MATEMÁTICAS I

1º Bachillerato

Ejercicios Complejos tema 7

Curso 2017-1018

Colegio "Los Olivos"

Formas de expresar un número complejo

Expresa en las tres formas habituales los complejos:

a) $(1+i)^2$ **b)** $(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$ **c)** $i^7 + i^{17}$ **d)** $\sqrt{2}_{45^\circ}$

Expresiones con parámetros

Calcula *a* para que $\frac{a+2i}{5+12i}$ sea imaginario puro.

Raíces y potencias de números complejos

Calcula las raíces quintas de $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ expresando el resultado en forma polar.

Calcula el siguiente número complejo: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$.

Resolución de ecuaciones

Resuelve las siguientes ecuaciones dando las soluciones en forma binómica.

a) $x^2 + ix + 1 = 0$ **b)** $x^2 + 2ix - 1 = 0$ **c)** $x^4 + x^2 + 1 = 0$

SOLUCIONES

9. Calcula *a* para que $\dfrac{a+2i}{5+12i}$ sea imaginario puro.

$$\frac{a+2i}{5+12i}=\frac{(a+2i)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)}=\frac{5a-12ai+10i-24i^2}{25+144}=\frac{24+5a}{169}+\frac{10-12a}{169}i\Rightarrow\frac{24+5a}{169}=0\Rightarrow a=-\frac{24}{5}$$

15. Expresa en las tres formas habituales los complejos:

a) $(1+i)^2$ **b)** $\dfrac{1}{i}$ **c)** i^7+i^{17} **d)** $\dfrac{1}{2}(1+i)\left(1+i^{-4}\right)$

a) $(1+i)^2=1+i^2+2i=2i=2_{90^\circ}=2\left(\cos 90^\circ+i\operatorname{sen}90^\circ\right)$

b) $\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i=1_{270^\circ}=1\left(\cos 270^\circ+i\operatorname{sen}270^\circ\right)$

c) $i^7+i^{17}=i^3+i^1=-i+i=0$, no tiene forma polar ni trigonométrica.

d) $1+i^{-4}=1+\dfrac{1}{i^4}=1+\dfrac{1}{1}=2\Rightarrow\dfrac{1}{2}(1+i)\left(1+i^{-4}\right)=1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}=\sqrt{2}\left(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ\right)$

22. Calcula las raíces quintas de $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ expresando el resultado en forma polar.

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{60^\circ} \Rightarrow \sqrt[5]{1_{60^\circ}} = s_\beta$, con $s = \sqrt[5]{1} = 1$ y $\beta = \frac{60^\circ + 360^\circ k}{5} = 12^\circ + 72^\circ k \ (k = 0, 1, 2, 3, 4)$, así, las raíces quintas de $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ son $z_1 = 1_{12^\circ}$, $z_2 = 1_{84^\circ}$, $z_3 = 1_{156^\circ}$, $z_4 = 1_{228^\circ}$ y $z_5 = 1_{300^\circ}$.

31. Resuelve las siguientes ecuaciones dando las soluciones en forma binómica.

a) $x^2 + ix + 1 = 0$ **b)** $x^2 + 2ix - 1 = 0$ **c)** $x^4 + x^2 + 1 = 0$ **d)** $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

a) $x^2 + ix + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-i \pm \sqrt{i^2 - 4}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{-5}}{2} = \frac{-i \pm \sqrt{5}i}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}i \\ x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}i \end{cases}$

b) $x^2 + 2ix - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2i \pm \sqrt{4i^2 + 4}}{2} = -i$

c) Haciendo el cambio $z = x^2$ tenemos $z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{120^\circ} \\ z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240^\circ} \end{cases}$

Deshaciendo el cambio, haciendo las raíces cuadradas de z_1 y z_2, obtenemos las soluciones $x_1 = 1_{60^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_2 = 1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = 1_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_4 = 1_{300^\circ} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

d) Al ser una ecuación polinómica con coeficientes reales, para cada solución su conjugada también será solución, por tanto, una de las tres soluciones es un número real. Probando los divisores del término independiente obtenemos como solución $x_1 = 2$ y $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$, por lo que las otras dos soluciones se obtienen resolviendo $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

65. Calcula el siguiente número complejo: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$.

$1+i\sqrt{3}=2_{60^\circ}$ y $1+i=\sqrt{2}_{45^\circ}$, por tanto, $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2_{60^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{15^\circ}=\sqrt{2}_{15^\circ}$ y $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}=\left(\sqrt{2}_{15^\circ}\right)^{30}=\left(2^{15}\right)_{450^\circ}=$

$=\left(2^{15}\right)_{90^\circ}=2^{15}i$