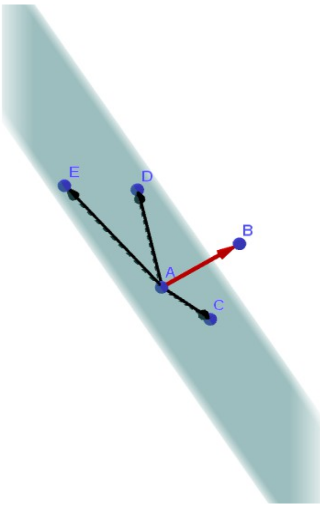
Teoría – Tema 5

Teoría - 4 - Vectores perpendiculares

Vectores perpendiculares

Dos vectores son perpendiculares si forman entre sí 90º (ángulo recto).

Pensemos en tres dimensiones. Dado un vector tridimensional, hay infinitos vectores perpendiculares a este. Fíjate en la siguiente imagen. El vector de origen A y final B es perpendicular al plano. Cualquier vector contenido en el plano será, a su vez, perpendicular al vector marcado en rojo.

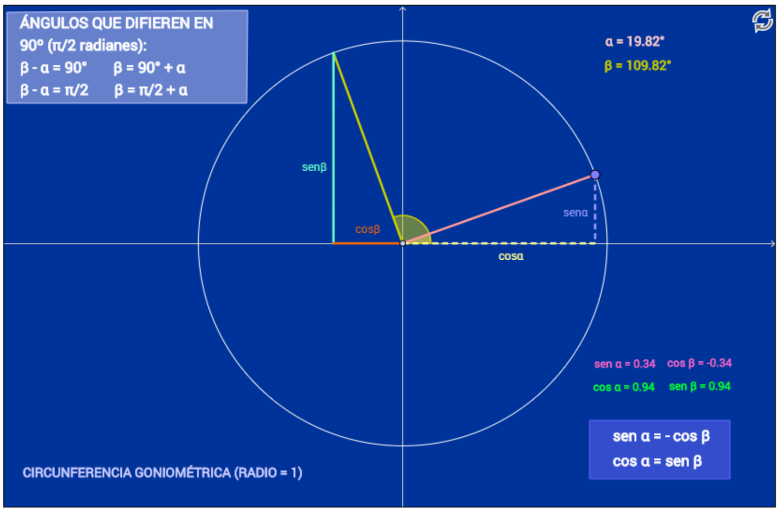


Para poder estudiar la posición relativa entre dos vectores deberemos estudiar cómo calcular el ángulo formado entre dos vectores. Esto lo veremos más adelante.

En el siguiente apartado vamos a centrarnos en los vectores perpendiculares en dos dimensiones, ya que con el concepto de pendiente podemos sacar una relación útil para demostrar la perpendicularidad entre vectores.

El caso particular de perpendicularidad en dos dimensiones

Sean los vectores bidimensionales $\vec{u}=(u_x, u_y)$ y $\vec{v}=(v_x, v_y)$. Recuperamos aquí una imagen que ya trabajamos en el bloque de trigonometría, cuando estudiamos ángulos separados por 90º.



En la circunferencia goniométrica, la proyección horizontal del primer ángulo $(\cos\alpha)$ coincide con la proyección vertical del segundo ángulo $(sen\,\beta)$ $\rightarrow$ $\cos\alpha = sen\,\beta$

Mientras que la proyección vertical del primer ángulo $(sen\,\alpha)$ coincide con el opuesto de la proyección horizontal del segundo ángulo $(\cos\beta)$ $\rightarrow$ $sen\,\alpha = -\cos\beta$

La proyección horizontal de cada ángulo la podemos ver como la primera componente de un vector. Y la proyección vertical de cada ángulo la podemos ver como la segunda componente de un vector.

$$\vec{u}=(u_x, u_y)=(\cos\alpha, sen\,\alpha) \quad , \quad \vec{v}=(v_x, v_y)=(\cos\beta, sen\,\beta)$$

El cociente entre la segunda componente y la primera da lugar a la pendiente del vector.

$$m_{\vec{u}}=tg(\alpha)=\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$m_{\vec{v}}=tg(\beta)=\frac{sen\,\beta}{\cos\beta}$$ → usamos $\cos\alpha = sen\,\beta \quad , \quad sen\,\alpha = -\cos\beta \rightarrow m_{\vec{v}}=tg(\beta)=\frac{\cos\alpha}{-sen\,\alpha}$

Multiplicamos las pendientes de los dos vectores perpendiculares.

$$m_{\vec{u}} \cdot m_{\vec{v}} = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{-sen\,\alpha} = -1$$ → **El producto de pendientes de dos vectores perpendiculares es -1**

Este resultado es muy, muy, muy importante. De hecho, volveremos a él cuando estudiemos rectas en el plano bidimensional. Y diremos que el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares vale -1. La pendiente está relacionada con la dirección del vector, por lo tanto, la pendiente de un vector coincide con la pendiente de la recta que lo contiene.

Recuerda, una vez más, que el concepto de pendiente solo se aplica a vectores en dos dimensiones.

Dado un vector de dos dimensiones, existen infinitos vectores perpendiculares a él. Pero existe una forma muy sencilla de razonar dos vectores perpendiculares a partir de un dado (insisto, este razonamiento solo sirve para vectores en dos dimensiones).

Sea $\vec{u}=(u_x, u_y)$. Si intercambiamos la posición de las coordenadas y modificado el signo a una de ellas, obtenemos un vector perpendicular al de partida. Es decir:

$\vec{v}=(-u_y, u_x)$ → es perpendicular a $\vec{u}=(u_x, u_y)$, ya que se cumple $m_{\vec{u}} \cdot m_{\vec{v}}=-1$

$\vec{w}=(u_y, -u_x)$ → es perpendicular a $\vec{u}=(u_x, u_y)$, ya que se cumple $m_{\vec{u}} \cdot m_{\vec{w}}=-1$

Fíjate, además, que los vectores $\vec{v}=(-u_y, u_x)$ y $\vec{w}=(u_y, -u_x)$ son antiparalelos entre sí, ya que poseen un factor de proporción $k=-1$.

Ejemplo 1 resuelto

Obtener dos vectores perpendiculares a $\vec{u}=(2,5)$.

Un primera solución sería $\vec{v}=(-5,2)$. Efectivamente, se cumple que $m_{\vec{u}}=\frac{5}{2}$, $m_{\vec{v}}=\frac{2}{-5}$ y por lo tanto: $m_{\vec{u}} \cdot m_{\vec{v}}=\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{-5}=-1$.

Asimismo, otra solución sería $\vec{w}=(5,-2)$. Donde $m_{\vec{u}}=\frac{5}{2}$, $m_{\vec{w}}=\frac{-2}{5}$ y nuevamente se confirma la relación: $m_{\vec{u}} \cdot m_{\vec{w}}=\frac{5}{2} \cdot \frac{-2}{5}=-1$.