บทที่ 5

แบบแผนของการพิสูจน์

จากการศึกษาตรรกศาสตร์ในบทที่ผ่านมา พบว่า การอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลเป็นเรื่องที่สำคัญเรื่องหนึ่ง และจะเป็นแนวทางในการศึกษาคณิตศาสตร์ต่อไป การทดสอบความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผล เรียกว่า การพิสูจน์ ในบทนี้จะแสดงให้เห็นถึงแบบแผนการพิสูจน์ที่ใช้ในตรรกศาสตร์ หรือในคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งตัวอย่าง

นิยาม 5.1 การพิสูจน์ในระบบหนึ่ง คือ $S_1, S_2, \ldots, S_n \models Q$ ที่ซึ่ง $S_i, i = 1, 2, \ldots, n$ เป็นเหตุหรือสัจจพจน์ หรือนิยาม หรือทฤษฎีที่พิสูจน์มาก่อนแล้ว หรือ S_i เป็นผลโดยตรงจากประพจน์ที่มีมาก่อน โดยใช้กฎของการอนุมาน

5.1 การพิสูจน์ทางตรง (Direct proof)

การอ้างเหตุผลที่กล่าวมาแล้ว จะอยู่ในรูปประพจน์เงื่อนไข " $P \longrightarrow Q$ " โดยที่ P เป็นเหตุ และ Q เป็นผลสรุป เนื่องจากประพจน์เงื่อนไข " $P \longrightarrow Q$ " จะไม่สมเหตุสมผล กรณีเดียวเท่านั้น คือ P เป็นจริง และ Q เป็นเท็จ ถ้าต้องการจะพิสูจน์ว่า $P \longrightarrow Q$ เป็นจริง หรือสมเหตุสมผล จะต้องให้ P เป็นจริง แล้วจะแสดงว่า Q เป็นจริงด้วย สำหรับในกรณีที่ P เป็นเท็จ ไม่จำเป็นต้องพิจารณา เนื่องจาก $P \longrightarrow Q$ จะเป็นจริงเสมอ เรียกการพิสูจน์ที่ให้ P เป็นจริงและจะแสดงว่า Q เป็นจริงด้วยว่า การพิสูจน์ทางตรง มีแบบแผนดังนี้

1 $P \longrightarrow S_1$

2 $S_1 \longrightarrow S_2$

. .
. .
. .

n $S_n \longrightarrow Q$

ดังนั้น $P \longrightarrow Q$ โดย H.S

ตัวอย่าง 5.1

สัจจพจน์ 1 ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

ก. $a + b$ เป็นจำนวนเต็ม

ข. $a \cdot b$ เป็นจำนวนเต็ม

สัจจพจน์ 2 ถ้า a,b เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

ก. $a + b = b + a$

ข. $a \cdot b = b \cdot a$

สัจจพจน์ 3 ถ้า a, b, c เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

ก. $(a + b) + c = a + (b + c)$

ข. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

สัจจพจน์ 4 ถ้า a, b, c เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

สัจจพจน์ 5 0 เป็นจำนวนเต็มจำนวนเดียวเท่านั้น ที่ $a + 0 = 0 + a = a$ สำหรับทุก a ที่เป็นจำนวนเต็ม

สัจจพจน์ 6 ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม จะมีจำนวนเต็มจำนวนเดียวเท่านั้น แทนด้วย $-a$ ที่ซึ่ง $(-a) + a = a + (-a) = 0$

สัจจพจน์ 7 จำนวนเต็มที่เท่ากัน สามารถแทนซึ่งกันและกันได้

ทฤษฎี 1 ถ้า x, y เป็นจำนวนเต็มแล้ว $(x + y) + (-y) = x$

เหตุ x, y เป็นจำนวนเต็ม

ผลสรุป $(x + y) + (-y) = x$

พิสูจน์

		เหตุ
1	x, y เป็นจำนวนเต็ม	เหตุ
2	y เป็นจำนวนเต็ม	จาก 1 S.C
3	y เป็นจำนวนเต็ม $\to$ $-y$ เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์ 6
4	$-y$ เป็นจำนวนเต็ม	จาก 2,3 M.P
5	$x, y, -y$ เป็นจำนวนเต็ม	จาก 1,4 Conj.
6	$x, y, -y$ เป็นจำนวนเต็ม $\to$ $(x + y) + (-y) = x + (y + (-y))$	สัจจพจน์ 3 (ก)
7	$(x + y) + (-y) = x + (y + (-y))$	จาก 5,6 M.P
8	y เป็นจำนวนเต็ม $\to$ $y + (-y) = 0$	สัจจพจน์ 6
9	$y + (-y) = 0$	จาก 2,8 M.P
10	$(x + y) + (-y) = x + 0$	แทน 9 ใน 7
11	x เป็นจำนวนเต็ม	จาก 1
12	x เป็นจำนวนเต็ม $\to$ $x + 0 = x$	สัจจพจน์ 5
13	$x + 0 = x$	จาก 11,12 M.P
14	$(x + y) + (-y) = x$	แทน 13 ใน 10

ในทางปฏิบัติ ไม่จำเป็นต้องพิสูจน์ด้วยวิธีการยาวเช่นนี้ จะตัดทอนให้สั้นโดยเขียนแต่ เหตุและผลสรุปที่สมเหตุสมผลในแต่ละขั้นตอน ดังนี้

1	x, y เป็นจำนวนเต็ม	เหตุ
2	$-y$ เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์ 6
3	$(x + y) + (-y) = x + (y + (-y))$	สัจจพจน์ 3(ก)

4 $y + (-y) = 0$ สัจจพจน์ 6

5 $(x + y) + (-y) = x + 0$ สัจจพจน์ 7

6 $x + 0 = x$ สัจจพจน์ 5

7 $(x + y) + (-y) = x$ สัจจพจน์ 7

5.2 <u>การพิสูจน์โดยทางอ้อม</u> (Indirect proof)

การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผล โดยทั่ว ๆ ไปจะใช้การพิสูจน์โดยตรง จากเหตุไปสู่ผลสรุป ดังที่กล่าวมาแล้ว แต่การอ้างเหตุผลบางอย่างพิสูจน์โดยตรงยุ่งยากหรือไม่อาจจะกระทำได้ จึงต้องมีวิธีการพิสูจน์ใหม่ เรียกว่า การพิสูจน์โดยทางอ้อม ซึ่งมีแบบแผนการพิสูจน์หลายวิธี ดังต่อไปนี้

ก. <u>การพิสูจน์โดยการกลับและผกผันเงื่อนไขของ $P \longrightarrow Q$</u> (Proof by contraposition)

จาก $P \longrightarrow Q \Longleftrightarrow \sim Q \longrightarrow \sim P$

ดังนั้น แทนที่จะพิสูจน์จาก P และให้ผลสรุปเป็น Q จะเปลี่ยนเป็นให้ $\sim Q$ เป็นเหตุ แล้วพยายามหาผลสรุปออกมาเป็น $\sim P$ แบบแผนการพิสูจน์แบบนี้ เรียกว่า พิสูจน์โดยการกลับและผกผันเงื่อนไขของ $P \longrightarrow Q$

<u>ตัวอย่าง 5.2</u> ใช้สัจจพจน์ในตัวอย่าง 5.1 และเพิ่มนิยาม ดังนี้

นิยาม 1 สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ x เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ $x = 2n$ บางจำนวนเต็ม n

นิยาม 2 สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ x เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $x = 2n + 1$ บางจำนวนเต็ม n

นิยาม 3 จำนวนเต็มประกอบด้วยจำนวนคู่และจำนวนคี่

นิยาม 4 สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ $x^n = x.x. \ldots . x$ (n จำนวน) เมื่อ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

ทฤษฎี 2 ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคู่

เหตุ a^2 เป็นจำนวนคู่

ผลสรุป a เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

1	a ไม่เป็นจำนวนคู่	เหตุ
2	a เป็นจำนวนคี่	จาก 1 นิยาม 3
3	$a = 2m + 1$ บางจำนวนเต็ม m	นิยาม 2
4	$a^2 = (2m + 1)(2m + 1) = 4m^2 + 4m + 1$	นิยาม 4 และสัจจพจน์ 4
5	$a^2 = 2n + 1$ บาง $n = 2m^2 + 2m$	จาก 4 และสัจจพจน์ 4
6	$2m^2 + 2m$ เป็นจำนวนเต็ม	จาก 3 สัจจพจน์ 1
7	n เป็นจำนวนเต็ม	จาก 5, 6
8	a^2 เป็นจำนวนคี่	จาก 5, 7 นิยาม 2
9	a^2 ไม่เป็นจำนวนคู่	นิยาม 3
10	a ไม่เป็นจำนวนคู่ $\longrightarrow$ a^2 ไม่เป็นจำนวนคู่	จาก 1, 9 ทบ.3.31
11	a^2 เป็นจำนวนคู่ $\longrightarrow$ a เป็นจำนวนคู่	ประพจน์เงื่อนไขกลับและผกผันของ 10

ข. <u>การพิสูจน์โดยการคอนทราดิคชัน</u> (Proof by contradiction)

การอ้างเหตุผล ซึ่งมีเหตุเป็น P และผลสรุปเป็น Q จะสมเหตุสมผล ถ้า P เป็นจริง และ Q เป็นจริง ถ้าเริ่มการพิสูจน์ด้วยการให้ P จริง และสมมติให้ $\sim Q$ เป็นจริง และพิสูจน์โดยใช้หลักเกณฑ์ใน 5.1 พบว่า ข้อสรุปย่อย ๆ อยู่ในรูป $R \wedge \sim R$ ในขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งของการพิสูจน์ ซึ่ง $R \wedge \sim R \Longleftrightarrow F^*$ (F^* แทนประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ) ดังนั้น $\sim(R \wedge \sim R)$ เป็นจริง นั่นคือ

$P \wedge \sim Q \longrightarrow R \wedge \sim R,\ \sim(R \wedge \sim R) \models \sim(P \wedge \sim Q)$ โดย M.T

แต่ $\sim(P \wedge \sim Q) \Longleftrightarrow P \longrightarrow Q$

ดังนั้น $P \longrightarrow Q$ เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง 5.3</u> จงพิสูจน์ว่า $P \longrightarrow Q, P \longrightarrow \sim Q \models \sim P$

พิสูจน์

1	$P \longrightarrow Q$	สมมติฐาน
2	$P \longrightarrow \sim Q$	สมมติฐาน
3	P	สมมติฐาน
4	Q	จาก 1,3 M.P
5	$\sim Q$	จาก 2,3 M.P
6	$Q \wedge \sim Q$	จาก 4,5 Conj.
7	ดังนั้น $\sim P$	จาก 6

<u>ตัวอย่าง 5.4</u> ใช้สัจพจน์ในตัวอย่าง 5.1 และเพิ่มทฤษฎีดังนี้

ทฤษฎี 3 ถ้า a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$
จงพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 4 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มแล้ว ถ้ามีจำนวนเต็ม x ที่ $x + a = b$ แล้วมีจำนวนเต็ม x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

เหตุ a, b เป็นจำนวนเต็ม และมีจำนวนเต็ม x ที่ $x + a = b$
ผลสรุป มีจำนวนเต็ม x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

พิสูจน์

1	ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม	เหตุ
2	สมมติให้มีจำนวนเต็ม 2 จำนวน คือ x_1 และ x_2 ที่ซึ่ง i) $x_1 + a = b$ ii) $x_2 + a = b$ และ iii) $x_1 \neq x_2$	สมมติให้เป็นจริง

3 $x_1 + a = x_2 + a$ สัจจพจน์ 7

4 $x_1 = x_2$ ทบ.3

5 ดังนั้น มีจำนวนเต็ม x เพียงจำนวนเดียว จาก 4 ขัดแย้งกับ 2 (iii)
เท่านั้น ที่ซึ่ง $x + a = b$

นั่นคือ ทฤษฎีนี้เป็นจริง

5.3 การพิสูจน์ประพจน์เงื่อนไขไปกลับ (Proof biconditional proposition)

ยังมีทฤษฎีบางทฤษฎี ทั้งในตรรกศาสตร์และในคณิตศาสตร์ ที่อยู่ในรูปของประพจน์เงื่อนไขไปกลับ ระหว่างข้ออ้างและข้อสรุป " $P \longleftrightarrow Q$ " โดยที่

$$P \longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$$

ดังนั้น ในการพิสูจน์ทฤษฎีหรือประพจน์ประเภทนี้ จะต้องพิสูจน์ว่า

i) $P \longrightarrow Q$ และ

ii) $Q \longrightarrow P$

<u>ตัวอย่าง 5.5</u> ใช้สัจจพจน์และนิยามในตัวอย่าง 5.1 และ 5.2

ทฤษฎี 5 a^2 จะเป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

i) จะแสดงว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่
ได้พิสูจน์แล้ว ในตัวอย่าง 5.2

ii) จะแสดงว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

1	a เป็นจำนวนคู่	เหตุ
2	$a = 2n$ บางจำนวนเต็ม n	นิยาม 1
3	$a^2 = 2n \cdot 2n$ บางจำนวนเต็ม n	นิยาม 4
4	$a^2 = 2(2n^2)$	สัจจพจน์ 2(ข) และนิยาม 4

5 $2m^2$ เป็นจำนวนเต็ม จาก 2 และสัจจพจน์ 2(ข)

6 a^2 เป็นจำนวนคู่ จาก 4,5 และนิยาม 1

จาก i) และ ii) จะได้ว่า

a^2 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคู่

5.4 Disproof by Counter Example

การพิสูจน์แบบนี้ เป็นการปฏิเสธการอ้างเหตุผลที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งอยู่ในรูปของประพจน์บอกปริมาณสากล โดยการแสดงให้เห็นจริงด้วยการยกตัวอย่างอย่างน้อย 1 ตัวอย่าง ให้สอดคล้องกับประพจน์ที่ปฏิเสธ นั่นคือ ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า $(\forall x)(Px \longrightarrow Qx)$ เป็นเท็จ ต้องแสดงว่า $\sim(\forall x)(Px \longrightarrow Qx)$ เป็นจริง หรือแสดงว่า $(\exists x)(Px \wedge \sim Qx)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\sim(\forall x)(Px \longrightarrow Qx) \Longleftrightarrow (\exists x)(Px \wedge \sim Qx)$

ตัวอย่าง 5.6 จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็ม x, x + 1 = x

พิสูจน์

ประพจน์ $(\forall x)(x + 1 = x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม เป็นเท็จ เนื่องจาก $\sim(\forall x)(x + 1 = x) \Longleftrightarrow (\exists x)(x + 1 \neq x)$ เป็นจริง ดังตัวอย่าง

มี 3 เป็นจำนวนเต็ม ที่ซึ่ง $3 + 1 \neq 3$

ดังนั้น " สำหรับทุกจำนวนเต็ม x, x + 1 = x " เป็นเท็จ

5.5 การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลโดยการขจัด (Proof of validity by elimination)

การพิสูจน์บางอย่างในทางคณิตศาสตร์ เรียกว่า การพิสูจน์โดยการขจัด ซึ่งมีหลักเกณฑ์และวิธีการดังนี้

ถ้าข้อสรุปของการอ้างเหตุผล มีความน่าจะเป็นได้หลายกรณี และในกรณีอื่น ๆ แต่ละกรณี สามารถพิสูจน์ได้ว่า ไม่สมเหตุสมผล อาจจะโดยวิธีการ disproof by counter example แล้วกรณีที่เหลืออยู่กรณีหนึ่งและกรณีเดียว จะเป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผล ดังการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

จงพิสูจน์การอ้างเหตุผลต่อไปนี้

เหตุ 1 : $P \rightarrow (A \vee B)$

เหตุ 2 : $\sim B$

ผลสรุป : $P \rightarrow A$

พิสูจน์

1	$P \rightarrow (A \vee B)$	เหตุ 1
2	$\sim B$	เหตุ 2
3	P	สมมติฐาน
4	$A \vee B$	จาก 1,2 M.P
5	A	จาก 2,4 D.S
6	$P \rightarrow A$	จาก 3,5 ทบ. 3.31

ในทางปฏิบัติ การสรุปว่า $P \rightarrow A$ โดยหาว่า $\sim B$ เป็นจริง อาจจะทำได้ยาก ดังนั้นโดย Add. จะได้ $\sim B \vee \sim P$ ซึ่ง

$\sim B \vee \sim P \Longleftrightarrow B \rightarrow \sim P$

นั่นคือ การอ้างเหตุผลข้างต้นจะเปลี่ยนเป็น

เหตุ 1 : $P \rightarrow (A \vee B)$

เหตุ 2 : $B \rightarrow \sim P$

ผลสรุป : $P \rightarrow A$

ในกรณีที่ข้อสรุปเป็นไปได้หลายกรณี คือ A หรือ B หรือ C หรือ ... หรือ S จะกำหนดแบบแผนการพิสูจน์โดยการขจัดดังนี้

$P \longrightarrow (A \vee B \vee C \vee \dots \vee S)$

$S \longrightarrow \sim P$

....

$C \longrightarrow \sim P$

$\underline{B \longrightarrow \sim P}$

$\therefore\ P \longrightarrow A$

ตัวอย่าง 5.7 โดยใช้สัจจพจน์และนิยามของตัวอย่าง 5.2 จงพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 6 ถ้า $x.y$ เป็นจำนวนคี่แล้ว x ย่อมเป็นจำนวนคี่ และ y ย่อมเป็นจำนวนคี่

พิสูจน์โดยการขจัด

ให้ P : $x.y$ เป็นจำนวนคี่

ความน่าจะเป็นทั้งหมด คือ A : x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคี่

หรือ B : x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคู่

หรือ C : x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคี่

หรือ D : x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคู่

การขจัด D D : x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคู่

ให้ $x = 2m,\ y = 2n$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนเต็ม

$x.y = (2m).(2n) = 2(2m.n) = 2p$ เมื่อ $p = 2m.n$ และ p เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $x.y$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ $D \longrightarrow \sim P$

การขจัด C C : x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคี่

ให้ $x = 2m,\ y = 2n + 1$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนเต็ม

$x.y = (2m).(2n + 1) = 2\,[(2m.n) + m] = 2p$ เมื่อ $p = 2mn + m$ และ p เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $x.y$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ $C \rightarrow \sim P$

<u>การขจัด B</u> B : x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคู่

ให้ $x = 2m + 1$, $y = 2n$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็ม

$x.y = (2m + 1).(2n) = 2[(2m.n) + n] = 2p$ เมื่อ $p = 2mn + n$ และ p เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $x.y$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ $B \rightarrow \sim P$

สรุปได้ว่า $P \rightarrow A$ นั่นคือ

ถ้า $x.y$ เป็นจำนวนคี่แล้ว x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคี่

5.6 <u>การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลโดยการยกกรณี</u> (Proof of validity by cases)

การพิสูจน์ชนิดนี้ เกิดจากข้อความที่เป็นเหตุสามารถแยกเป็นกรณีต่าง ๆ ได้หลายกรณี กล่าวคือ อยู่ในรูป $P \rightarrow (M \vee N \vee O)$ และแต่ละกรณีต่างก็เป็นข้ออ้างที่จะได้ผลสรุป Q คือ $M \rightarrow Q$, $N \rightarrow Q$ และ $O \rightarrow Q$ แล้วจะได้ $P \rightarrow Q$ ดังการพิสูจน์ต่อไปนี้

เหตุ 1 : $P \rightarrow (M \vee N \vee O)$

เหตุ 2 : $M \rightarrow Q$

เหตุ 3 : $N \rightarrow Q$

เหตุ 4 : $O \rightarrow Q$

ผลสรุป : $P \rightarrow Q$

พิสูจน์

1	$P \rightarrow (M \vee N \vee O)$	เหตุ
2	$M \rightarrow Q$	เหตุ
3	$N \rightarrow Q$	เหตุ

4	$O \longrightarrow Q$	เหตุ
5	$(M \longrightarrow Q) \wedge (N \longrightarrow Q) \wedge (O \longrightarrow Q)$	จาก 2,3,4 Conj.
6	$(\sim M \vee Q) \wedge (\sim N \vee Q) \wedge (\sim O \vee Q)$	จาก 5 $A \longrightarrow B \Longleftrightarrow \sim A \vee B$
7	$(\sim M \wedge \sim N \wedge \sim O) \vee Q$	จาก 6
8	$\sim(M \vee N \vee O) \vee Q$	จาก 7
9	$(M \vee N \vee O) \longrightarrow Q$	จาก 8
10	$P \longrightarrow Q$	จาก 1,9 H.S.

นั่นคือ แบบแผนของการพิสูจน์ โดยการยกกรณี เป็นดังนี้

$$P \longrightarrow (A \vee B \vee C \vee \ldots \vee S)$$
$$A \longrightarrow Q$$
$$B \longrightarrow Q$$
$$C \longrightarrow Q$$
$$\ldots$$
$$\underline{S \longrightarrow Q}$$
$$\therefore P \longrightarrow Q$$

<u>ตัวอย่าง 5.8</u> ใช้นิยามและสัจจพจน์ ในตัวอย่าง 5.2 จงพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 7 ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์โดยใช้การแยกกรณี

โดยนิยาม 3 ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว x จะเป็นจำนวนคู่ หรือ x เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น เราจะพิสูจน์ 2 กรณี ดังนี้

i) ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่ และ

ii) ถ้า x เป็นจำนวนคี่ แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ i)

		เหตุ
1	x เป็นจำนวนคู่	
2	x^2 เป็นจำนวนคู่	ทบ. 5 ในตัวอย่าง 5.5
3	$x = 2n$ บางจำนวนเต็ม n	นิยาม 1
4	$x^2 = 2m$ บางจำนวนเต็ม m	นิยาม 1
5	$x^2 + x = 2m + 2n$	สัจจพจน์ 7
6	$x^2 + x = 2(m + n)$	สัจจพจน์ 4
7	$m + n$ เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์ 1(ก)
8	$x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่	จาก 6,7 นิยาม 1

นั่นคือ ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์ ii)

		เหตุ
1	x เป็นจำนวนคี่	
2	x^2 เป็นจำนวนคี่	ผลจากทบ.2 ตัวอย่าง 5.2
3	$x = 2n + 1$ บางจำนวนเต็ม n	นิยาม 2
4	$x^2 = 2m + 1$ บางจำนวนเต็ม m	นิยาม 2
5	$x^2 + x = (2m + 1) + (2n + 1)$	สัจจพจน์ 7
6	$x^2 + x = 2(m + n + 1)$	สัจจพจน์ 2(ก), 3(ก), 4
7	$m + n + 1$ เป็นจำนวนเต็ม	จาก 3,4 สัจจพจน์ 1(ก)
8	$x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่	จาก 6,7 นิยาม 1

นั่นคือ ถ้า x เป็นจำนวนคี่ แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่

จาก i) และ ii) โดยการแยกกรณี จะได้ว่า

ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่ .

5.7 การพิสูจน์ความสมเหตุสมผลโดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ (Proof of validity by mathematical induction)

การพิสูจน์โดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ เป็นการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของประพจน์ $(\forall n)(Pn)$ เมื่อ n เป็นจำนวนธรรมชาติ โดยมีกฎเกณฑ์การพิสูจน์จากขั้นตอนหนึ่ง ไปสู่ข้อสรุปอีกขั้นตอนหนึ่ง โดยใช้ Modus Ponens กล่าวคือ ทดสอบว่า P_1 เป็นประพจน์ที่เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงแล้ว P_2 เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงแล้ว ทดสอบต่อไป จนถึง P_k เมื่อ k เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ ถ้า P_k เป็นจริง ทดสอบได้หรือไม่ว่า P_{k+1} เป็นจริง ถ้า P_{k+1} เป็นจริง จึงสรุปว่า P_n เป็นจริง สำหรับทุก ๆ จำนวนธรรมชาติ n การพิสูจน์ทุกขั้นตอนจะเป็น

$$P_1$$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \longrightarrow P_2 \\ P_2 \longrightarrow P_3 \\ \vdots \\ P_{n-1} \longrightarrow P_n \\ \vdots \end{array}\right\} (\forall k)(P_k \longrightarrow P_{k+1})$$

หรือ

$$\begin{array}{lll} P_1 \quad , & P_2 \quad , & P_3 \quad \text{และต่อ ๆ ไป} \\ \underline{P_1 \longrightarrow P_2} & \underline{P_2 \longrightarrow P_3} & \underline{P_3 \longrightarrow P_4} \\ \therefore\ P_2 & \therefore\ P_3 & \therefore\ P_4 \end{array}$$

ซึ่งจะได้

$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$

นั่นคือ พิสูจน์ได้ว่า $(\forall n)(Pn)$

จากวิธีการเช่นนี้ กำหนดเป็นสัจจพจน์ดังนี้

$$P_1 \wedge (\forall k)(P_k \rightarrow P_{k+1}) \Rightarrow (\forall n)(Pn)$$

นั่นคือ ถ้าสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$P_1 \wedge (\forall k)(P_k \rightarrow P_{k+1})$$

และโดย M.P จะอนุมานได้ว่า

$$(\forall n)(Pn)$$

ซึ่งมีขั้นตอนการพิสูจน์ดังนี้

1. ทดสอบว่า P_1 เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริง
2. สมมติให้ P_k เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ สามารถทดสอบได้หรือไม่ว่า P_{k+1} เป็นจริง และถ้าเป็นจริง
3. สรุปว่า $(\forall n)(Pn)$ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

<u>ตัวอย่าง 5.9</u> จงพิสูจน์ว่า

$$Pn : \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิสูจน์

1 ทดสอบ P_1

$$P_1 : \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{เป็นจริง}$$

2 ทดสอบ P_{k+1} โดยให้ P_k เป็นจริง สำหรับทุก k ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ

นั่นคือ สมมติให้ $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

บวก $\frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$ ทั้ง 2 ข้าง

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$= \frac{k[(k+1)+1]+1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)[(k+1)+1]}$$

$$= \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

จะพบว่า P_{k+1} เป็นจริง

นั่นคือ Pn เป็นประพจน์ที่เป็นจริงสำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ

<u>ตัวอย่าง 5.10</u> จงพิสูจน์ว่า $2^n < 2^{n+1}$ ทุก n ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ

พิสูจน์

ให้ $P_n : 2^n < 2^{n+1}$

1 ทดสอบ P_1

$P_1 : 2 < 2^2$

$2 < 4$ เป็นจริง

2 ทดสอบ P_{k+1} โดยให้ P_k เป็นจริง ทุก ๆ k ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ

นั่นคือ สมมติให้ $2^k < 2^{k+1}$

$2^k \cdot 2 < 2^{k+1} \cdot 2$

$2^{k+1} < 2^{(k+1)+1}$

จะได้ว่า P_{k+1} เป็นจริง

นั่นคือ $(\forall n)(Pn)$ เป็นจริง เมื่อ n เป็นจำนวนธรรมชาติ