatique de Guitare et Basse Gratuit Google		Affiche la fréquence des notes.
Accordeur de Guitare Précis Apple		Affiche la fréquence des notes. Adapté pour le cellulaire.
Sonomètre : Sound Meter Google		Mesure les décibels, affiche les extrêmes ainsi que le type d'environnement. De plus, il est en français.
Décibel X – dBA sonomètre Apple		En plus de mesurer les décibels, l'application affiche le type d'environnement associé à ce niveau sonore.