VECTORES Y DISTRIBUCIONES MULTIDIMENSIONALES

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ el álgebra o σ - álgebra (*según sea numerable o no numerable*), y P la probabilidad asociada al espacio probabilizable (U, $\mathcal{A}$), que además cumple:

1.- $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$.

2.- $P(U)=1$.

3.- $P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ y $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i,j \in \mathbb{N}, i \neq j$.

Además, podemos utilizar la variable multidimensional (*siempre que sea una función probabilizable*):

$$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n): U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Y construir el espacio de probabilidad asociado $\left(X, \mathcal{B}_n, P_X\right)$, siendo $\mathcal{B}_n, la\ \sigma-álgebra$ de borel n dimensional, y cuya función de distribución será:

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$$

tal que:

1.- $F(-\infty, x_2, \ldots, x_n)=F(x_1, -\infty, \ldots, x_n)=\ldots.=F(x_1, x_2, \ldots, -\infty)=0$.

2.- $F(+\infty, +\infty, \ldots, +\infty)=1$.

3.- F es continua por la derecha en varias variables, es decir si

$x^k=\left(x_1^k, x_2^k, \ldots., x_n^k\right) \underset{\rightarrow}{k \rightarrow \infty} (x_1, x_2, \ldots., x_{nk})=x$, será $\lim_{k\rightarrow\infty} F(x^k)=F(x)$.

Las distribuciones marginales serán:

$$F_{X_i}=(+\infty, +\infty, \ldots.., x_i, \ldots, +\infty, +\infty)$$

$F(x)$ y F_{X_i} serán sumatorios integrales múltiples, dependiendo de que X sea una v. a. multidimensional discreta o continua.

✔ **Ejemplo de v. a. discreta:** Si de una urna que tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5, escogemos sin remplazamiento 2 bolas. Si denominamos:

X = Número de la primera bola.

Y = Número de la segunda bola.

La función de probabilidad conjunta, será:

$$P_{XY}(X=x, Y=y)=\left\{\begin{matrix} \frac{1}{16} & si\, x, y \in \{1,2,3,4,5\} \text{ con } x \neq y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix}\right\}$$

La función de distribución será:

$$F_{XY}(x,y)=\sum_{i=1}^{[x]} \sum_{j=1}^{[y]} P_{XY}(X=i, Y=j)$$

Y las distribuciones marginales serán:

$$F_X(x)=\sum_{i=1}^{[x]} \sum_{j=1}^{5} P_{XY}(X=i, Y=j) \qquad F_Y(y)=\sum_{j=1}^{[y]} \sum_{i=1}^{5} P_{XY}(X=i, Y=j)$$

✔ **Ejemplo de v. a. continua:** Sea la función de densidad conjunta de la v.a. (X,Y):

$$f:\mathbb{R}^2 \to [0,1]$$

$$(x,y) \to f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{Si } \begin{Bmatrix} 0<x<1 \\ 0<y<1 \end{Bmatrix} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de distribución será:

$$F_{XY}(x,y) = \int_0^x \int_0^y f(u,v) \cdot du \cdot dv = \frac{x \cdot y \cdot (x+y)}{2}$$

Y las distribuciones marginales serán:

$$F_X(x) = \int_0^x \int_0^y f(u,v) \cdot du \cdot dv = \frac{x \cdot (x+1)}{2}$$

$$F_Y(y) = \int_0^y \int_0^1 f(u,v) \cdot dv \cdot du = \frac{y \cdot (y+1)}{2}$$