Neyfa Khalisha Amaluna (23030130014)

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd r
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh. ax+by=c.
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan c2
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pada
sisi positif (kanan/atas) garis
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni sin(alpha)^2 dengan
alpha sudut yang menghadap sisi a.
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a, b, c.
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk suatu segitiga
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan sa=sin(phi)^2 spread a.
```

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga titik dan plotkan.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri mencakup fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format untuk garis adalah [a,b,c], yang merepresentasikan garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

Hitung garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

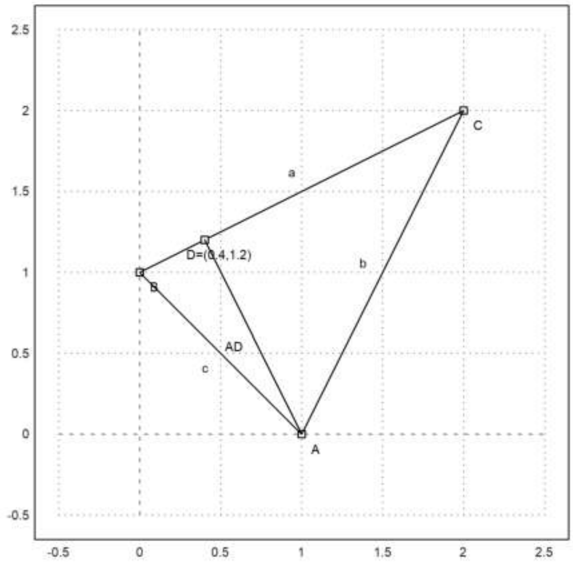
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan persimpangannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Rencanakan itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

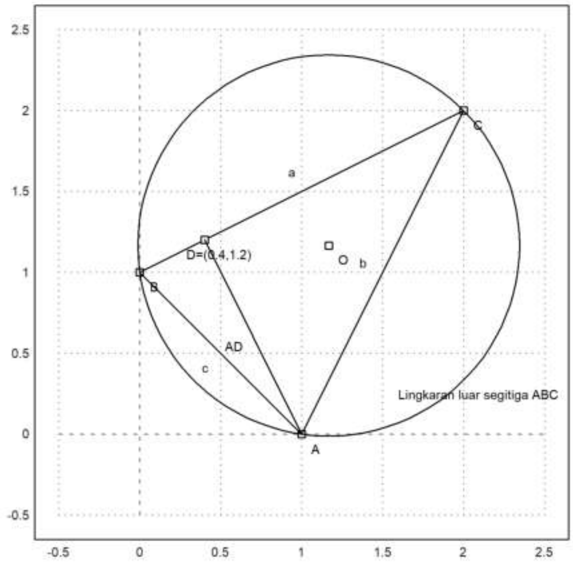
Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang, lingkarilah segitiga tersebut.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
 [1.16667,  1.16667]
 1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

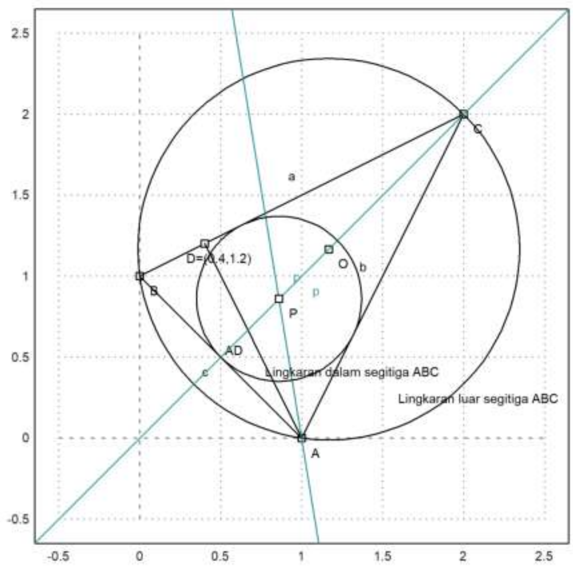
```
 [0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
 0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```



Latihan (1)

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

Contoh 2: Geometri Smbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.

File geometri.e menyediakan fungsi-fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan komputasi simbolik sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi menyediakan komputasi simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC

                             [- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan untuk sebuah garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$2\,y-x=2$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough([x1,y1],[x2,y2]),x,y), $solve(%,y) // persamaan garis melalui(x1, y1) dan (x2, y
```

$$x\,\left(y_1-y_2\right)+\left(x_2-x_1\right)\,y=x_1\,\left(y_1-y_2\right)+\left(x_2-x_1\right)\,y_1$$

$$\left[y=\frac{-\left(x_1-x\right)\,y_2-\left(x-x_2\right)\,y_1}{x_2-x_1}\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$\left(x_1-1\right)\,y-x\,y_1=-y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC

                              [2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h

                                2   6
                               [-, -]
                                5   5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6},\frac{7}{6},\frac{5}{3\,\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\,\sqrt{2}}$$

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y=x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 garis bagi sudut
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya

    [0.86038,  0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

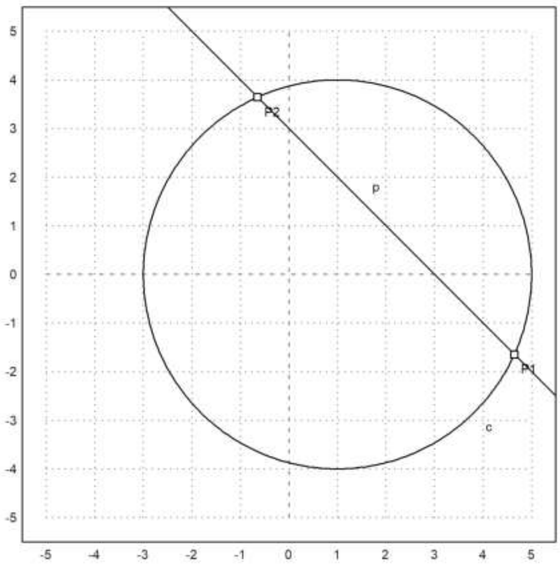
Tentu saja, kita juga bisa memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik perpotongan.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2, f

    [4.64575,  -1.64575]
    [-0.645751,  3.64575]
    2
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```



Hal yang sama pada Maxima.

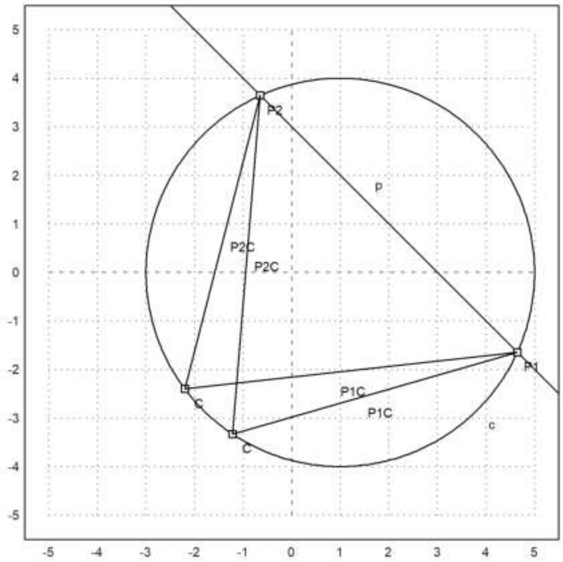
```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4

                          [1, 0, 4]

>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C

                          [1, 1, 3]

>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2, 1-\sqrt{7}\right], \left[2-\sqrt{7}, \sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))

    69°17'42.68''

>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
```

```
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))

    69°17'42.68''

>insimg;
```

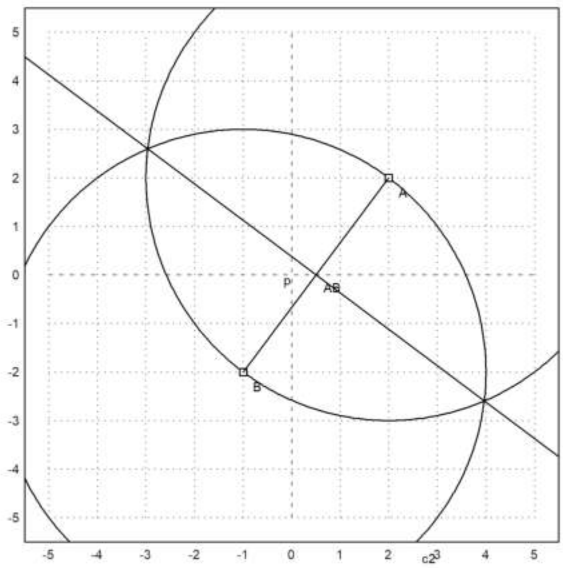


Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:

1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup rumit. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita menyelesaikan untuk y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + b_2^{\,2} + b_1^{\,2} - a_2^{\,2} - a_1^{\,2}}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y = \frac{-\left(2\,b_1 - 2\,a_1\right)\,x + b_2^{\,2} + b_1^{\,2} - a_2^{\,2} - a_1^{\,2}}{2\,b_2 - 2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y = \frac{\left(b_2 - a_2\right)\,x - a_1\,b_2 + a_2\,b_1}{b_1 - a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1 - a_1)}{(b_2 - a_2)} \times \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2,$$

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

$$L = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

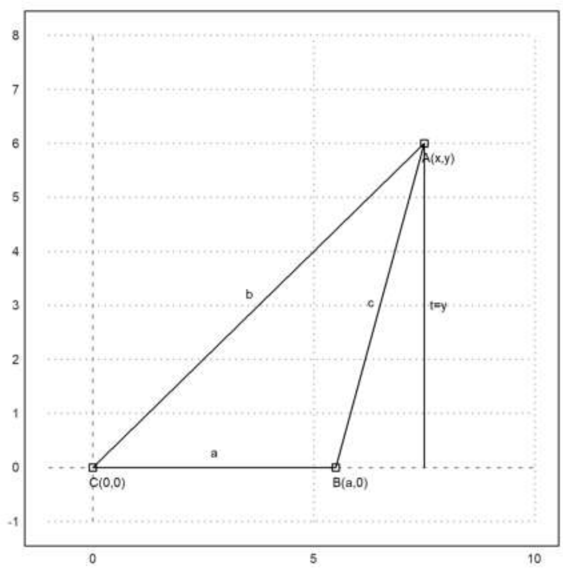
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>setPlotRange(-1,10,-1,8); plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)");  ...
  plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15);  ...
 plotSegment([0,0],[7.5,6],"b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                  2    2    2             4      2  2      2  2    4      2  2    4
               - c  + b  + a        sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
        [[x = --------------, y = - ------------------------------------------------],
                   2 a                                    2 a
                             2    2    2             4      2  2      2  2    4      2  2    4
                          - c  + b  + a        sqrt(- c  + 2 b  c  + 2 a  c  - b  + 2 a  b  - a )
                    [x = --------------, y = ------------------------------------------------]]
                              2 a                                    2 a
```

Ekstrak larutan y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a , b , c\right)=\frac{\left| a\right| \,\left| ysol\right| }{2}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6) // luas segitiga dengan panjang sisi-sisi 2, 5, 6
```

$$Luas=\left| ysol\right|$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
    useglobal; return abs(a)*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
       ^
```

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan kedua sisi 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```

```
Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
 %ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Kasus umum juga bisa digunakan.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$all$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Sudah diketahui bahwa ini adalah sebuah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$sol_2$$

Dan membuat fungsi-fungsi ini.

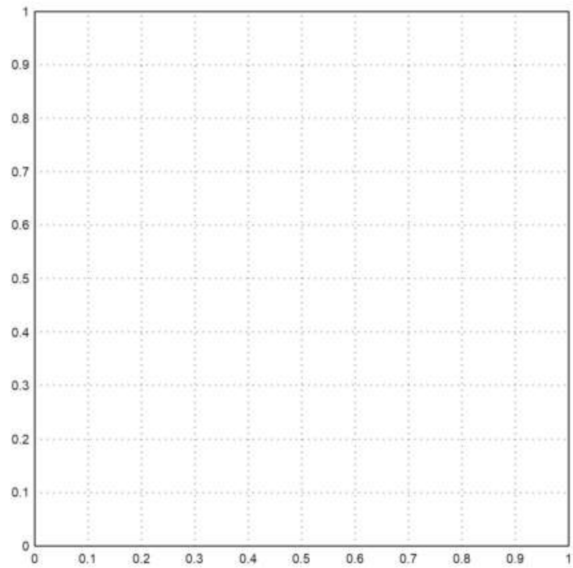
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

$$0$$

$$0$$

Sekarang kita dapat menggambar himpunan tersebut. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Sudah diketahui bahwa kita mendapatkan sebuah elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm, ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{a^2}{d^2}$$

Kita melihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Dengan demikian, luas segitiga dengan a+b+c=d adalah maksimal, jika segitiga tersebut sama sisi. Kita ingin membuktikannya secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{a\,ysol^2}{2}=0,0=0\right]$$

Kita mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusi a = b = c = d / 3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$[[a=0,b=\%r_1]]$$

Ada juga metode Lagrange, yang memaksimalkan H(a,b,c)^2 sehubungan dengan a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
    diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
                   d       d                  d             d
       [[a = 0, b = -, c = -, la = 0], [a = -, b = 0, c = -, la = 0], 
                   2       2                  2             2
                                                                      3
                      d       d                        d       d       d        d
                 [a = -, b = -, c = 0, la = 0], [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
                      2       2                        3       3       3       108
```

Kita bisa membuat plot situasi

Pertama-tama, tetapkan titik-titik di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

```
Maxima said:
at: improper argument: sol[2]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
                     ^
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0,0]$$

$$[a,0]$$

Kemudian, tetapkan kisaran plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
 a=4; b=3; c=2; ...
 plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
 plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```

```
Function setPlotRange not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
setPlotRange(0,5,-2,3); a=4; b=3; c=2; plotPoint(mxmeval("B"), ...
                      ^
```

Plot segmen-segmen tersebut.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
 plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
 plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```

```
Variable A not found!
Use global or local variables defined in function mxmeval.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
                        ^
```

Compute the middle perpendicular in Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan bagian tengah lingkar.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kita mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$distance\left(lineIntersection\left(middlePerpendicular\left(A,\left[0,0\right]\right),middlePerpendicular\left(\left[0,0\right],\left[a,0\right]\right)\right),\left[0,0\right]\right)$$

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>plotPoint(U()); ...
 plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

```
Variable or function A not found.
Error in expression: lineIntersection(middlePerpendicular(A,[0,0]),middlePerpendicular([0,0],[a,0]))
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
             ^
```

Dengan menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=2r$$

untuk jari-jari. Kita bisa mengecek apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita mengkuadratkannya.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$\frac{c^2}{\sin^2 computeAngle\left(A,\left[0,0\right],\left[a,0\right]\right)}$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari segitiga apa pun yang tidak sama sisi. Garis ini merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk ortosentrum, circumcentrum, centroid, titik Exeter, dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Sebagai demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga dalam Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik-titiknya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

```
Function setPlotRange not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint ...
               ^
```

Kita juga bisa menambahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```

```
Function plotSegment not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""): ...
                    ^
```

Berikut ini adalah luas area segitiga, dengan menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$areaTriangle\left([-1,-1],[2,0],[1,2]\right)$$

Kita dapat menghitung koefisien dari sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
                        lineThrough([- 1, - 1], [2, 0])
```

Dan juga mendapatkan formula untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$getLineEquation\left(lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right),x,y\right)$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik tersebut akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$getHesseForm\left(lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right),x,y,[1,2]\right)$$

$$getHesseForm\left(lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right),1,2,[1,2]\right)$$

Sekarang kita menghitung keliling ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$getCircleEquation\left(circleThrough\left([-1,-1],[2,0],[1,2]\right),x,y\right)$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$getCircleCenter\left(circleThrough\left([-1,-1],[2,0],[1,2]\right)\right)$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolik. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```

```
Function circleThrough not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: circleThrough([-1,-1],[2,0],[1,2])
Error in:
plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"): ...
                ^
```

Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (pusat ortosentrum) secara numerik dengan perintah berikut ini.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
   perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$lineIntersection\left(perpendicular\left([-1,-1],lineThrough\left([1,2],[2,0]\right)\right),perpendicular\left([2,0],lineThrough\left([-1,-1],[1,2]\right)\right)\right)$$

Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga tersebut.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$getLineEquation\left(lineThrough\left(lineIntersection\left(perpendicular\left([-1,-1],lineThrough\left([1,2],[2,0]\right)\right),perpendicular\left([2,0],lineThrough\left([-1,-1],[1,2]\right)\right)\right),getCircleCenter\left(circleThrough\left([-1,-1],[2,0],[1,2]\right)\right)\right),x,y\right)$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

```
Function lineThrough not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: lineIntersection(perpendicular([-1,-1],lineThrough([1,2],[2,0])),perpendicular([2,0],
Error in:
plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"): ...
              ^
```

Pusat gravitasi harus berada pada garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

[illegible]

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```

```
Function plotPoint not found.
Try list ... to find functions!
Error in:
plotPoint(M(),"M"): // titik berat ...
                  ^
```

Teori mengatakan bahwa MH = 2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$\frac{distance\left(\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right], lineIntersection\left(perpendicular\left([-1,-1], lineThrough([1,2],[2,0])\right), perpendicular\left([2,0], lineThrough([-1,-1],[1,2])\right)\right)\right)}{distance\left(\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right], getCircleCenter\left(circleThrough([-1,-1],[2,0],[1,2])\right)\right)}$$

Fungsi-fungsi ini juga mencakup fungsi untuk sudut.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$computeAngle([-1,-1],[1,2],[2,0])$$

```
Function computeAngle not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: computeAngle([-1,-1],[1,2],[2,0])
Error in:
 $computeAngle(A,C,B), degprint(%()) ...
                                  ^
```

Persamaan untuk bagian tengah lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$lineIntersection\left(angleBisector([-1,-1],[1,2],[2,0]), angleBisector([1,2],[2,0],[-1,-1])\right)$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

[illegible]

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```

```
Function angleBisector not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: circleWithCenter(lineIntersection(angleBisector([-1,-1],[1,2],[2,0]),angleBisector([
Error in:
color(5); plotCircle(LD()): ...
                        ^
```

Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$getHesseForm\left(lineThrough([-1,-1],[2,0]), x, y, [1,2]\right) - distance([x,y],[1,2]) = 0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```

```
Function lineThrough not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: getHesseForm(lineThrough([-1,-1],[2,0]),x,y,[1,2])-distance([x,y],[1,2])
 %ploteval2:
    else return f$(x,y,args());
fcontour:
    Z=%ploteval2(f$,X,Y,maps;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    =style,=outline,=frame);
```

Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi solver default Maxima hanya bisa menemukan solusinya jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kita mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
        [distance([x, y], [1, 2]) =
- getHesseForm(lineThrough([- 1, - 1], [2, 0]), x, y, [1, 2]),
distance([x, y], [1, 2]) = getHesseForm(lineThrough([- 1, - 1],
[2, 0]), x, y, [1, 2])]
```

Solusi pertama adalah

$$akar_1$$

Menambahkan solusi pertama ke dalam plot menunjukkan, bahwa ini memang jalur yang kita cari. Teori mengatakan bahwa ini adalah sebuah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```

```
Function lineThrough not found.
Try list ... to find functions!
Error in expression: -getHesseForm(lineThrough([-1,-1],[2,0]),x,y,[1,2])
 %ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = -getHesseForm\left(lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right),x,y,[1,2]\right)$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$distance\left(\left[-1,-getHesseForm\left(lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right),-1,y,[1,2]\right)\right],[1,2]\right)$$

$$distance\left(\left[-1.0,-1.0\,getHesseForm\left(lineThrough\left([-1.0,-1.0],[2.0,0.0]\right),-1.0,y,[1.0,2.0]\right)\right],[1.0,2.0]\right)$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$projectToLine\left(\left[-1,-getHesseForm\left(lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right),-1,y,[1,2]\right)\right],lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right)\right)$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$distance\left(\left[-1,-getHesseForm\left(lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right),-1,y,[1,2]\right)\right],projectToLine\left(\left[-1,-getHesseForm\left(lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right),-1,y,[1,2]\right)\right],lineThrough\left([-1,-1],[2,0]\right)\right)\right)$$

$$distance\left(\left[-1.0,-1.0\,getHesseForm\left(lineThrough\left([-1.0,-1.0],[2.0,0.0]\right),-1.0,y,[1.0,2.0]\right)\right],projectToLine\left(\left[-1.0,-1.0\,getHesseForm\left(lineThrough\left([-1.0,-1.0],[2.0,0.0]\right),-1.0,y,[1.0,2.0]\right)\right],lineThrough\left([-1.0,-1.0],[2.0,0.0]\right)\right)\right)$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi dari sebuah ceramah N.J. Wildberger. Dalam bukunya “Proporsi Ilahi”, Wildberger mengusulkan untuk mengganti gagasan klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadransi dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang memungkinkan untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap “rasional”.

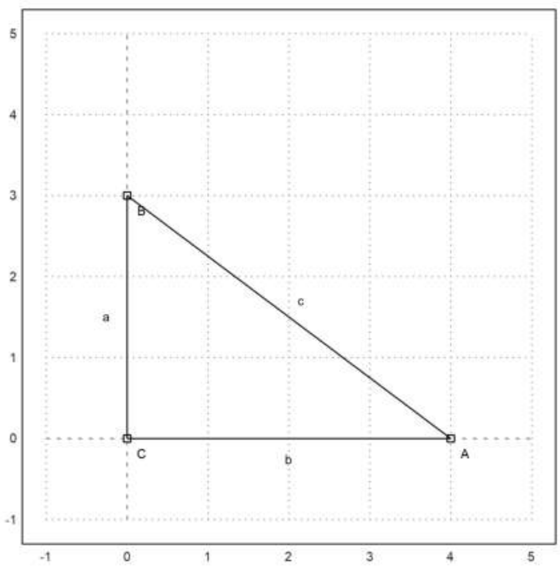
Berikut ini, saya akan memperkenalkan konsep-konsep tersebut, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan komputasi simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional yaitu komputasi dapat dilakukan dengan kertas dan pensil saja. Anda dipersilakan untuk memeriksa hasilnya tanpa komputer.

Intinya adalah bahwa komputasi rasional simbolik sering kali memberikan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang dievaluasi dengan pendekatan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kita menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir yang terkenal 3, 4, dan 5. Perintah berikut ini adalah perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat pada file Euler “geometry.e”.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
 setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg(30);
```



Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil kebalikan dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadrat, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, ini hanyalah jarak yang dikuadratkan. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadran sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a + b = c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

```
25 = 25
```

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Penyebaran mengukur bukaan di antara garis-garis. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadran dari segitiga persegi panjang dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Tentu saja, hal ini lebih mudah dihitung daripada sudut. Tetapi Anda kehilangan sifat bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita bisa mengonversi nilai perkiraan kita untuk sudut wa ke sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan ke dalam “hukum silang” berikut ini.

$$(c + b - a)^2 = 4bc\,(1 - s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah penyebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.

Hukum-hukum ini diimplementasikan dalam file geometri.e yang kita masukkan ke dalam Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$(cc + bb - aa)^2 = 4\,bb\,cc\,(1 - saa)$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024 = 1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukannya, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk sebaran sa yang tidak diketahui.

Anda bisa melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kita mendapatkan hasil yang sudah kita dapatkan.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024 = 1600\,(1 - x)$$

$$\left[x = \frac{9}{25}\right]$$

Kita sudah mengetahui hal ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari crosslaw.

Kita juga dapat menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum. Hasilnya adalah sebuah rumus yang menghitung penyebaran sudut sebuah segitiga dengan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[x = \frac{-cc^2 - (-2\,bb - 2\,aa)\;cc - bb^2 + 2\,aa\,bb - aa^2}{4\,bb\,cc}\right]$$

Kita dapat membuat sebuah fungsi dari hasil tersebut. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometry.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a, \quad a, \quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya adalah rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

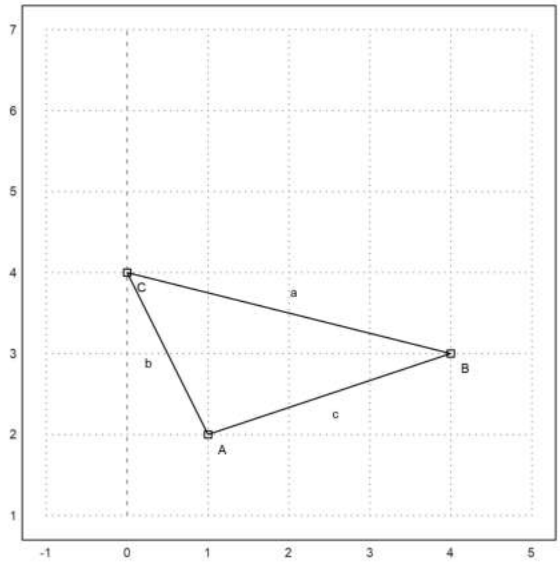
```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))

   67°47'32.44''
```

Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih lanjut.

Kita tentukan tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
 setPlotRange(-1,5,1,7); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg;
```



Dengan menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Pertama-tama saya menggunakan jarak fungsi dari file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga memiliki fungsi untuk kuadranan antara dua titik.

Pada contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga tersebut tidak berbentuk persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$10$$

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita menghitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode yang biasa berdasarkan hasil kali titik dari dua vektor. Hasilnya adalah beberapa perkiraan titik mengambang.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a.c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos\beta$$

$$\cos\angle ABC = \cos\beta = \frac{\mathbf{a.c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12-1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kita masukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan selesaikan untuk x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x), //(b+c-a)^=4b.c(1-x)
```

$$4 = 200\,(1-x)$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Itulah yang dilakukan oleh fungsi spread yang didefinisikan dalam “geometry.e”.

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksakannya. Ia menyelesaikan suku sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingatlah bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut ini dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan penyebaran.

image: (20) Rational_Geometry_CaR.png

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus penentu yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung penyebaran di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat (“quadrea”?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4-\left(-2\,b^2-2\,a^2\right)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}{4\,a^2\,c^2}$$

$$\frac{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut seperti.

Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan “triple spread” berikut ini.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$\left(sc+sb+sa\right)^2=2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang berjumlah 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Karena spread dari

$$\alpha, \pi-\alpha$$

adalah sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan triple spread juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Sebagai contoh, kita bisa menghitung penyebaran sudut 60°. Ini adalah 3/4. Namun, persamaan ini memiliki solusi kedua, di mana semua penyebarannya adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4},x=0\right]$$

Penyebaran 90° jelas adalah 1. Jika dua sudut ditambahkan ke 90°, penyebarannya akan menyelesaikan persamaan penyebaran tiga dengan a, b, 1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan a + b = 1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$\left(y+x+1\right)^2=2\,\left(y^2+x^2+1\right)+4\,x\,y$$

$$\left[x=1-y\right]$$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut dua kali lipat. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

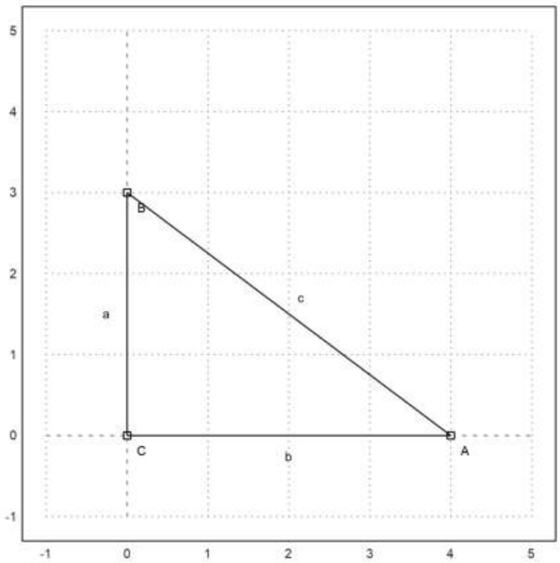
$$\left[x=4\,a-4\,a^2 , x=0\right]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Pembagi Sudut/Angle Bisector

Ini adalah situasi yang sudah kita ketahui.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
 setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi, pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibelah dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih salah satu yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbagi dua 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(2\,x+\frac{a}{b+a}\right)^2=2\,\left(2\,x^2+\frac{a^2}{\left(b+a\right)^2}\right)+\frac{4\,a\,x^2}{b+a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a} , x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}\right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

Kita bisa mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

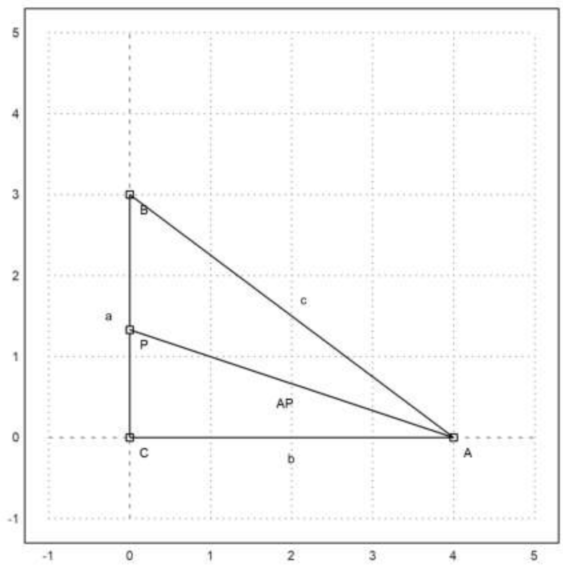
```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut-sudutnya dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.

Kita menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku untuk semua segitiga. Kuadratkan, ini diterjemahkan ke dalam apa yang disebut “hukum penyebaran”

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a, b, c menunjukkan qudrance.

Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita mendapatkan bisa/1 = b/(1-sa2) dan bisa menghitung bisa (kuadransi dari garis-bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,(b+a)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P dengan menggunakan rumus penyebaran.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

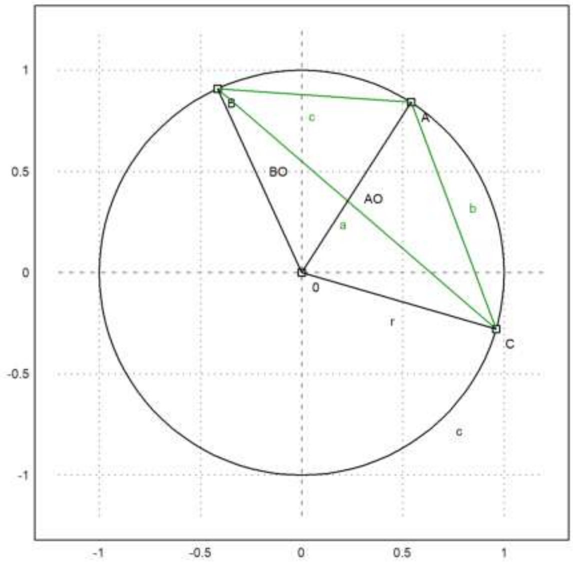
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akor

Lihatlah situasi berikut ini.

```
>setPlotRange(1.2); ...
 color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
 A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
 plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
 insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang rumit, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

We can make that an Euler function.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A, B, C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Radiusnya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

Faktanya adalah, bahwa penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akor.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Faktanya, penyebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut chord b adalah setengah dari sudut tengah.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

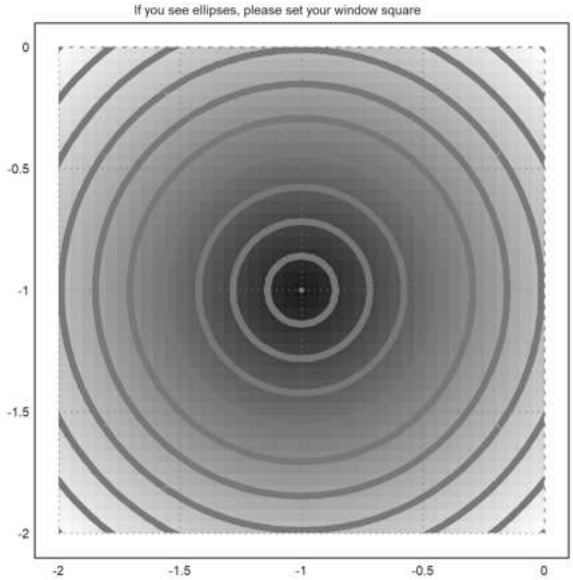
$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Keterangan awal

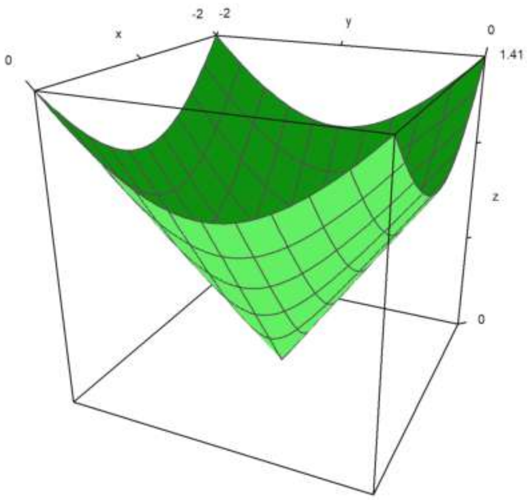
Fungsi yang, pada sebuah titik M pada bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis-garis tingkat yang cukup sederhana: lingkaran yang berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
 title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga cukup sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

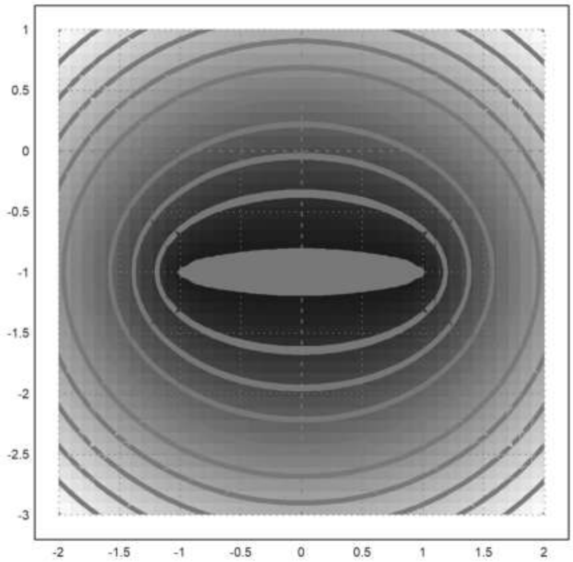


Tentu saja nilai minimum 0 diperoleh dalam A.

Dua titik

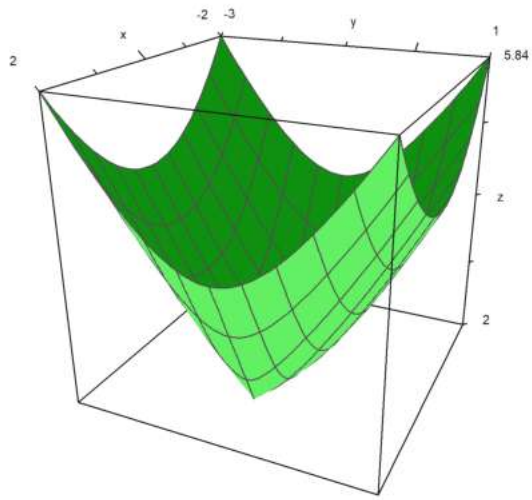
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB di mana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah “fakta yang terkenal” bahwa kurva tingkat adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



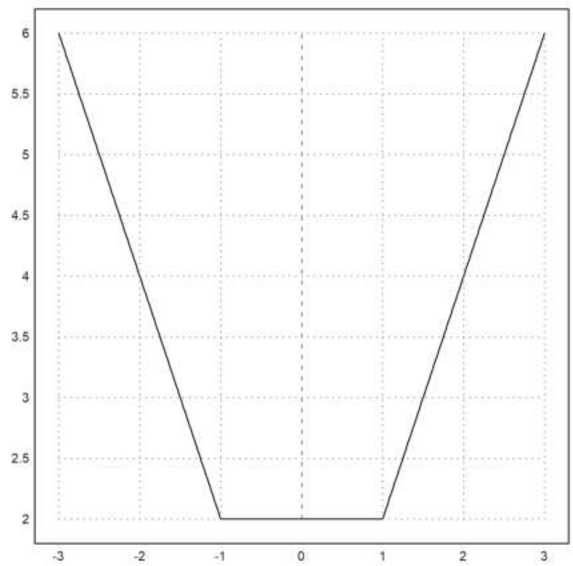
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan pada garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



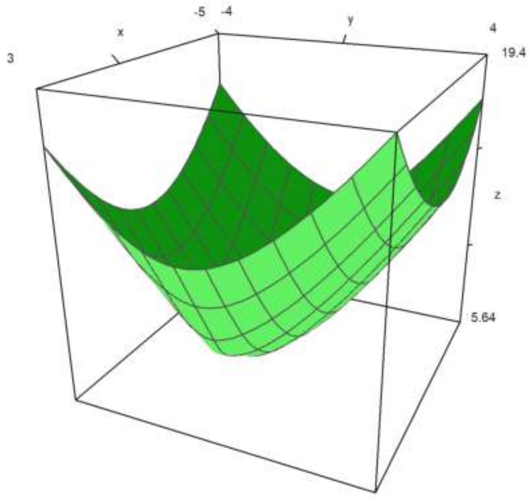
Tiga poin

Sekarang, hal-hal menjadi kurang sederhana: Hal ini sedikit kurang dikenal bahwa MA+MB+MC mencapai minimumnya pada satu titik di bidang, tetapi untuk menentukannya tidak sesederhana itu:

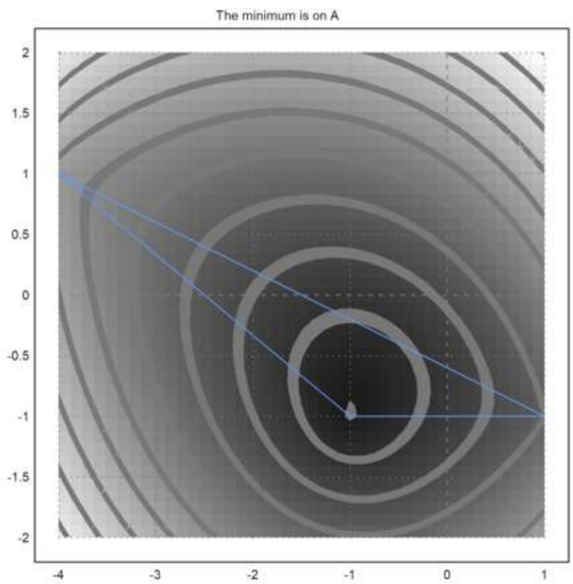
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (katakanlah AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

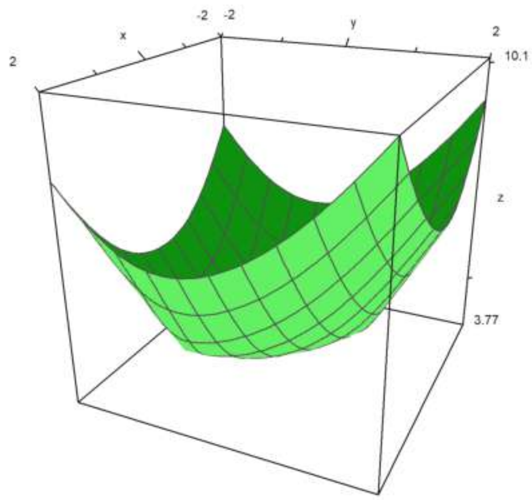



```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

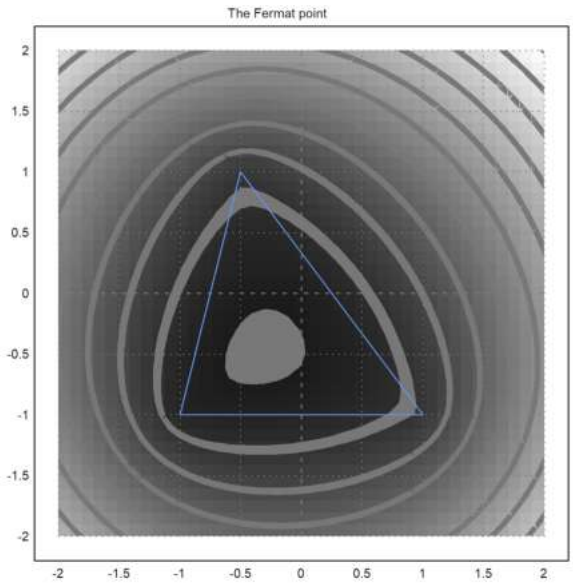


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120°, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (masing-masing 120°):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



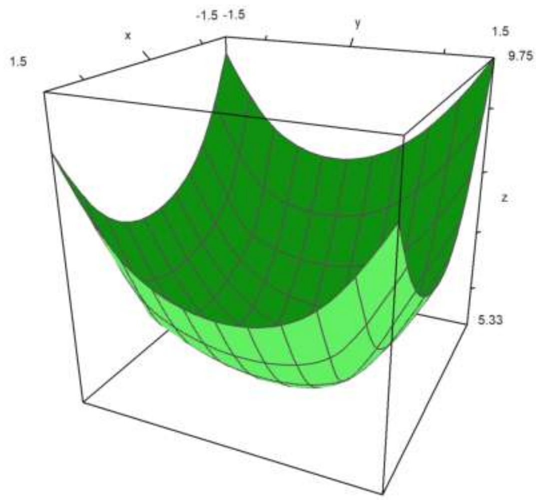
Merupakan kegiatan yang menarik untuk merealisasikan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; sebagai contoh, saya tahu sebuah perangkat lunak yang ditulis dalam bahasa Java yang memiliki instruksi "garis kontur"...

Semua hal di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada para ahli lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di bagian pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat dari segitiga. Namun tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torricelli dari Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat menemukannya! Bagaimanapun juga, tradisinya adalah mencatat titik F ini...

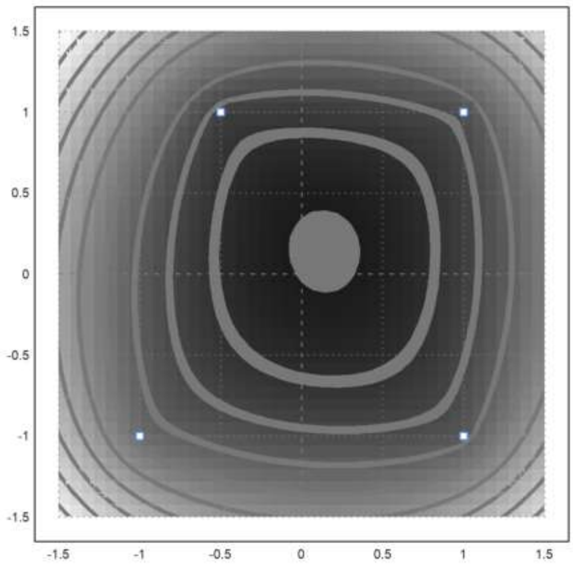
Empat poin

Langkah selanjutnya adalah menambahkan titik ke-4 D dan mencoba meminimumkan MA+MB+MC+MD; misalkan Anda adalah operator TV kabel dan ingin menemukan di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



Masih ada nilai minimum dan tidak ada simpul A, B, C, maupun D:

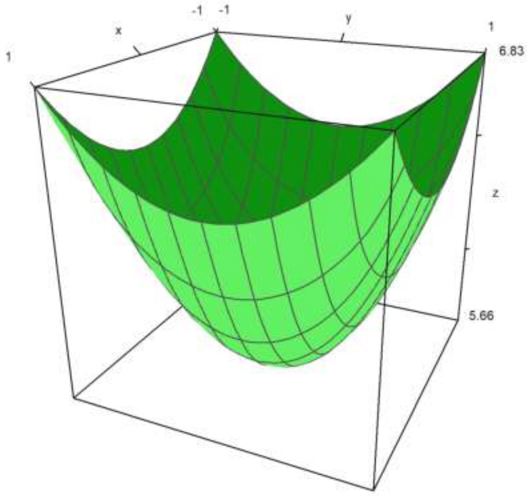
```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
[0.142858,   0.142857]
```

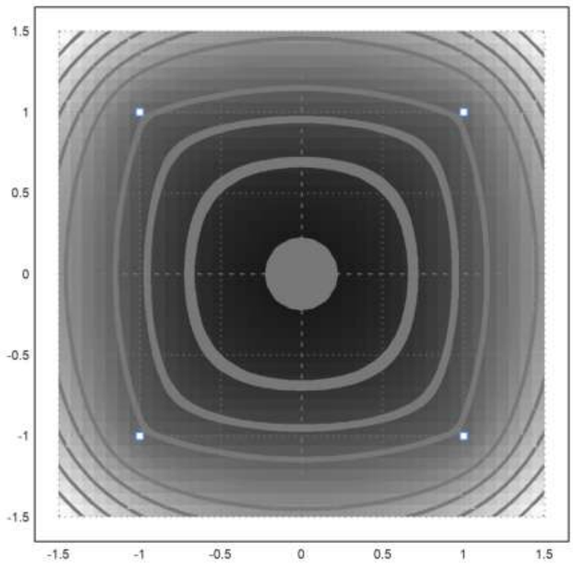
Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

Karena ABCD adalah sebuah bujur sangkar, maka kita berharap bahwa titik optimalnya adalah pusat dari ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe pada path program.

Pertama, kita menghitung jari-jari bola.

Jika Anda melihat gambar di bawah ini, Anda dapat melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kita menggunakan file geometri.e dari Euler untuk hal ini.

```
>load geometry;
```

Pertama, dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

$$[- a, 1, 0]$$

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

$$[- a, - 1, 0]$$

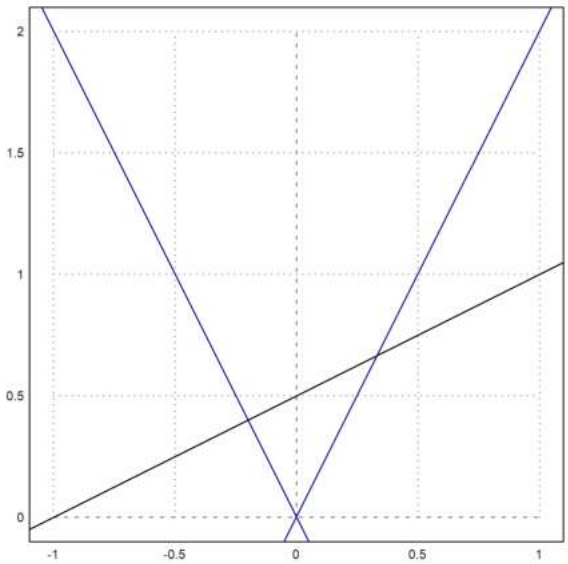
Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

[- 1, 2, 1]

Kami memplot semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang, kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

[0, u]

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{\left(2\,u-1\right)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran, yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1} , u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.

Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

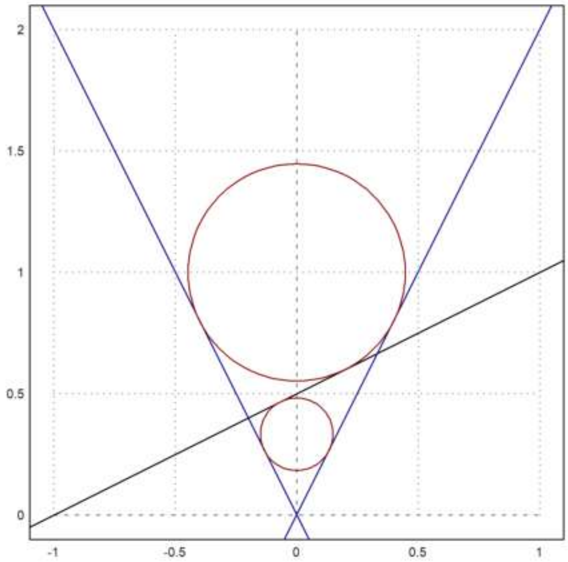
[0.333333, 1]

```
>dd := d()
```

[0.149071, 0.447214]

Plot lingkaran-lingkaran tersebut ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya kita plot semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apapun pada urutan perintah Povray berikut ini, dan jalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami menyiapkan pemandangan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita tuliskan kedua bola tersebut ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang yang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian, kita menghasilkan dua titik di mana bola-bola tersebut menyentuh bidang. Ini adalah fokus elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita menghitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

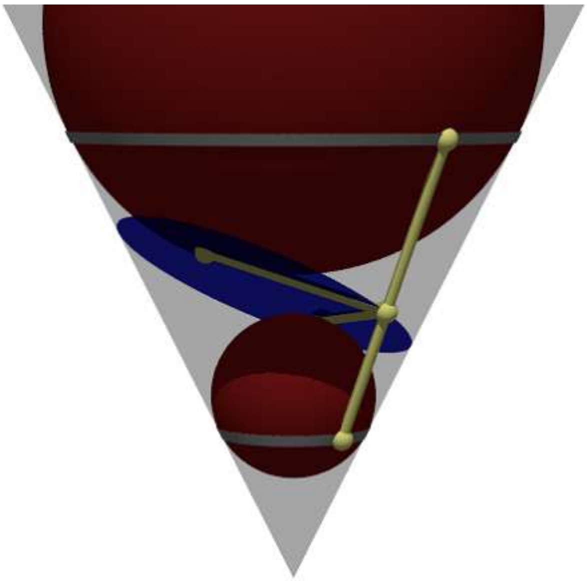
```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang, kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola-bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```

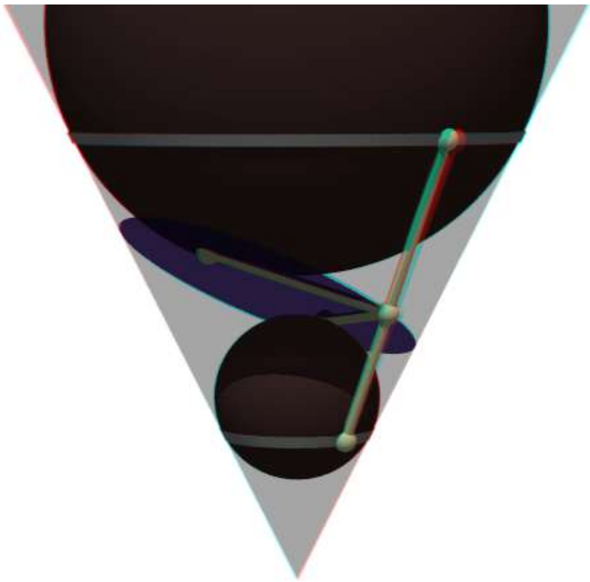


Untuk mendapatkan Anaglyph ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ...
 global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
 writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
 writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
 writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
 gp=g();
 pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
 vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
 writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
 P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
 writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
 P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
 writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
 P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
 writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
 P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
 writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
 t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
 writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
 pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
 pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
 writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
 pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
 writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
 endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk mengapresiasi efek berikut ini.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```



Contoh 8: Geometri Bumi

Pada buku catatan ini, kita ingin melakukan beberapa komputasi bola. Fungsi-fungsi tersebut terdapat pada file “spherical.e” pada folder contoh. Kita perlu memuat file tersebut terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut ini adalah koordinat untuk Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi bola).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama, kita menghitung vektor dari satu titik ke titik lainnya pada bola ideal. Vektor ini adalah [heading, jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-Solo
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut ini menggunakan perkiraan yang lebih baik lagi. Pada jarak yang begitu pendek, hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak FMIPA-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(FMIPA,Semarang)->" km" // perkiraan jarak FMIPA-Semaran ...
                               ^
```

Ada fungsi untuk judul, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo); degprint(asum)
```

```
180°0'10.77''
```

Ini bisa digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, cara ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2" // perkiraan luas segitiga FM ...
                                ^
```

Ada sebuah fungsi untuk hal ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung radius bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi arah dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan sebuah vektor, kita menggunakan svector. Untuk menambahkan sebuah vektor ke sebuah posisi, kita menggunakan saddvector.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk menemukan koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
Commands must be separated by semicolon or comma!
Found:  // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta (character 32)
You can disable this in the Options menu.
Error in:
esdist(Tugu,Monas)->" km" // perkiraan jarak Tugu Jogja - Mona ...
                         ^
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun demikian, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi inversi secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang jalur.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun demikian, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah NE mulai dari titik mana pun di bumi.

Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut ini menunjukkan bahwa kita akan melenceng dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak tersebut, dengan menggunakan arah menuju Monas, kita akan sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh berbeda.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
 S 6°11.250' E 106°48.372'
      1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
      79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi, kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita sesuaikan pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
   loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
      79.69°
      81.67°
      83.71°
      85.78°
      87.89°
      90.00°
      92.12°
      94.22°
      96.29°
      98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti judul yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
      0.203km
```

Kita akan mendapatkan perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
   loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
      0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang Bundaran Hotel Indonesia menuju Monas dengan fungsi navigate.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
   loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
 S 7°46.998' E 110°21.966'
 S 7°37.422' E 110°0.573'
 S 7°27.829' E 109°39.196'
 S 7°18.219' E 109°17.834'
 S 7°8.592' E 108°56.488'
 S 6°58.948' E 108°35.157'
 S 6°49.289' E 108°13.841'
 S 6°39.614' E 107°52.539'
 S 6°29.924' E 107°31.251'
 S 6°20.219' E 107°9.977'
 S 6°10.500' E 106°48.717'
```

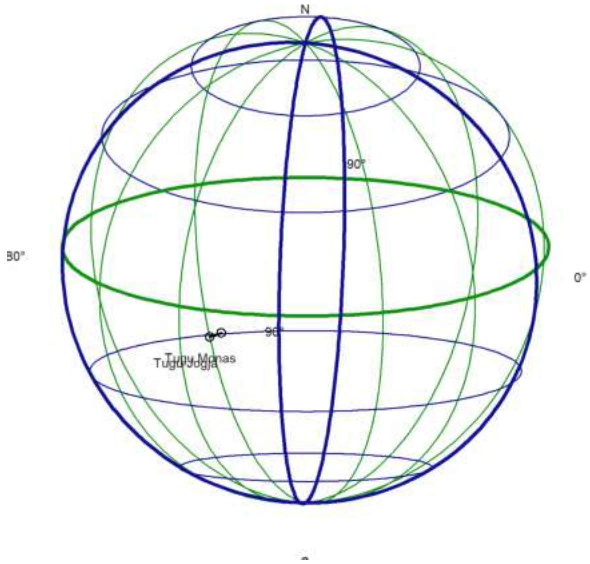
Kami menulis sebuah fungsi, yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
 useglobal;
 plotearth;
```

```
plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
plotposline(v);
endfunction
```

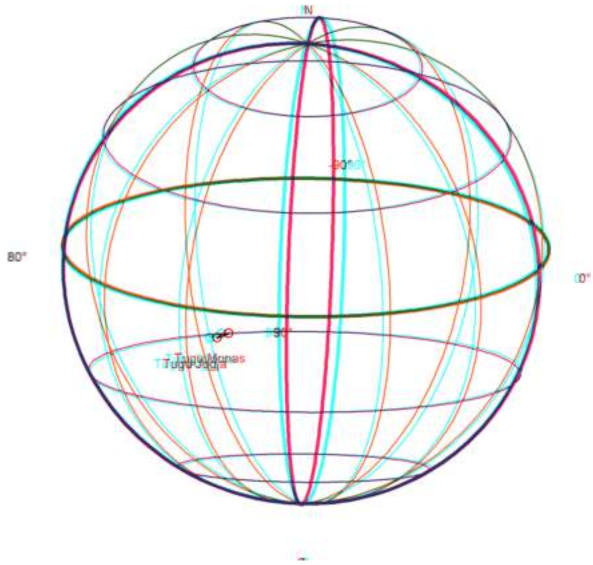
Sekarang plot semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.

Petunjuk:

- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.

Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.
- Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung (sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).
- Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.
- Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar lingkaran dalamnya.

- Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

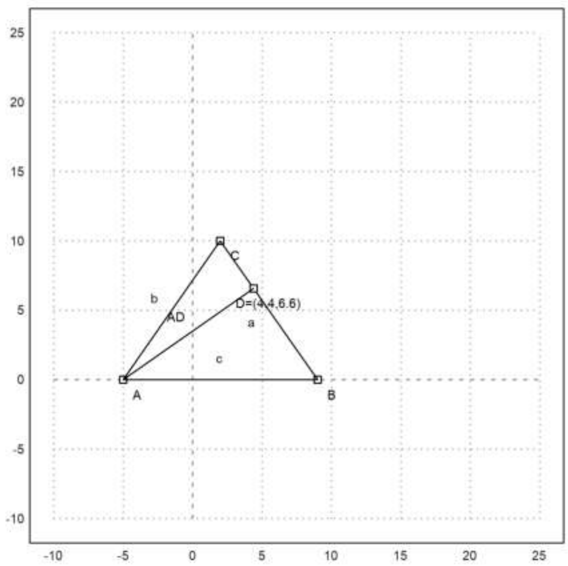
Jawaban Latihan

Latihan (1)
1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.
2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut. Merupakan segitiga apakah itu?
3. Hitung luas segitiga tersebut.
4. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
5. Gambar jari-jari lingkaran dalam.
6. Hitung luas lingkaran luar dan luas lingkaran dalam segitiga ABC. Adakah hubungan antara luas kedua lingkaran tersebut dengan luas segitiga ABC?

```
>setPlotRange(-10,25,-10,25);
>A=[-5,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[9,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,10]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>lineThrough(B,C)
```

```
[-10,  -7,  -90]
```

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
70
```

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
70
```

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

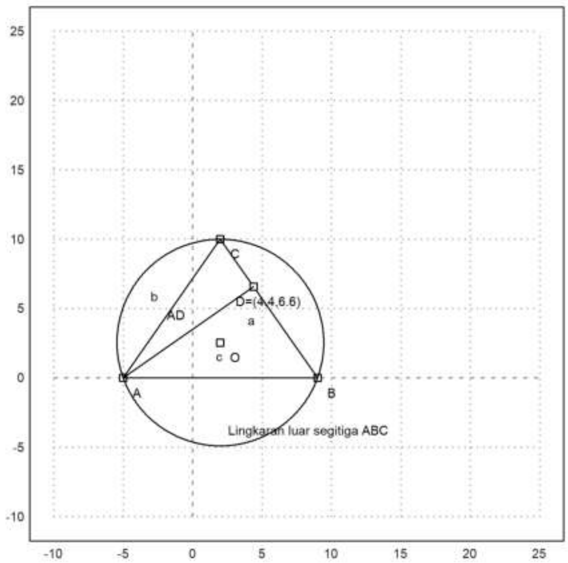
```
70
```

Sudut pada C.

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
69°59'2.55''
```

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```




```
>O, R
```

```
[2,  2.55]
7.45
```

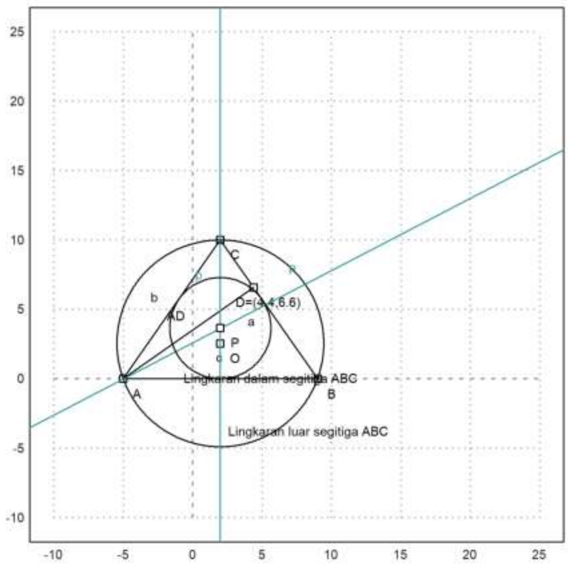
```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[2,  3.64459]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
3.64458893101
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```




```
>
```

Menggambar Objek - Objek Geometri

Objek-objek geometri meliputi titik, garis, bidang, bentuk bentuk geometri pada bidang, beserta sifat sifatnya. Tiga unsur geometri yaitu titik, garis, dan bidang. Ketiga unsur tersebut juga disebut sebagai tiga unsur yang tak didefinisikan.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Titik

Objek atau unsur pangkal dalam Geometri yaitu titik. Suatu titik dipikirkan sebagai suatu tempat/ posisi dalam ruang. Titik tidak memiliki panjang maupun ketebalan. Bekas tusukan jaru dan sentuhan pertama ujung pensil di atas kertas dapat dikatakan sebuah noktah dengan diberi nama suatu huruf alphabet kapital. Noktah sendiri adalah bintik atau titik kecil.

Latihan 1

Gambarlah titik A di koordinat (1,5)!

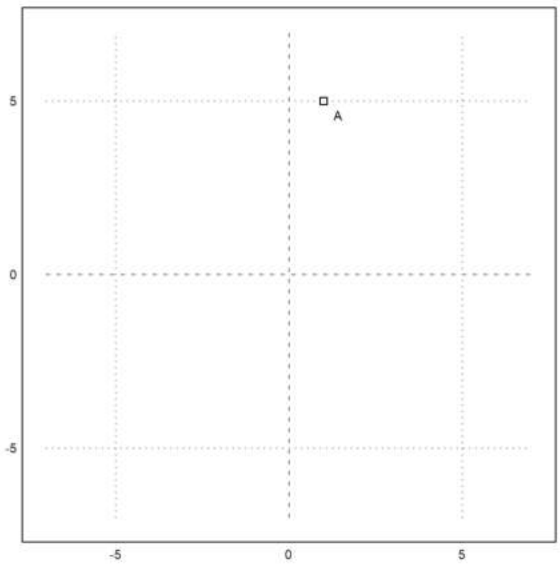
```
>setPlotRange(7); // mendefinisikan bidang kordinat baru :
```

Langkah pertama yaitu membuat bidang koordinat dengan jarak 7. Pada setPlotRange menampilkan bidang dengan jarak yang sama dengan masing masing sumbu.

```
>A=[1,5];
```

Langkah kedua yaitu memanggil titik A untuk menggambar titik A di bidang koordinat.

```
>plotPoint(A,"A"):
```



Langkah ketiga yaitu menggambar titik dengan fungsi plotPoint. Fungsi ini untuk menggambar titik A dengan memberi nama "A". Titik A disini merupakan titik koordinat (1,5). 1 sebagai sumbu x dan 5 sebagai sumbu y.

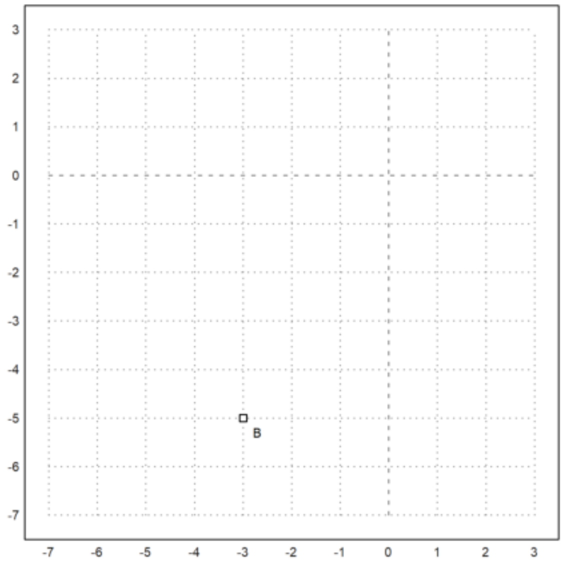
Latihan 2

Gambarlah titik B di koordinat (-3,-5)!

```
>setPlotRange(-7,3,-7,3);
```

Langkah pertama yaitu membuat bidang koordinat dengan x1=-7, x2=3, y1=-7, y2=3. bidang koordinat ini menentukan x dan y dengan x1 menunjukkan batas terkecil dan x2 menunjukkan batas terbesar sumbu x sedangkan y1 menunjukkan batas terkecil dan y2 menunjukkan batas terbesar sumbu y.

```
>B=[-3,-5]; plotPoint(B,"B"):
```



Langkah kedua yaitu memulis titik B dengan memanggil plotPoint dengan menggambar titik B dengan memberi nama "B". Titik B ini (-3,-5) dengan x =-3 dan y=-5.

Latihan 3

Gambarlah 4 di titik C (2,7), titik D (-3,-5), titik E (-4,6), titik F (2,-4) di bidang koordinat!

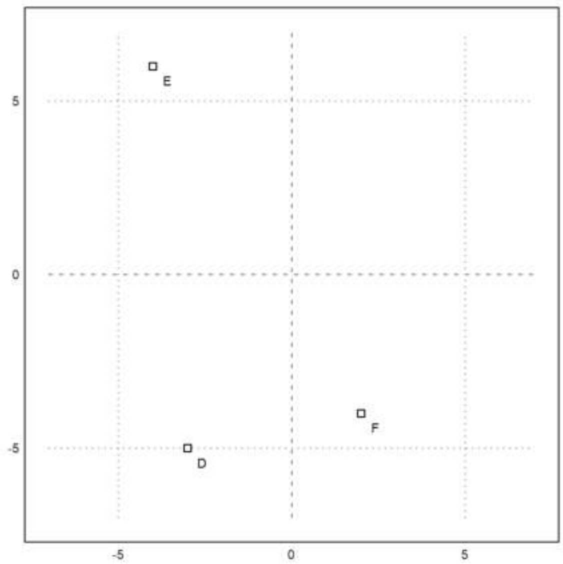
```
>setPlotRange(7);
```

Langkah pertama adalah menggambar bidang koordinatnya, disini saya mengambil batas 7 di setiap sumbunya

```
>C=[2,7]; D=[-3,-5]; E=[-4,6]; F=[2,-4]; // mendefinisikan 3 titik
```

Langkah kedua yaitu menulis ketiga titik, titik yang diambil bisa di jadikan satu perintah dengan menulis titik C dilanjut titik dua dan spasi kemudian tulis titik berikutnya

```
>plotPoint(D,"D"); plotPoint(E,"E"); plotPoint(F,"F"):
```



Langkah terakhir yaitu memanggil fungsi plotPoint. Menggambar titik ini bisa dijadikan satu perintah juga.

Latihan 4

Tentukan jarak antara titik P dan titik Q!
Titik P = (0,-5)
Titik Q = (-5,0)

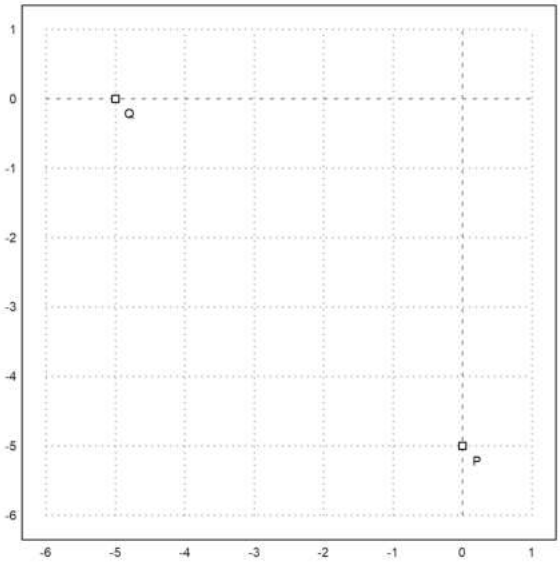
```
>setPlotRange(-6,1,-6,1);
```

Langkah pertama adalah menggambar bidang koordinatnya terlebih dahulu

```
>P=[0,-5]; Q=[-5,0]; // mendefinisikan titik
```

Langkah kedua yaitu mendefinisikan titik dengan menulis titiknya.

```
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"): //menggambarkan titik
```



Langkah ketiga adalah menggambar titik, seperti pada latihan di atas cara menggambar titik adalah dengan plotPoint

```
>distance(P,Q) // menentukan jarak P dan Q
```

```
7.07106781187
```

Langkah terakhir adalah dengan fungsi distance. Fungsi distance digunakan untuk menentukan jarak antara titik 1 dengan titik lainnya

Cara manual untuk menentukan jarak P dan Q adalah dengan rumus phytagoras

Latihan 5

Tentukan titik tengah RS!
Titik R = (5,1)
Titik S = (3,6)

```
>R=[5,1]; S=[3,6]; //mendefinisikan titik R dan S
>middlePerpendicular(R,S)
```

```
[2,  -5,  -9.5]
```

Latihan 6

Tentukan kuadrat jarak titik R dan titik T!

```
>R=[5,1]; S=[3,6];
>distanceSquared(R,S)
```

```
29
```

Latihan 7

Tentukan kuadrat jarak titik R dan titik S!

```
>R=[5,1]; S=[3,6];
>quadrance(R,S)
```

```
29
```

Menggambar Ruas Garis

Ruas Garis adalah sebagian dari garis yang dibatasi oleh dua titik ujung yang berbeda, dan memuat semua titik pada garis di antara ujung-ujungnya. Ruas garia memiliki titik awal dan titik akhir.

Latihan 1

Gambarlah ruas garis dengan titik A (0,5) dan titik B (1,5)!

```
>setPlotRange(5);
```

Membuat koordinat dengan setPlotRange (5)

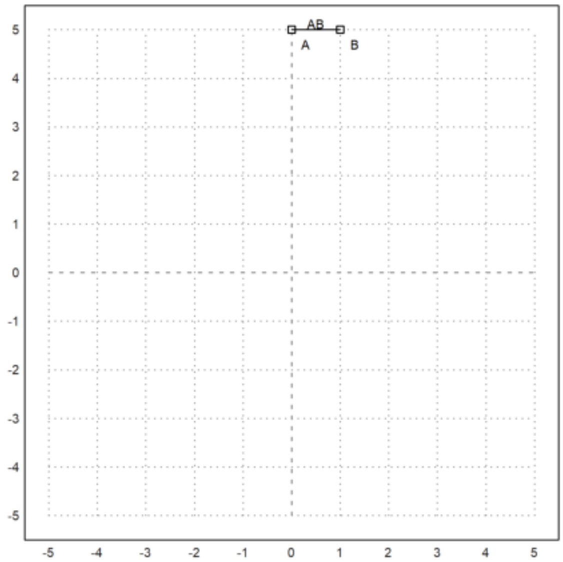
```
>A=[0,5]; plotPoint(A,"A");
```

Menentukan titik A dan menggambar titik A

```
>B=[1,5]; plotPoint(B,"B");
```

Menentukan titik B dan menggambar titik B menggunakan fungsi plotPoint

```
>plotSegment(A,B,"AB",9):
```



Menggambar ruas garis dengan batas titik A (0,5) dan titik B (1,5)!

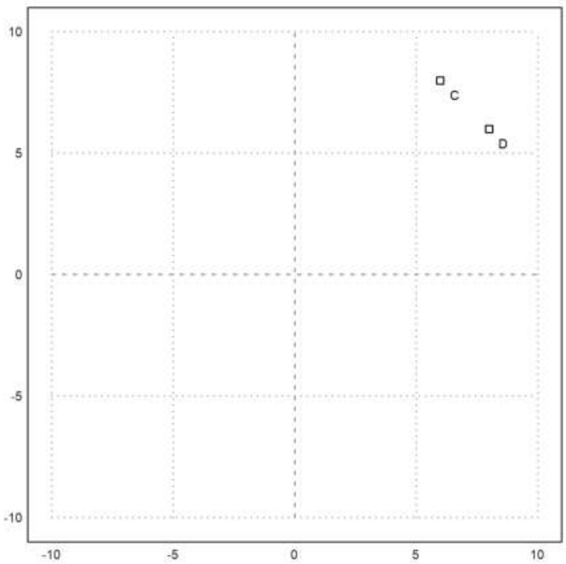
Latihan 2

Gambarlah ruas garis dengan titik C (6,8) dan titik D (8,6)!

```
>setPlotRange(10);
```

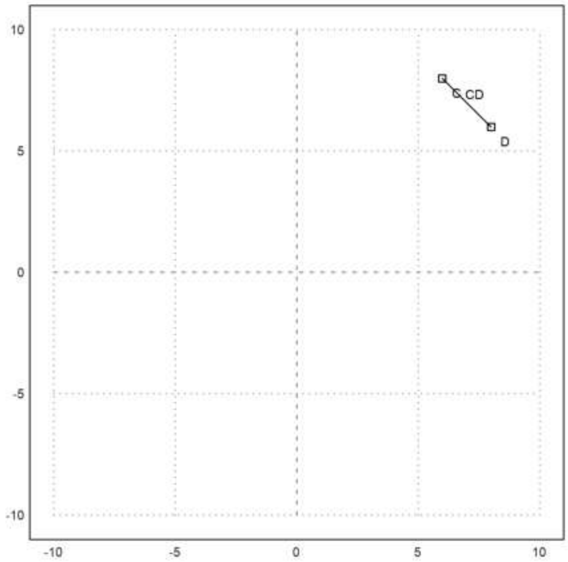
Membuat garis kartesius/ bidang koordinat

```
>C=[6,8]; D=[8,6]; plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D"):
```



Menentukan titik dan menggambar titik C dan D

```
>plotSegment(C,D,"CD",20):
```



Menggambar ruas garis CD dengan titik C(6,8) dan titik D(8,6) dengan jarak label dari ruas garis adalah 20

Latihan 3

Tentukan titik tengah di ruas AB, jika diketahui titik A(0,2), titik B(6,2)!

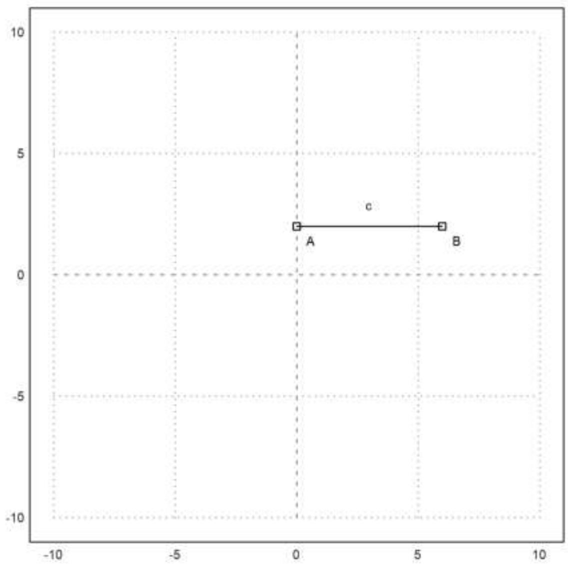
```
>setPlotRange(10);
```

Langkah pertama adalah dengan membuat bidang koordinatnya

```
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A");
```

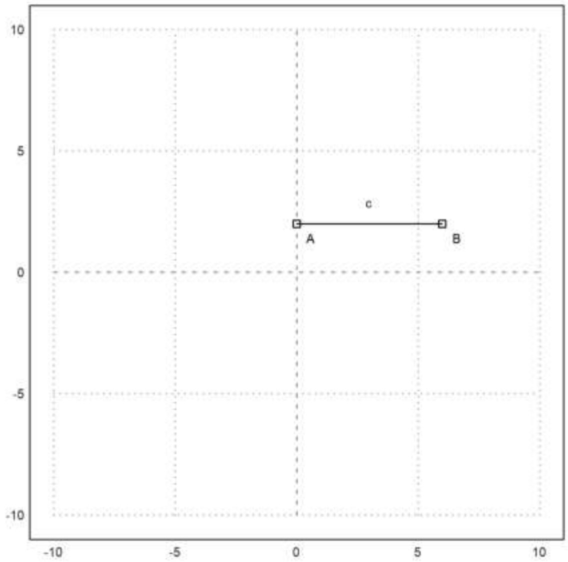
Langkah kedua dan ketiga adalah mendefisikan dan menggambar titiknya

```
>B=[6,2]; plotPoint(B,"B");
>plotSegment(A,B,"c"):
```



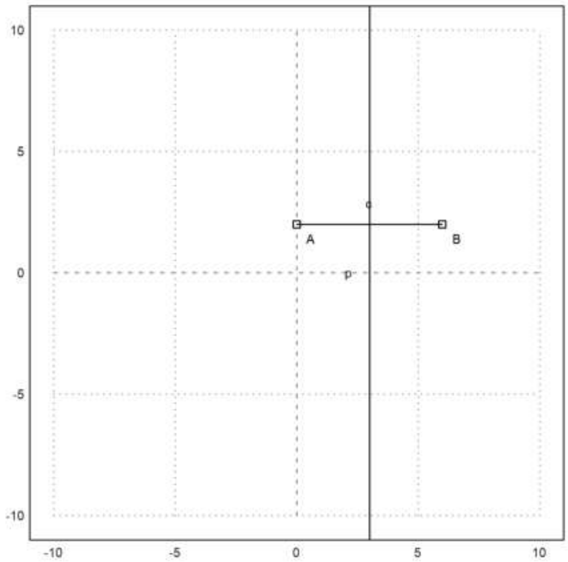
Kemudian menggambar ruas garis yang melalui 2 titik yaitu A dan B

```
>h= middlePerpendicular(A,B):
```



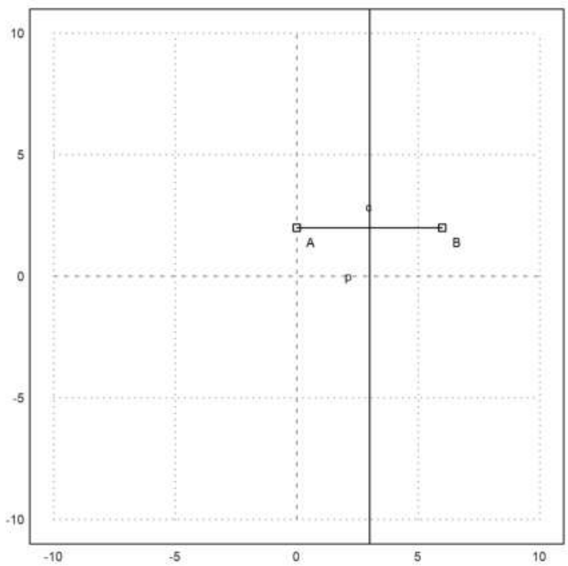
Selanjutnya buat garis h yang tegak lurus ruas garis AB dan memotong tepat di tengah ruas garis AB

```
>plotLine(h):
```



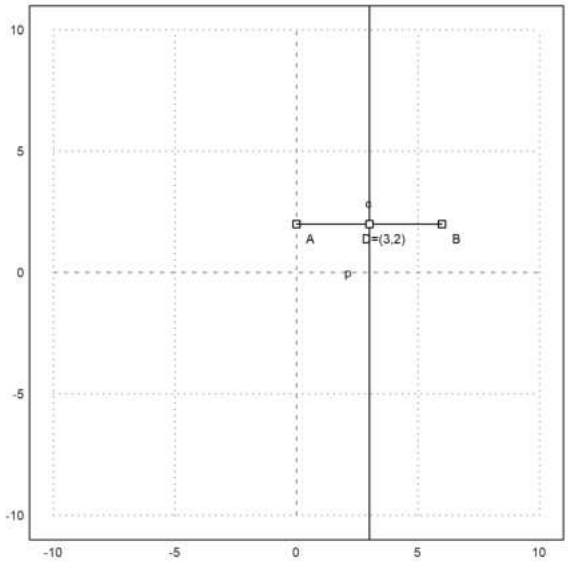
Gambar garis h

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(A,B)):
```



Menentukan titik potong garis AB

```
>plotPoint(D,value=1):
```



Menggambar titik potongnya

Menggambar Garis

Sebuah garis dipikirkan sebagai suatu himpunan titik berderet yang panjang tak terbatas , tetapi tidak memiliki lebar. Sebuah garis direpresentasikan dengan sebuah gambar sinar dengan mata di kedua ujungnya yang menunjukkan bahwa garis tersebut tak berakhir.

Sebuah garis itu lurus sempurna, tidak memiliki ketebalan. Garis bisa dimodelkan sebagai garis lurus yang tidak ada awalan dan akhirannya.

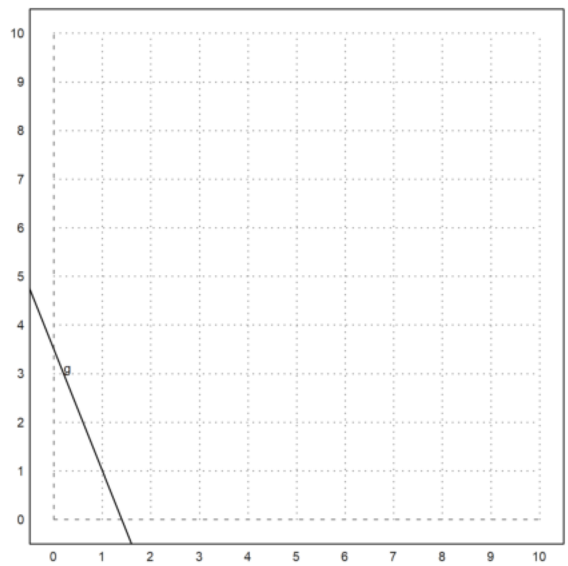
Latihan 1

Gambarlah garis dengan persamaan 5x+2y=7!
Persamaan 5x+2y=7 bisa dituliskan sebagai [5,2,7]

```
>setPlotRange(0,10,0,10);
```

Lankah pertama adalah menentukan batas koordinat yaitu x1=0 ,x2=10,y1=0 dan y2=10

```
>plotLine([5,2,7],"g",10):
```



Menentukan garis dengan fungsi plotline(persamaan garis,"label",jarak label)

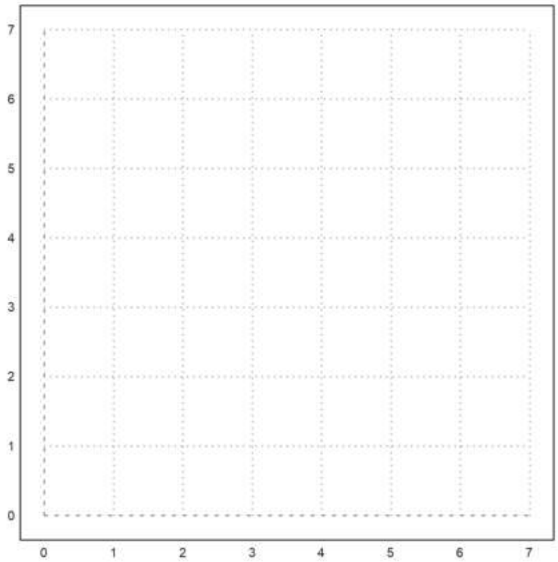
Latihan 2

Gambarlah garis yang melalui titik C (2,3) dan titik D(1,4)!

```
>setPlotRange(0,7,0,7);
```

Langkah pertama adalah menggambar bidang kartesius terlebih dahulu

```
>C=[2,3]; D=[1,4]:
```



Menentukan titik C dan titik D

```
>g=lineThrough(C,D)
```

```
[-1,  -1,  -5]
```

Latihan 3

Tentukan vektor arah (gradien) garis g!

```
>getLineDirection(g)
```

```
[-1,  1]
```

Latihan 4

Menentukkan garis yang melalui titik A (3,4) dan tegak lurus terhadap garis (g)

```
>h=perpendicular(A,g)
```

```
[1,  -1,  -2]
```

Latihan 5

Menentukan titik potong dua garis, yaitu garis g dan garis h

```
>lineIntersection(g,h)
```

```
[1.5,  3.5]
```

Latihan 6

Menentukkan garis dengan titik F(7,2), dan A(3,4) dan jarak label 10!

```
>setPlotRange(0,10,0,10)
```

```
[0,  10,  0,  10]
```

Menentukan bidang kartesius dengan batas terkecil x maupun y yaitu 0 dan batas terbesar x maupun y yaitu 10

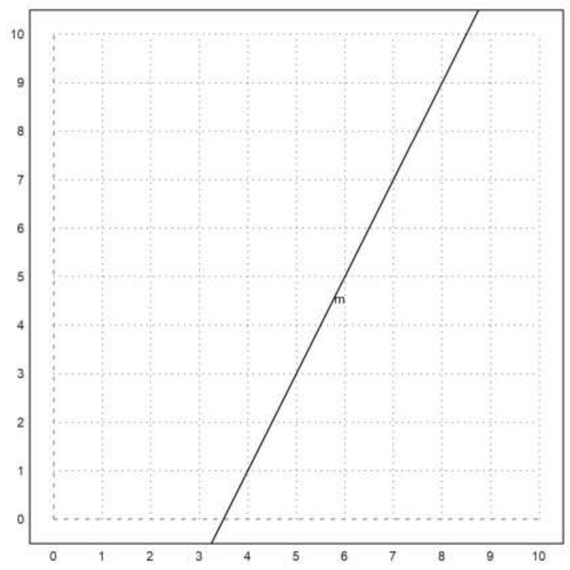
```
>F=[7,2]; A:=[3,4];
```

Menentukkan titik F dan titik A

```
>m=middlePerpendicular(F,A);
```

Membuat garis FA denngan fungsi middlePerpendicular

```
>plotLine(m,"m",10):
```

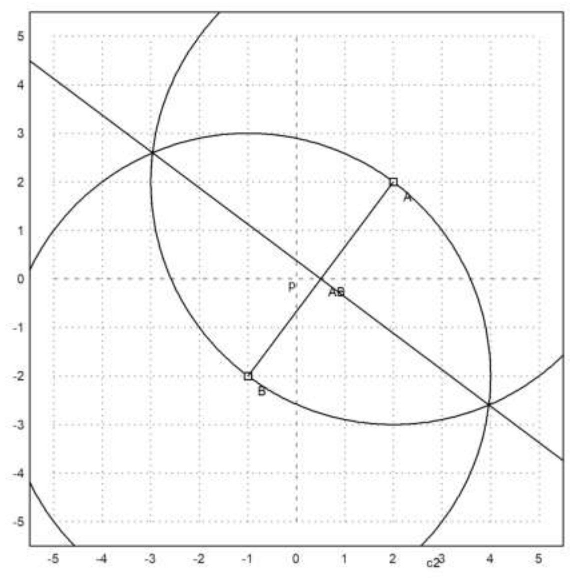


Menggambar garis dan jarak label menggunakan fungsi plotLine

Latihan 7

Gambar garis sumbu ruas AB dengan titik A(2,2) dan B(-1,-2)!

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2]; // menentukan titik titiknya
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B)); //membuat lingkaran dengnan pusat A dan jari jari r
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```



Menggambar Bidang

Bidang adalah permukaan rata dan tentu batasnya. Bidang didefinisikan sebagai permukaan datar yang didefinisikan oleh serangkaian garis yang tidak berpotongan

Latihan 1

Menggambar persegi panjang ABCD. Titik A (-3,5), B(-3,15), C(5,5), D(5,15)!

```
>setPlotRange(-5,17,-5,17); //mendefinisikan bidang koordinat
>A=[-3,5]; B=[-3,15]; C=[5,5]; D=[5,15]; //mendefinisikan dan menggambar 4 titik
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D");
```

Menggambar 4 titik

```
>plotSegment(A,B,"a"); plotSegment(B,D,"b"); plotSegment(C,D,"c"); plotSegment(A,C,"d");
```

Membuat ulang garis A,B dan C

Latihan 2

Menggambarkan segitiga siku siku dengan titik D(2,4), E(2,8), F(6,4)!

```
>setPlotRange(-5,10,-5,10);
```

Menentukan gambar bidang kartesius

```
>D=[2,4]; E=[2,8]; F=[6,4];
```

Menentukan 3 titik D,E dan F

```
>plotPoint(D,"D"); plotPoint(E,"E"); plotPoint(F,"F");
```

Menggambar 3 titik

```
>plotSegment(D,E,"DE",10); plotSegment(E,F,"EF",10); plotSegment(F,A,"FA",10)
```

Latihan 3

Gambar dan tebaklah suatu bidang dengan titik A(-2,-5),B(2,-5),C(2,-1) dan D(-2,-1)

```
>setPlotRange(-5,10,-5,10); // membuat bidang kartesius
>A=[-2,-5]; B=[2,-5]; C=[2,-1]; D=[-2,-1]; // menentukan titik
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D"); // menggambar titik
>plotSegment(A,B,"a",10); plotSegment(B,C,"b",10); plotSegment(C,D,"c"); plotSegment(D,A,"d"); // menggambar g
```

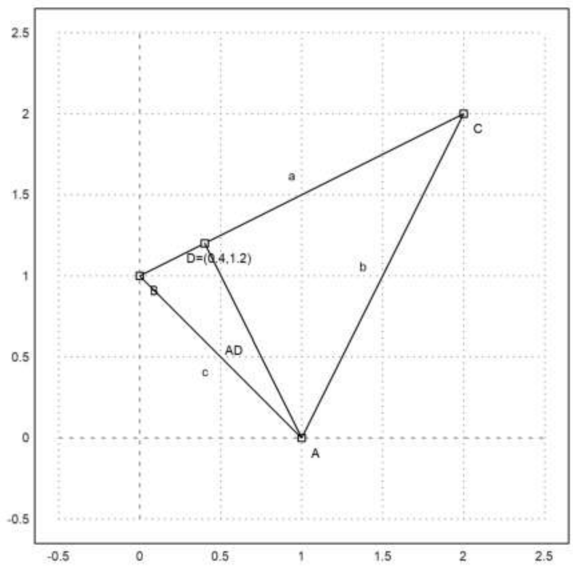
Latihan 4

Gambarlah objek geometri segitiga dengan 3 titik yaitu A (1,0), B(0,1) dan C (2,2)!

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
[-1,  2,  2]
```

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```




```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Menggambar Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan/himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu. Jarak yang sama disebut panjang jari-jari linngkaran dan titik tertentu disebut pusat lingkaran.

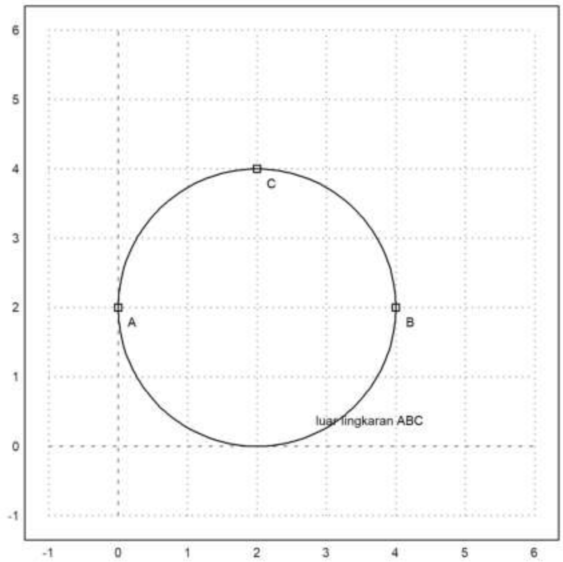
Latihan 1

```
>setPlotRange(20);
>P=[5,5]; r=[14];
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran"); // gambar lingkaran
```

Latihan 2

Buatlah lingkaran yang melalui tiga titik yaitu titik A (0,2), B(4,2) dan C(2,4)!

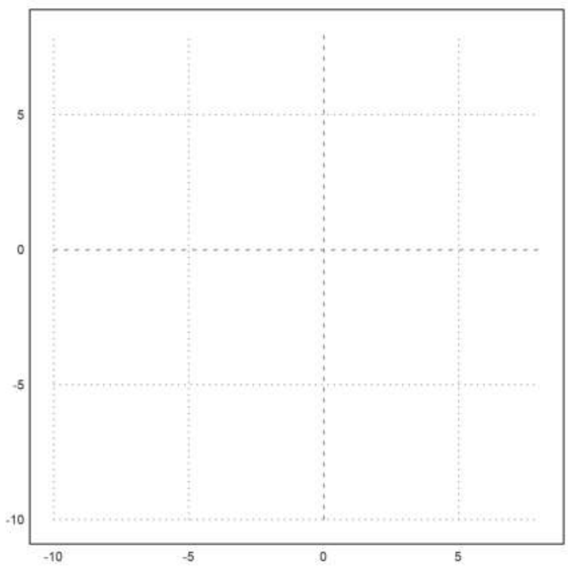
```
>setPlotRange(-1,6,-1,6); // menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A");
>B=[4,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,4]; plotPoint(C,"C");
>c=circleThrough(A,B,C); // luar lingkaran ABC
>o=getCircleCenter(c); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotCircle(c, "luar lingkaran ABC"):
```



Latihan 3

Gambarlah lingkaran yang melalui titik A (0,2), B (-2,-1), C (0,3) dan tentukan titik pusatnya!

```
>setPlotRange(-10,8,-10,8):
```



Langkah pertama yaitu menentukan batas tiap sumbu bidang koordinatnya

```
>A = [0,2]; B = [-2,-1]; C = [0,3];
```

Langkah kedua menentukan titiknya

```
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C")
```

Langkah ketiga yaitu menggambar ketiga titiknya

```
>c = circleThrough(A,B,C);
```

Langkah keempat merupakan fungsi lingkaran pada titik A,B dan C

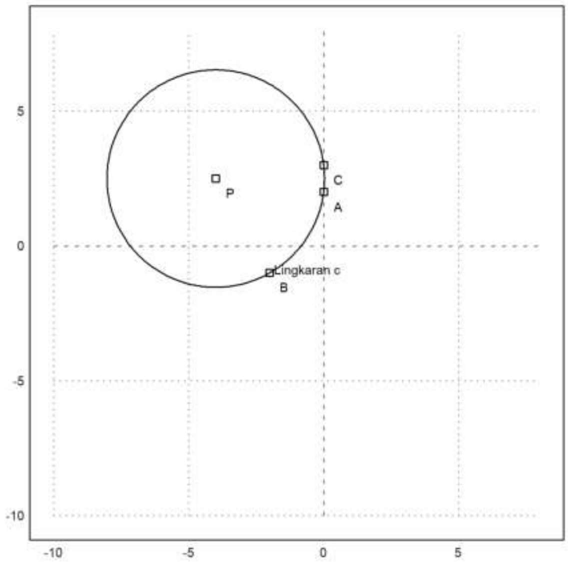
```
>P = getCircleCenter(c);
```

Langkah kelima adalah menentukan titik pusat lingkarannya, caranya dengan fungsi getCircleCenter(A,B,C)

```
>plotPoint(P,"P");
```

Langkah keenam yaitu menggambar titik pusatnya

```
>plotCircle(c,"Lingkaran c"):
```



Langkah terakhir yaitu memanggil lingkaran dan memberi label "lingkaran c"

Latihan 4

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);
```

Membuat bidang kartesiusnya

```
>A=[0,2]; plotPoint(A,"A"); //mendefinisikan titik dan gambarnya
>B=[4,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,4]; plotPoint(C,"C");
>c=circleThrough(A,B,C); //lingkaran melalui 3 titik
>o=getCircleCenter(c); // menentukan pusat lingkaran c
>plotCircle(c) //Menggambar lingkaran c dengan label nama "c"
>o
```

```
[2,  2]
```

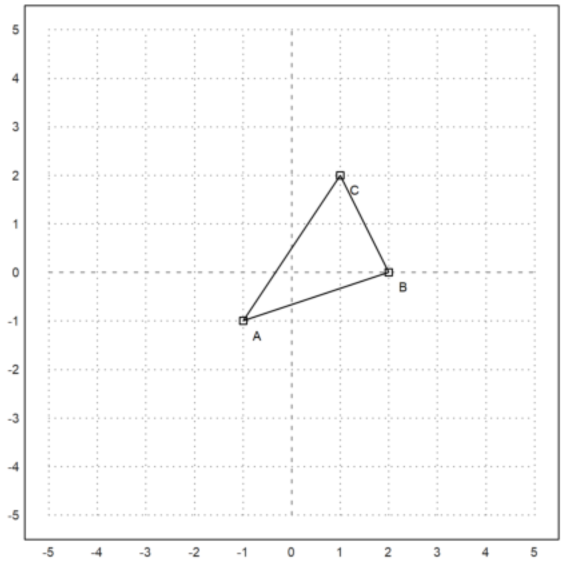
Latihan 5

Gambarlah lingkaran jika diketahui 3 titik yang membentuk segitiga

```
>setPlotRange(5)
```

```
[-5,  5,  -5,  5]
```

```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```



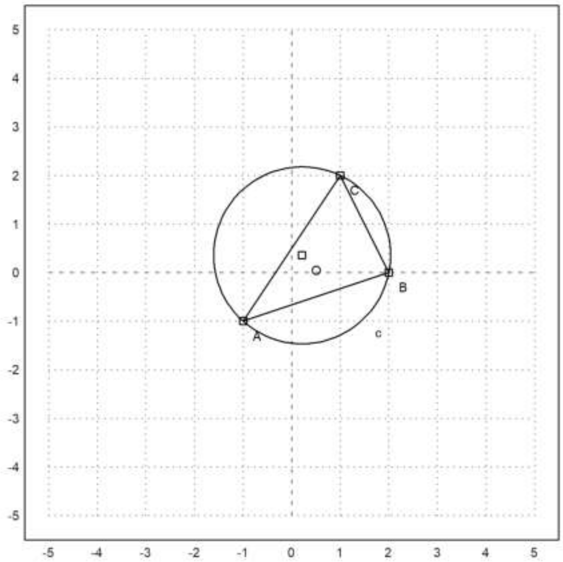

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Menggambar Parabola

Parabola adalah garis lengkung datar yang berbentuk jika suatu bidang memotong kerucut sejajar dengan garis titik sudut puncak dengan salah satu titik pada keliling alas. Contohnya seperti antena tv berbentuk bundar seperti piring cekung yang dapat menangkap siaran jarak jauh.

Latihan 1

Misalkan persamaan parabolanya

Gambarlah bentuk parabolanya!

```
>function f(x) &=a*x^2+b*x+c;
>setPlotRange(-5,6,-11,2);
>A=[-2,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[5,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[-2,0]; plotPoint(C,"C");
>&powerdisp:true;
>&f(-2)=0
```

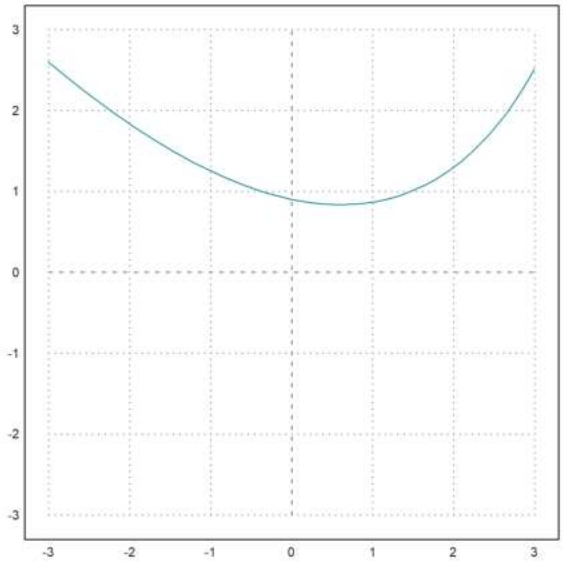
```
4 a - 2 b + c = 0
```

Latihan 2

```
>setPlotRange(3)

    [-3,  3,  -3,  3]

>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

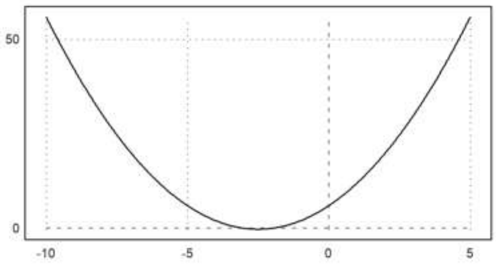
$$-\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}+\frac{2-x+3\,y}{\sqrt{10}}=0$$

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=5):
```



Latihan 3

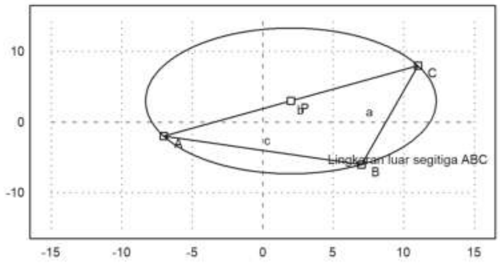
```
>function f(x) := x^2+5x+6
>aspect(2), plot2d("f(x)",-10,5):
```



Latihan

1. Gambarkan lingkaran luar dan dalam segitiga ABC dengan A(-7,-2), B(7,-4),C(11,8).

```
>setPlotRange(15);
>A=[-7,-2]; plotPoint (A,"A"); // definisi dan menggambar ketiga titik
>B=[7,-6]; plotPoint (B,"B");
>C=[11,8]; plotPoint (C,"C");
>plotSegment (A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment (B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment (C,A,"b"); // b=CA
>m=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga
>P=getCircleCenter(m); // titik pusat lingkaran m
>R=getCircleRadius(m); // jari-jari lingkaran m
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik "P"
>plotCircle(m,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```



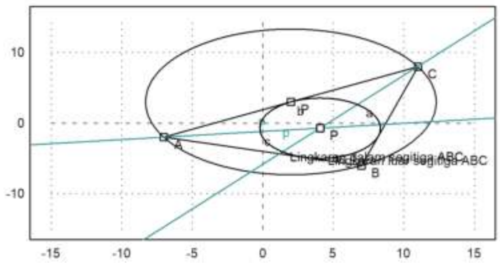

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[4.07107,  -0.727922]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
4.26458963757
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```



2. Diberikan ruas garis s melalui dua titik A dan titik B. Dengan koordinat titik A dan titik B berturut-turut (0,1) dan (7,1). Tentukan koordinat titik tengah ruas garis s!

```
>setPlotRange(10); //menggambar bidang kartesius
>A=[0,1]; plotPoint(A,"A"); // membuat dan menggambar titik A dan B
>B=[7,1]; plotPoint(B,"B");
>plotSegment(A,B,"s"); // menggambar garis dengan label s
>h= middlePerpendicular(A,B); //titik tengah AB
>plotLine(h); //garis melalui titik tengah
>D=lineIntersection(h,lineThrough(A,B)); // titik potong garis h dan garis yang melalui AB
>plotPoint(D,value=1);
```

3. Diberikan dua garis yang melewati titik koordinat sebagai berikut:
garis AB: titik A(-4,4) dan titik B(4,0)
garis CD: titik C(0,0) dan titik D(0,2)
tentukan koordinat titik potong kedua garis tersebut!

```
>setPlotRange(5); // menggambar bidang kartesius
>A=[-4,4]; plotPoint(A,"A"); // membuat dan menggambar 3 titik
>B=[4,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,0]; plotPoint(C,"C");
>D=[0,2]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB menggambar garis c dan b
>plotSegment(C,D,"b"); // b=CD
>lineThrough(A,B); // garis yang melalui titik A dan titik B
>lineThrough(C,D); // garis yang melalui titik C dan titik D
>E=lineIntersection(lineThrough(A,B),lineThrough(C,D))
```

```
[0,  2]
```

Menggambar Bidang/ segibanyak

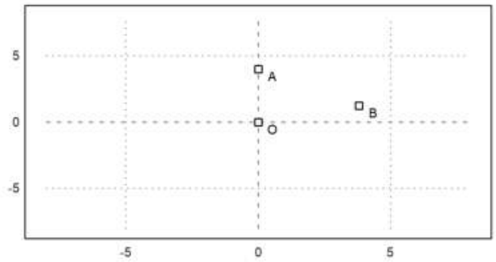
Bidang adalah permukaan rata dan tentu batasnya. Bidang didefinisikan sebagai permukaan datar yang didefinisikan oleh serangkaian garis yang tidak berpotongan

Dengan contoh 1 kita dapat menggambar segibanyak

Segilima

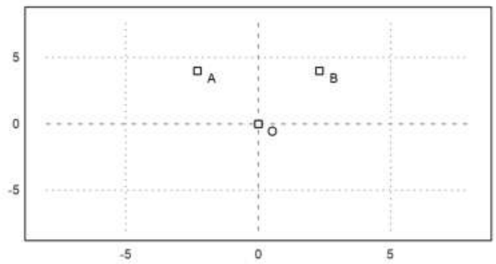
Langkah pertama adalah menggambar ketiga titik

```
>setPlotRange(-8,8,-8,8); O=[0,0]; plotPoint(O,"O"); A=[0,4]; plotPoint(A,"A"); B=turn(A,-72°); plotPoint(B,"B
```



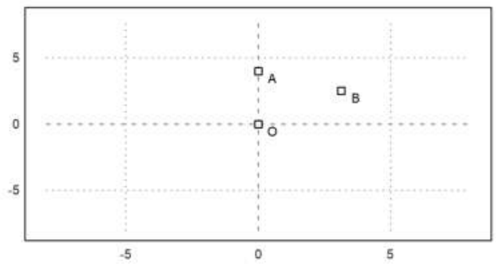
Segienam

```
>setPlotRange(-8,8,-8,8); O=[0,0]; plotPoint(O,"O"); A=[-2.3,4]; plotPoint(A,"A"); B=turn(A,-60°); plotPoint(B
```

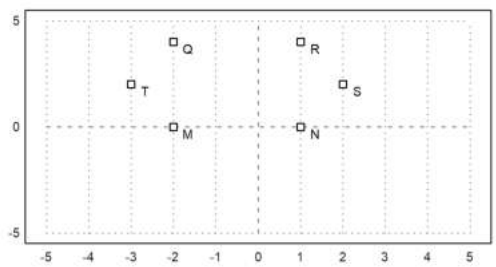


Segitujuh

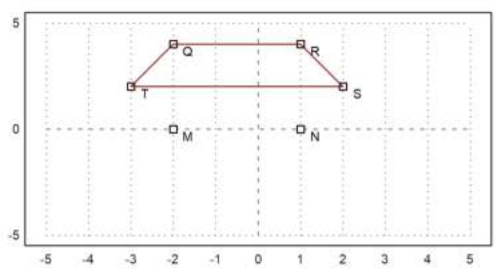
```
>setPlotRange(-8,8,-8,8); O=[0,0]; plotPoint(O,"O"); A=[0,4]; plotPoint(A,"A"); B=turn(A,-360°/7); plotPoint(B
```




```
>setPlotRange(-5,5,-5,5);
>Q=[-2,4]; plotPoint(Q,"Q");
>R=[1,4]; plotPoint(R, "R");
>S=[2,2]; plotPoint(S, "S");
>T=[-3,2]; plotPoint(T, "T");
>M=[-2,0]; plotPoint(M, "M");
>N=[1,0]; plotPoint(N, "N"):
```

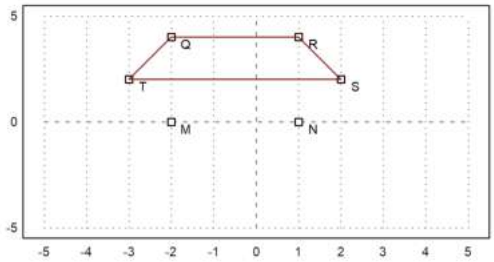



```
>color(2); plotSegment(Q,R," "); plotSegment(S,R," ");  plotSegment(S,T," "); plotSegment(Q,T," "):
```



Langkah kedua adalah menggambar garis AC, BC, AC

```
>plotSegment(Q,R," ");
>plotSegment(R,S," ");
>plotSegment(S,T," ");
>plotSegment(T,Q," "):
```

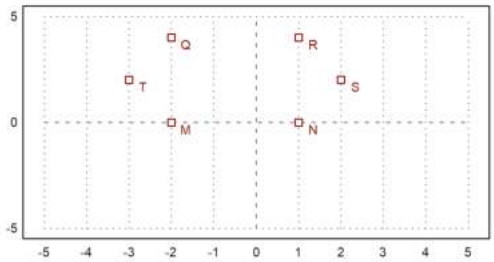


Trapesium Sama Kaki

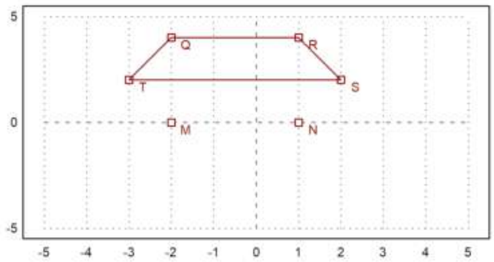
```
>setPlotRange(-5,5,-5,5)
```

```
[-5,   5,   -5,   5]
```

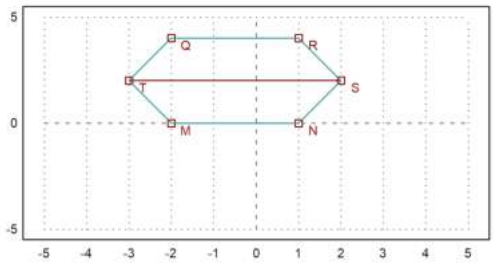
```
>Q=[-2,4]; plotPoint(Q,"Q")
>R=[1,4]; plotPoint(R, "R")
>S=[2,2]; plotPoint(S, "S");
>T=[-3,2]; plotPoint(T, "T");
>M=[-2,0]; plotPoint(M, "M");
>N=[1,0]; plotPoint(N, "N"):
```



```
>color(2); plotSegment(Q,R," "); plotSegment(S,R," "); plotSegment(S,T," "); plotSegment(Q,T," "):
```



```
>color(5); plotSegment(Q,R," "); plotSegment(R,S," ");  plotSegment(S,N," "); plotSegment(N,M," "); plotSegmen
```

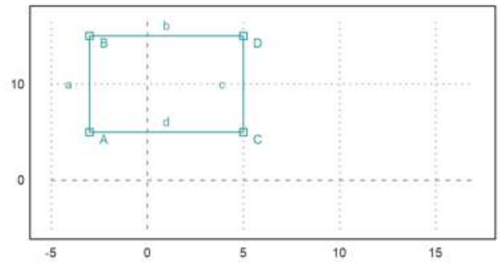


.....

```
>setPlotRange(-5,17,-5,17); //mendefinisikan bidang koordinat
>A=[-3,5]; B=[-3,15]; C=[5,5]; D=[5,15]; //mendefinisikan dan menggambar 4 titik
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D");
```

Menggambar 4 titik

```
>plotSegment(A,B,"a"); plotSegment(B,D,"b"); plotSegment(C,D,"c"); plotSegment(A,C,"d"):
```



Membuat ulang garis A,B dan C

Latihan 2

Menggambarkan segitiga siku siku dengan titik D(2,4), E(2,8), F(6,4)!

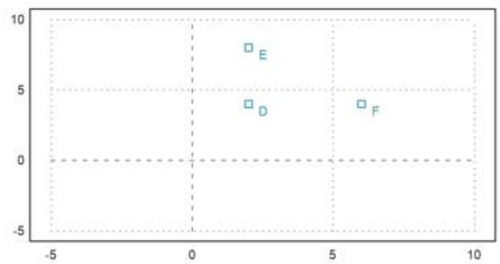
```
>setPlotRange(-5,10,-5,10);
```

Menentukan gambar bidang kartesius

```
>D=[2,4]; E=[2,8]; F=[6,4];
```

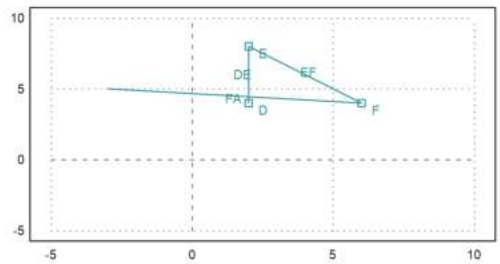
Menentukan 3 titik D,E dan F

```
>plotPoint(D,"D"); plotPoint(E,"E"); plotPoint(F,"F"):
```



Menggambar 3 titik

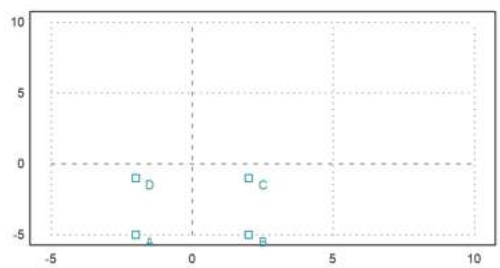
```
>plotSegment(D,E,"DE",10); plotSegment(E,F,"EF",10); plotSegment(F,A,"FA",10):
```



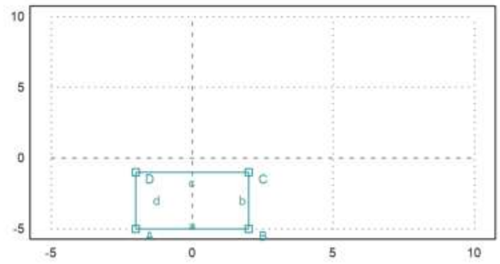
Latihan 3

Gambar dan tebaklah suatu bidang dengan titik A(-2,-5),B(2,-5),C(2,-1) dan D(-2,-1)

```
>setPlotRange(-5,10,-5,10); // membuat bidang kartesius
>A=[-2,-5]; B=[2,-5]; C=[2,-1]; D=[-2,-1]; // menentukan titik
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); plotPoint(D,"D"): // menggambar titik
```



```
>plotSegment(A,B,"a",10); plotSegment(B,C,"b",10); plotSegment(C,D,"c"); plotSegment(D,A,"d"): // menggambar g
```



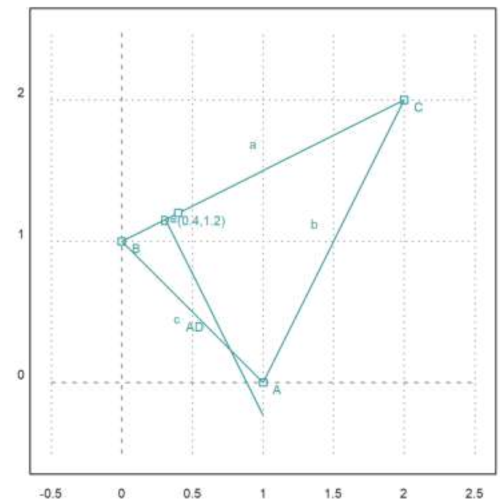
Latihan 4

Gambarlah objek geometri segitiga dengan 3 titik yaitu A (1,0), B(0,1) dan C (2,2)!

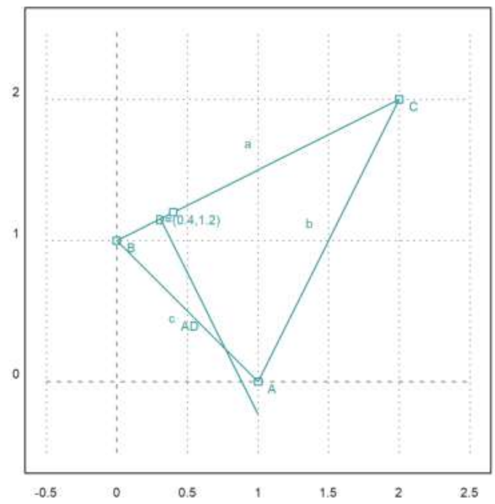
```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
    [-1,   2,   2]
```

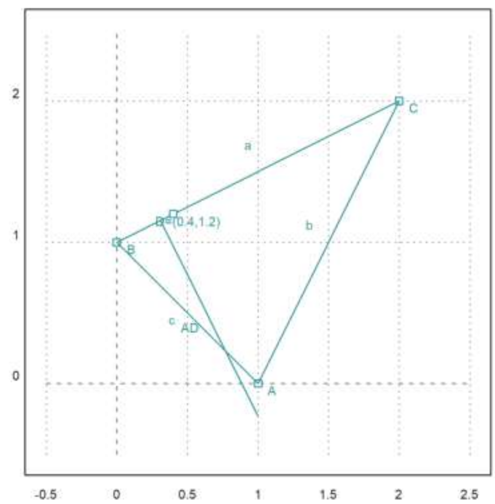
```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```



```
>l=angleBisector(A,C,B): // garis bagi <ACB
```




```
>g=angleBisector(C,A,B): // garis bagi <CAB
```




```
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Segitiga Siku-siku

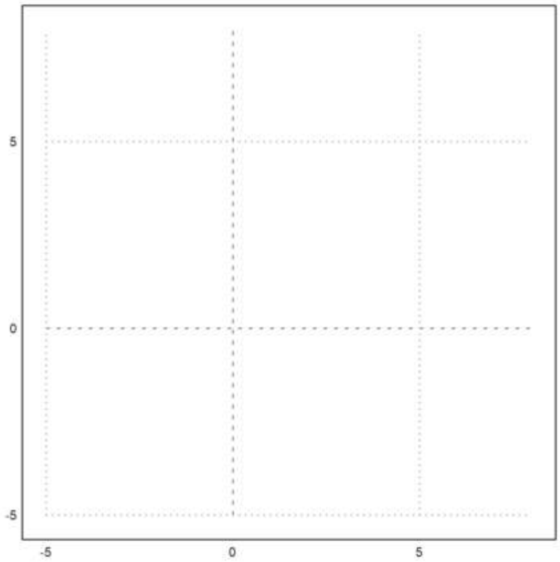
Langkah pertama dalam menggambarkan objek objek geometri yaitu membuat perintah untuk geometry dengan "load geometry".

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

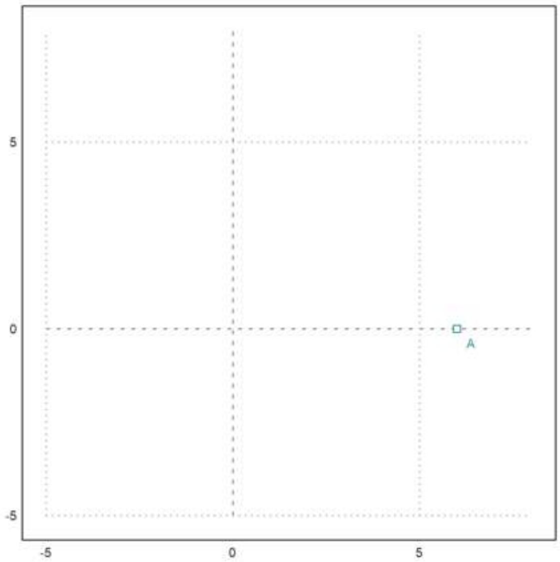
Langkah kedua kita akan menentukan rentang sumbu terlebih dahulu

```
>setPlotRange(-5,8,-5,8):
```

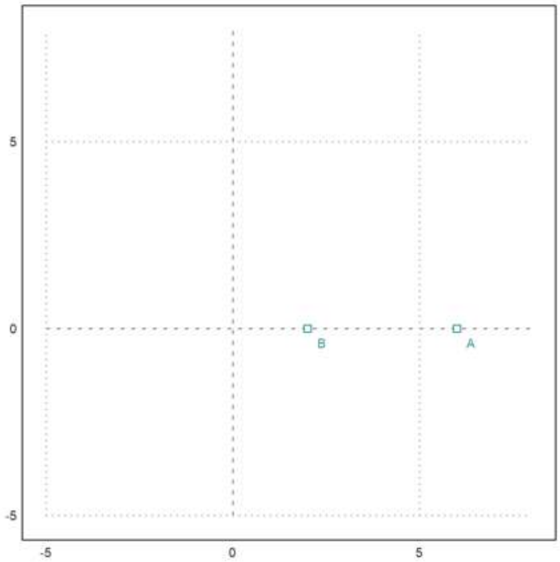


Langkah ketiga adalah menentukan ketiga titik bidang koordinat

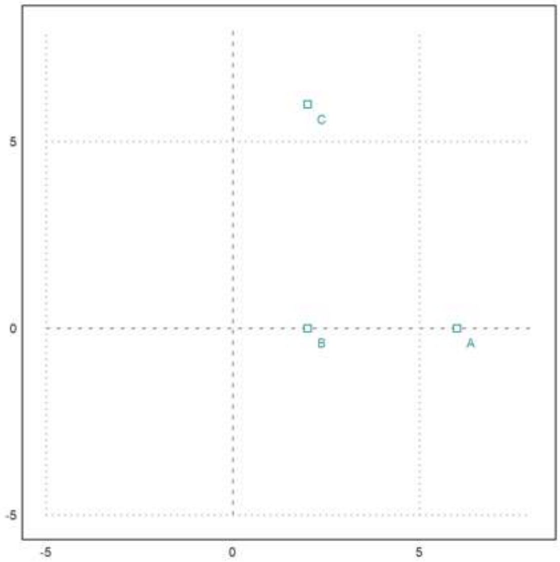
```
>A=[6,0]; plotPoint(A,"A"):
```




```
>B=[2,0]; plotPoint(B,"B"):
```

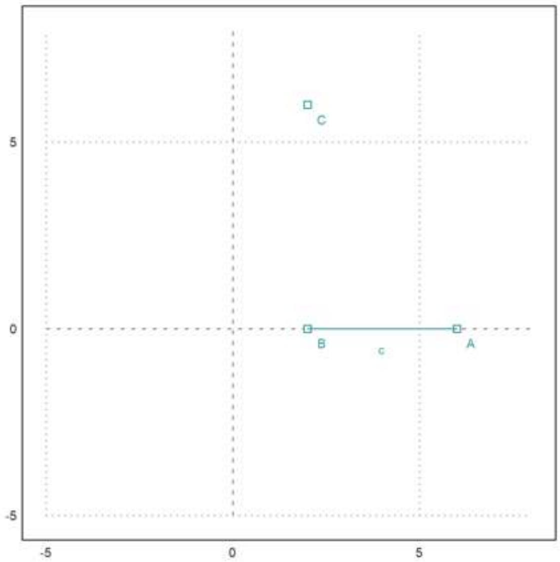



```
>C=[2,6]; plotPoint(C,"C"):
```

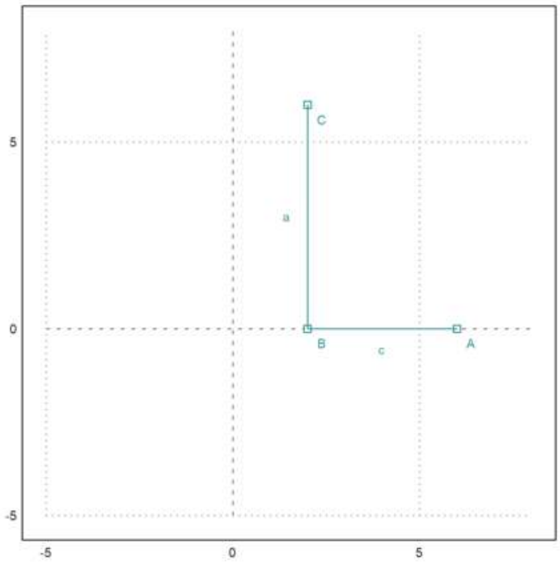


Langkah keempat menggambar ruas garis di ketiga titik

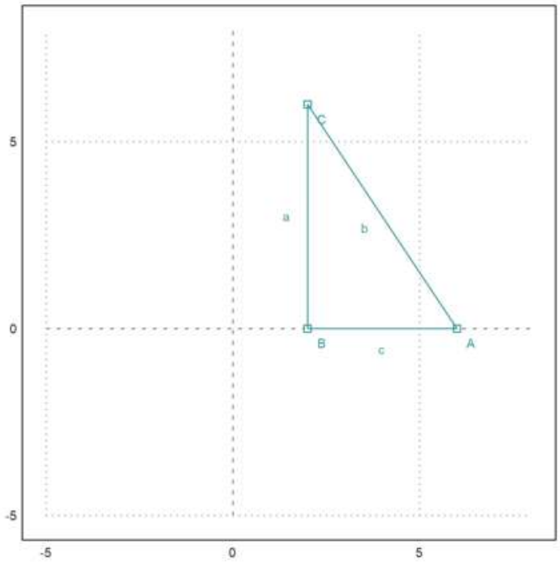
```
>plotSegment(A,B,"c"):
```




```
>plotSegment(B,C,"a"):
```




```
>plotSegment(A,C,"b"):
```



Langkah kelima menghitung luas segitiga siku siku

```
>areaTriangle(A,B,C)
```

```
12
```

membuktikan menggunakan perintah manual:

```
>norm(A-B) // menghitung panjaang alas dari panjang garis AB
```

```
4
```

```
>norm(B-C) // menghitung panjang tinggi dari panjang garis BC
```

```
6
```

```
>norm(A-B)*norm(B-C)/2
```

```
12
```

Sub Topik 4: Titik Tengah dan Titik Potong

Pada sub topik 4 akan dibahas mengenai :

1. Titik tengah suatu ruas garis
2. Titik potong dua garis
3. Titik potong garis dan lingkaran
4. Titik potong dua lingkaran

Titik tengah suatu ruas garis

Titik tengah suatu ruas garis adalah titik pada suatu ruas garis yang membagi dua ruas tersebut menjadi dua ruas garis yang kongruen (jarak dari titik tengah ke ujung-ujung garis adalah sama). Jika diketahui dua titik, yaitu titik A dan B, maka titik tengah garisnya adalah titik C yang terletak di tengah-tengah antara titik A dan B. Titik C berjarak sama dari titik A dan B.

Kita dapat mengetahui titik tengah suatu ruas garis dengan menggunakan perintah EMT, yaitu :

middlePerpendicular(A,B)

Jika ada dua koordinat ujung garis (x1, y1) dan (x2, y2), maka koordinat titik tengahnya (x, y) dapat dihitung sebagai berikut:

Artinya, untuk mengetahui titik tengah suatu ruas garis dengan menjumlahkan koordinat x dari kedua ujung garis dan kemudian membaginya dengan 2 untuk menemukan koordinat x titik tengah. Demikian juga, untuk menemukan koordinat y titik tengah dengan menjumlahkan koordinat y dari kedua ujung garis dan membaginya dengan 2.

Contoh soal:

Tentukan titik tengah suatu ruas garis jika diketahui dua titik, yaitu

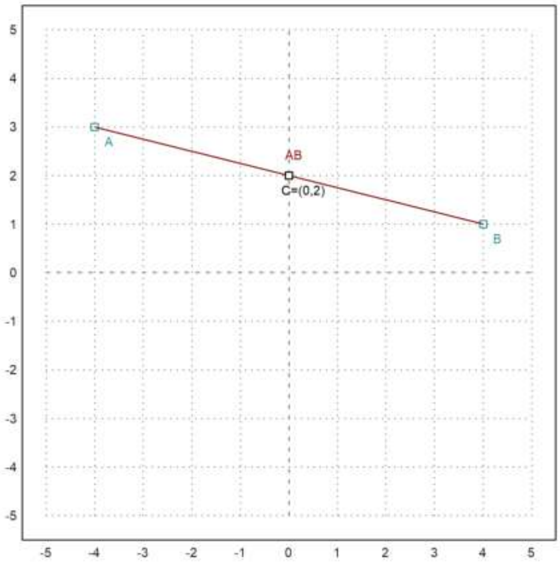
Penyelesaian:

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5);
>A=[-4,3];
```

```
>B=[4,1];
>plotPoint(A);
>plotPoint(B);
>color(2);
>plotSegment(A,B); color(1);
>p=middlePerpendicular(A,B);
>C=lineIntersection(p,lineThrough(A,B));
>plotPoint(C,value=1):
```



Diketahui

Titik tengahnya

Titik potong dua garis

Titik potong dua garis adalah titik di mana dua garis lurus berpotongan satu sama lain. Dalam konteks geometri atau matematika, dua garis yang berpotongan akan memiliki satu titik potong, yang merupakan titik yang terletak pada kedua garis tersebut. Titik potong ini memiliki koordinat yang spesifik dalam sistem koordinat yang digunakan.

Dalam geometri Euclidean, jika dua garis sejajar, maka mereka tidak akan memiliki titik potong. Namun, jika dua garis tidak sejajar, maka mereka akan memiliki satu titik potong yang dapat dihitung atau ditentukan.

Secara matematis, untuk menemukan titik potong dua garis, kita dapat menggunakan sistem persamaan linier. Jika kita memiliki dua persamaan linier yang mewakili dua garis, Kita dapat menyelesaikan sistem persamaan ini untuk menemukan nilai koordinat titik potong. Biasanya, kita akan menggunakan metode substitusi, eliminasi, atau grafik untuk menemukan titik potongnya.

Untuk mengetahui titik potong dua garis pada EMT terdapat perintah

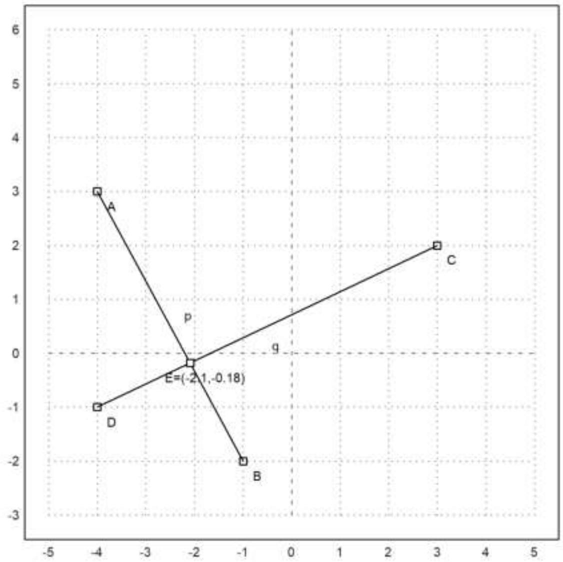
lineIntersection(g, h)

Contoh soal:

Diberikan titik A(-4,3), B(-1,-2), C(3,2), dan D(-4,-1). p merupakan ruas garis AB dan q merupakan ruas garis CD. Tentukan titik potong dua ruas garis tersebut!

Penyelesaian:

```
>setPlotRange(-5,5,-3,6);
>A=[-4,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[-1,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,2]; plotPoint(C,"C");
>D=[-4,-1]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"p");
>plotSegment(C,D,"q");
>t=lineThrough(A,B); // garis yang melalui A dan B
>s=lineThrough(C,D); // garis yang melalui C dan D
>E=lineIntersection(t,s); // E adalah titik potong p dan q
>plotPoint(E,value=1):
```



Titik potong garis dan lingkaran

Titik potong antara garis dan lingkaran adalah titik di mana sebuah garis lurus memotong lingkaran. Untuk memahami konsep ini secara lengkap, kita perlu memahami beberapa hal terkait dengan garis dan lingkaran.

Garis: Garis adalah himpunan tak terbatas titik yang terletak sepanjang jalur yang sama, dan garis ini dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk persamaan matematis, seperti persamaan linier. Sebuah garis memiliki kemiringan (gradien) dan titik potong sumbu y (intersep) yang memungkinkan kita untuk menggambarkannya atau menganalisanya dalam sistem koordinat.

Lingkaran: Lingkaran adalah himpunan semua titik yang berjarak sama dari satu titik tertentu yang disebut sebagai pusat lingkaran. Jarak ini disebut sebagai jari-jari lingkaran. Persamaan matematis dari lingkaran adalah

di mana (a, b) adalah koordinat pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran.

Ketika kita berbicara tentang titik potong antara garis dan lingkaran, ada beberapa kemungkinan, yaitu:

Tidak Ada Titik Potong: Garis tersebut mungkin tidak memotong lingkaran sama sekali jika jarak antara garis dan pusat lingkaran lebih besar dari jari-jari lingkaran.

Satu Titik Potong: Garis mungkin hanya memotong lingkaran di satu titik jika garis tersebut menyentuh lingkaran secara tepat pada satu titik, dengan jarak antara garis dan pusat lingkaran sama dengan jari-jari lingkaran.

Dua Titik Potong: Garis bisa memotong lingkaran di dua titik berbeda jika garis melintasi lingkaran.

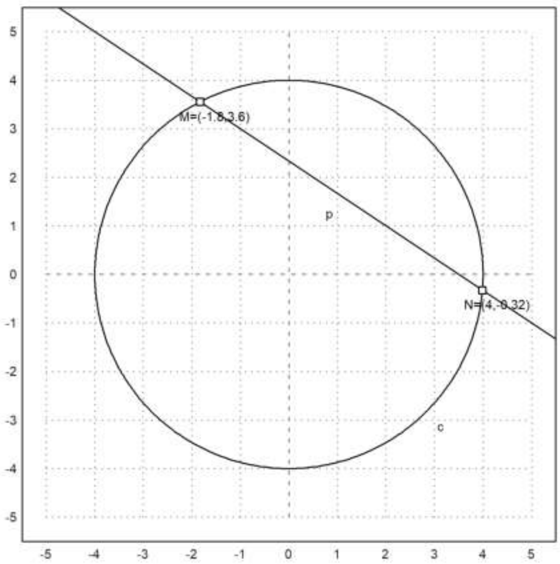
Untuk menentukan titik potong antara garis dan lingkaran, kita perlu menyelesaikan sistem persamaan antara persamaan garis (yang bisa berupa persamaan linier) dan persamaan lingkaran. Ini bisa menghasilkan titik potong yang merupakan koordinat di mana garis memotong lingkaran.

Contoh soal:

Diberikan lingkaran berjari jari 4 dengan titik pusat di (0,0). diberikan dua titik A dan B dengan koordinat berturut-turut (2,1) dan (-1,3). Apabila dibuat garis yang melalui titik A dan B serta memotong lingkaran,tentukan koordinat titik potong garis dan lingkaran terebut!

Penyelesaian:

```
>setPlotRange(5);
>O&:=[0,0]; c=circleWithCenter(O,4);
>A&:=[2,1]; B&:=[-1,3]; p=lineThrough(A,B);
>plotCircle(c); plotLine(p);
>{P1,P2}=lineCircleIntersections(p,c);
>P1; P2;
>plotPoint(P1,"M",value=1); plotPoint(P2,"N",value=1):
```



Menghitung menggunakan maxima

```
>c&=circleWithCenter(O,4)
```

```
[0, 0, 4]
```

```
>l&=lineThrough(A,B)
```

```
[- 2, - 3, - 7]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c)|radcan
```

$$\left[\left[\frac{14-3^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{53}}{13},\frac{21+2\,\sqrt{3}\,\sqrt{53}}{13}\right],\left[\frac{14+3^{\frac{3}{2}}\,\sqrt{53}}{13},\frac{21-2\,\sqrt{3}\,\sqrt{53}}{13}\right]\right]$$

Akan ditunjukkan juga bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

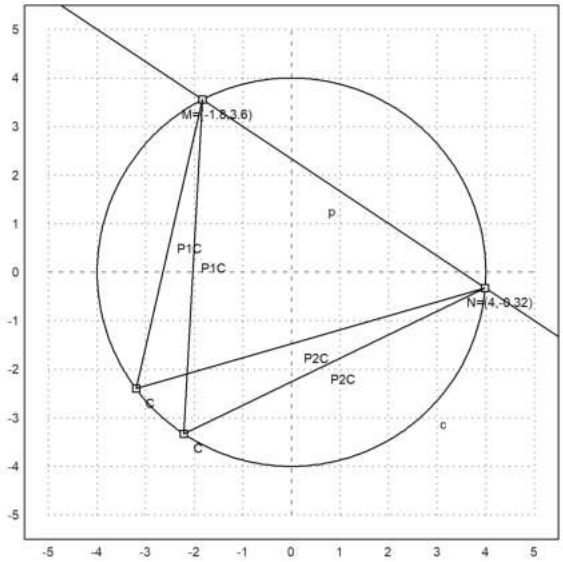
```
>C=O+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
60°57'49.55''
```

```
>C=O+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C)
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
60°57'49.55''
```

```
>insimg;
```



Titik potong dua lingkaran

Titik potong dua lingkaran adalah titik atau titik-titik di mana dua lingkaran berpotongan, yang berarti bahwa titik-titik tersebut terletak pada kedua lingkaran sekaligus. Titik potong ini dapat ditemukan jika dua lingkaran saling bersilangan, menyilangi, atau bersinggungan satu sama lain.

Dalam kasus titik potong dua lingkaran, ada beberapa skenario yang mungkin terjadi:

Dua Lingkaran Saling Bersilangan: Ini berarti bahwa dua lingkaran sepenuhnya tumpang tindih satu sama lain, dan titik potongnya akan ada di setiap titik tumpang tindih.

Dua Lingkaran Saling Menyilangi: Dalam situasi ini, dua lingkaran saling melintasi satu sama lain, tetapi tidak sepenuhnya tumpang tindih. Oleh karena itu, akan ada dua titik potong yang berbeda di mana kedua lingkaran berpotongan.

Dua Lingkaran Bersinggungan: Jika dua lingkaran bersinggungan, maka mereka hanya memiliki satu titik potong yang merupakan titik sentuh antara kedua lingkaran. Jika lingkaran tersebut bersinggungan di dalam, maka mereka akan memiliki satu titik potong di dalam satu lingkaran, dan jika bersinggungan di luar, maka titik potongnya berada di luar kedua lingkaran.

Untuk menentukan titik potong antara dua lingkaran, kita dapat menggunakan prinsip geometri dan aljabar. Secara matematis, kita dapat menyelesaikan sistem persamaan antara persamaan lingkaran pertama dan lingkaran kedua. Persamaan umum lingkaran adalah

di mana (a,b) adalah pusat lingkaran dan r adalah jari-jari lingkaran. Dengan menggabungkan persamaan lingkaran pertama dan kedua, kita dapat menemukan titik potongnya.

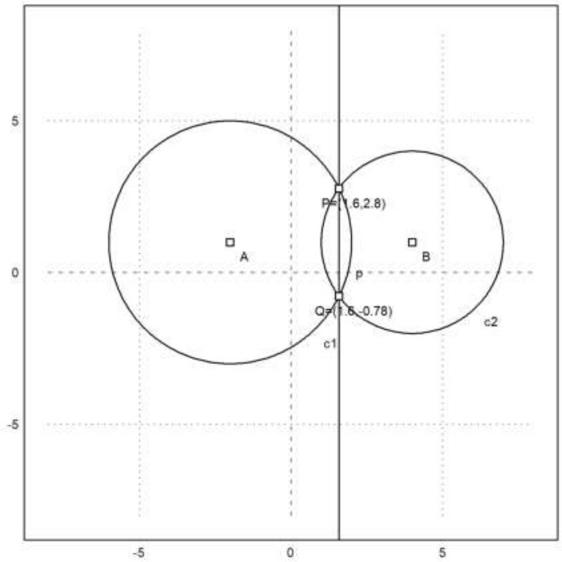
Dalam beberapa kasus, bisa tidak ada titik potong jika kedua lingkaran berada pada posisi yang tidak saling bersilangan, menyilangi, atau bersinggungan.

Contoh soal:

Diberikan 2 lingkaran, C1 dan C2 dengan jari-jari berturut-turut 4 dan 3. Titik A(-2,1) merupakan titik pusat lingkaran petama(C1)dan titik B (4,1) merupakan titik pusat lingkaran kedua(C2). Kedua lingkaran tersebut berpotongan pada dua titik p1 dan p2. Tentukan koordinat p1 dan p2!

Penyelesaian:

```
>setPlotRange(8);
>A=[-2,1]; B=[4,1];
>c1=circleWithCenter(A,4); // lingkaran 1
>c2=circleWithCenter(B,3); // lingkaran 2
>{P1,P2}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotCircle(c1); plotCircle(c2); plotLine(l);
>plotPoint(P1,"P",value=1); plotPoint(P2,"Q",value=1):
```



5. Persamaan Garis

Pada sub topik 5 akan dibahas mengenai persamaan garis yang melalui dua titik dan persamaan berbagai garis pada segitiga atau yang bisa disebut garis istimewa segitiga. Sub topiknya mencakup :

1. Persamaan garis yang melalui dua titik
2. Persamaan garis sumbu
3. Persamaan garis bagi
4. Persamaan garis berat
5. Persamaan garis tinggi

Persamaan garis yang melalui dua titik

Persamaan garis yang melalui dua titik atau juga dikenal sebagai persamaan titik-dua-titik adalah cara umum untuk menggambarkan garis lurus dalam sistem koordinat. Untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik tertentu, dua titik tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

Setelah kita mendapatkan koordinat 2 titik tersebut, kita membuat garis yang melewati 2 titik tersebut, yaitu titik A dan B. Lalu kita cari persamaannya, sedemikian sehingga saat x1 disubtitusi ke persamaan maka menghasilkan nilai y1, juga saat x2 disubtitusi ke persamaan maka didapat nilai y2 didapat dengan perintah EMT yaitu:

lineThrough(A,B);

setelah itu kita mengambar garis tersebut, dan dihitung persamaannya dengan menggunakan perintah:

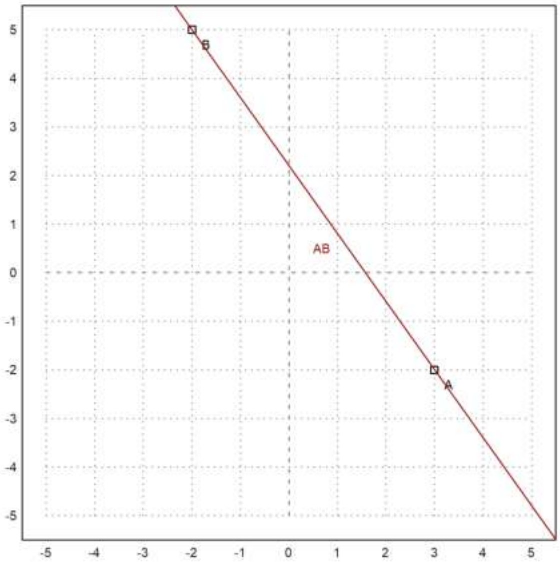
getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)

Contoh soal:
Diberikan 2 titik A dan B dengan koordinat sebagai berikut:

Tentukan persamaan dari garis yang melewati titik A dan B!

Penyelesaian :
Menggambar garis pada plot range

```
>setPlotRange(5);
>A=[3,-2];
>B=[-2,5];
>plotPoint(A);
>plotPoint(B);
>color(2);
>plotLine(lineThrough(A,B),"AB"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis yang melalui titik A dan B

```
>A&=[3,-2];
>B&=[-2,5];
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)
```

$$-7\,x-5\,y=-11$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{11-7\,x}{5}\right]$$

Rumus menentukan persamaan garis melalui dua titik

Diketahui

Penyelesaian

Persamaan garis sumbu

Garis sumbu adalah garis yang membagi sisi menjadi dua bagian sama panjang dan tegak lurus. Garis sumbu dalam sebuah segitiga adalah garis lurus yang menghubungkan satu titik pada segitiga dengan sisi dihadapannya dan membagi sisi tersebut menjadi dua bagian sama panjang secara tegak lurus.

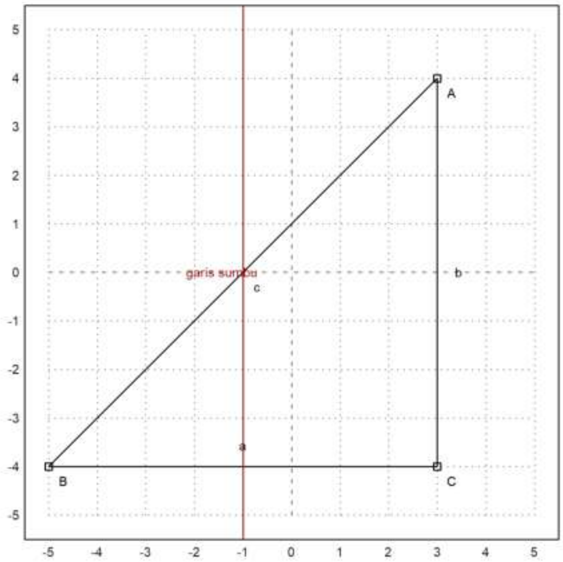
Contoh soal :

Terdapat

Tentukan persamaan garis sumbu dari ruas garis BC!

Penyelesaian :
Membuat plot garis sumbu segitiga

```
>setPlotRange(5);
>A=[3,4]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar titik
>B=[-5,-4]; plotPoint(B,"B");
>C=[3,-4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>color(2);
>p=middlePerpendicular(B,C); plotLine(p,"garis sumbu"):
```



Mencari persamaan garis sumbunya

```
>color(1);
>B&=[-5,-4];
>C&=[3,-4];
>p&=middlePerpendicular(B,C);
>$getLineEquation(p,x,y)
```

$$-8\,x=8$$

```
>$solve(%,x)
```

$$[x=-1]$$

Garis sumbu segitiga melalui 2 titik yaitu

Persamaan garis bagi sudut

Garis bagi sudut adalah garis yang membagi sudut menjadi dua sudut yang besarnya sama. Nama lain garis bagi dalam bahasa inggris adalah angle bisector yang dapat dijelaskan sebagai garis yang memotong sudut sehingga sudut tersebut terbagi menjadi dua bagian yang sama besar.
Garis bagi segitiga adalah garis yang membagi sudut segitiga menjadi dua sudut sama besar.

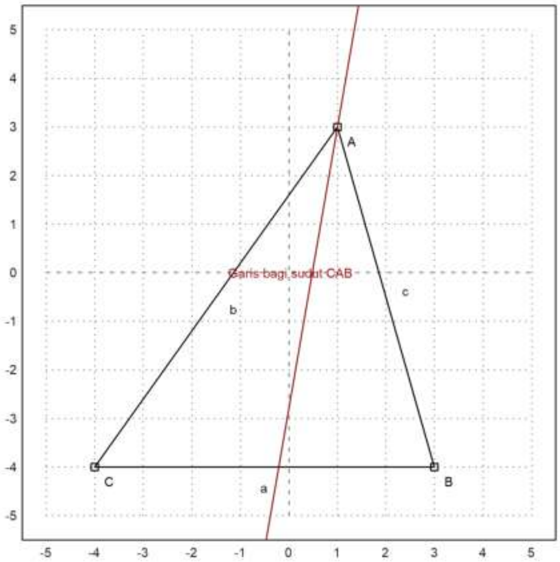
Contoh soal:

Terdapat

Tentukan garis bagi dari sudut A dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis bagi segitiga

```
>setPlotRange(5);
>A=[1,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-4]; plotPoint(B,"B");
>C=[-4,-4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>t=angleBisector(C,A,B);
>color(2);
>plotLine(t,"Garis bagi sudut CAB"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis bagi sudutnya

```
>A&=[1,3];
>B&=[3,-4];
>C&=[-4,-4];
>t&=angleBisector(C,A,B);
>$getLineEquation(t,x,y)
```

$$\left(-5-\frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)\,x+\left(-7+\frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)\,y=\frac{\left(-5-\frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)\,\left(-3+\frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)}{2}+\frac{\left(-1-\frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)\,\left(-7+\frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)}{2}$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{-1378+19\,\sqrt{53}\,\sqrt{74}+\left(265+2\,\sqrt{53}\,\sqrt{74}\right)\,x}{-371+7\,\sqrt{53}\,\sqrt{74}}\right]$$

Persamaan garis berat

Dalam geometri, garis berat segitiga merupakan sebuah ruas garis yang menghubungkan sebuah titik sudut ke titik tengah dari sisi yang berhadapan, sehingga membagi sisi tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang. Setiap segitiga memiliki tiga garis berat yang masing-masing berasal dari salah satu sudut segitiga dan menuju titik tengah sisi yang berlawanan. Garis berat ini juga dikenal sebagai garis median karena mereka memotong sisi segitiga pada titik tengahnya.

Dalam konteks segitiga, garis berat memiliki beberapa sifat penting. Salah satunya adalah ketika ketiga garis berat bersimpang-siuran di satu titik tunggal yang disebut pusat gravitasi atau pusat berat segitiga. Titik ini membagi setiap garis berat dalam perbandingan 2:1, yang berarti bahwa jarak dari titik tengah sisi ke sudut yang berlawanan adalah dua kali jarak dari pusat gravitasi ke titik tengah sisi. Garis berat dalam segitiga juga sering digunakan dalam perhitungan geometri dan trigonometri untuk menentukan berbagai sifat dan properti segitiga, seperti panjang sisi, luas, dan lainnya.

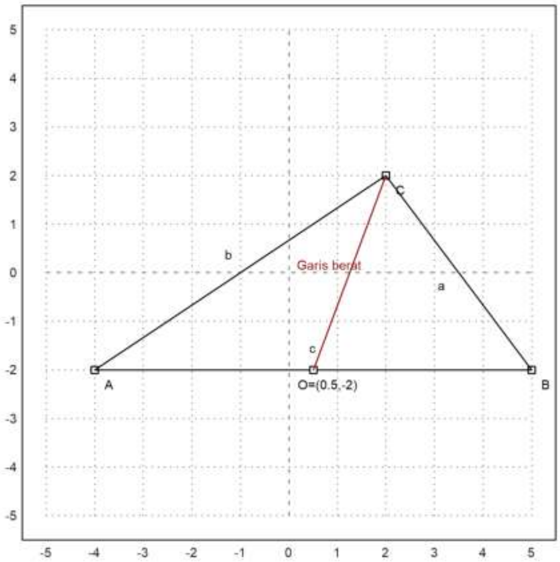
Contoh soal:

Terdapat

Tentukan garis berat segitiga dititik C dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis berat segitiga

```
>setPlotRange(5);
>A=[-4,-2]; plotPoint(A,"A");
>B=[5,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>t=middlePerpendicular(A,B);
>O=lineIntersection(t,lineThrough(A,B)); plotPoint(O,value=1);
>color(2);
>plotSegment(O,C,"Garis berat"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis beratnya

```
>A&=[-4,-2];
>B&=[5,-2];
>C&=[2,2];
>t&=middlePerpendicular(A,B);
>O&=lineIntersection(t,lineThrough(A,B));
>p&=lineThrough(O,C);
>$getLineEquation(p,x,y)
```

$$-4\,x+\frac{3\,y}{2}=-5$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{-10+8\,x}{3}\right]$$

Persamaan garis tinggi

Garis tinggi dalam segitiga adalah ruas garis yang ditarik dari sudut segitiga ke sisi yang berlawanan secara tegak lurus. Dengan kata lain, garis tinggi merupakan jarak vertikal dari salah satu sudut segitiga ke sisi yang berlawanan, dan garis ini membentuk sudut siku-siku dengan sisi tersebut.

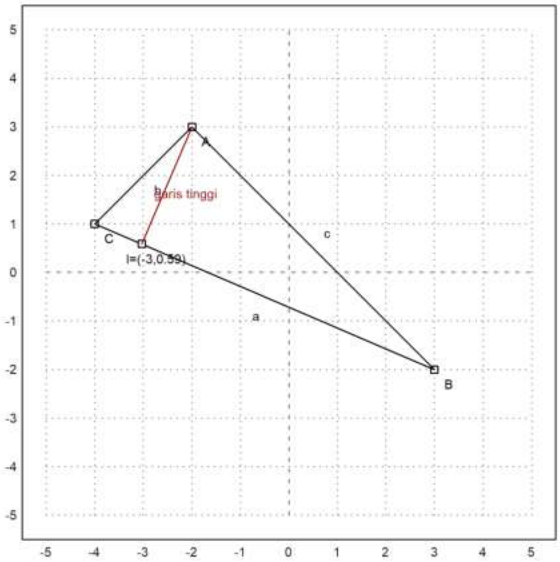
Contoh soal:

Terdapat

Tentukan garis tinggi di titik A dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis tinggi segitiga

```
>setPlotRange(5);
>A=[-2,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[-4,1]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>g=lineThrough(B,C);
>h=perpendicular(A,g);
>I=lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1);
>color(2);
>plotSegment(A,I,"garis tinggi"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis tingginya

```
>A&=[-2,3];
>B&=[3,-2];
>C&=[-4,-1];
>g&=lineThrough(B,C);
>h&=perpendicular(A,g);
>$getLineEquation(h,x,y)
```

$$-7\,x+y=17$$

```
>$solve(%,y)
```

$$[y=17+7\,x]$$

6. Menentukan Titik Pusat dan Jari - Jari Suatu Lingkaran

```
>load geometry
```

```
 Numerical and symbolic geometry.
```

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik - titik yang berjarak sama dengan satu titik tertentu. Titik tertentu itu disebut titik pusat lingkaran, sedangkan jarak yang sama adalah jari - jari lingkaran.
Rumus umum lingkaran yaitu:

Rumus umum lingkaran untuk titik pusat (0,0) yaitu:

Contoh

Tentukan titik pusat dan jari - jari lingkaran dari persamaan berikut ini:

Jawab:
Jari - jarinya yaitu

Titik Pusatnya yaitu

Untuk menentukan titik pusat dan jari - jari suatu lingkaran jika yang diketahui persamaan lingkarannya berupa persamaan baku :

maka titik pusatnya yaitu:

Bukti:
Dari persamaan bentuk baku tersebut, kita dapat menemukan titik pusat dengan cara mengelompokkan peubah yang sama di ruas kiri, sedangkan konstanta di ruas kanan, sebagai berikut:

Kemudian melengkapkan kuadrat sempurna persamaan tersebut menjadi:

Bentuk tersebut dapat disederhanakan menjadi:

Persamaan tersebut sudah menjadi persamaan bentuk umum, dimana untuk menentukan titik pusat dari persamaan bentuk baku yaitu:

Terbukti.
Dari pembuktian tersebut, dapat dibuktikan juga bahwa cara menentukan jari-jari suatu lingkaran jika yang diketahui persamaan bentuk bakunya adalah:

Contoh

Tentukan titik pusat dan jari - jari lingkaran dengan persamaan

Jawab:

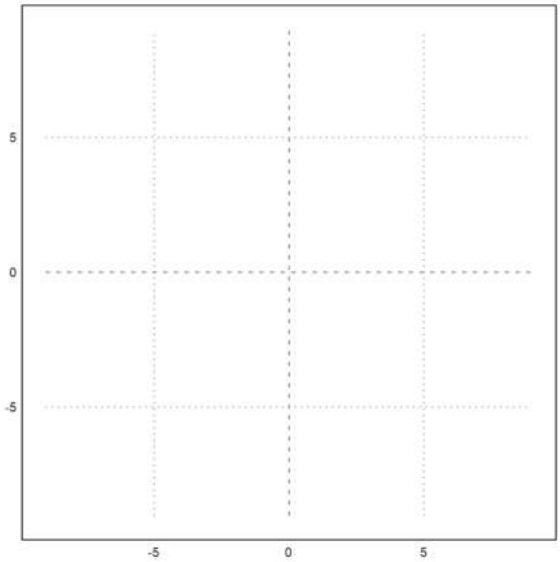
Untuk menentukan titik pusat dan jari - jari suatu lingkaran di EMT dapat menggunakan getCircleCenter(c) untuk titik pusat dan getCircleRadius(c) untuk jari - jari. Namun, hal ini dapat digunakan jika sudah terdapat lingkarannya yang ditentukan dari tiga titik yang diketahui.

Sebagai tambahan untuk membuktikan titik pusat dan jari - jari yang didapatkan benar, dapat dibuktikan dengan menggambar lingkaran yang berpusat di titik tersebut dan berjari - jari yang sesuai dengan yang dihasilkan menggunakan fungsi circleWithCenter(P,R)

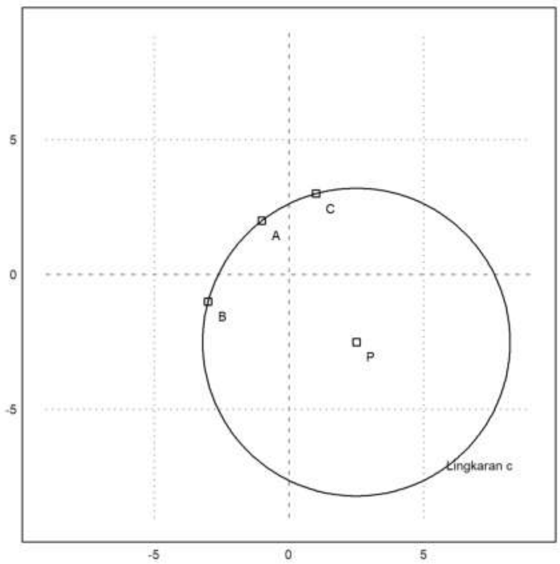
Contoh

1. Gambarlah lingkaran yang melalui titik A(-1,2), B(-3,-1), C(1,3) dan tentukan titik pusat dan jari - jarinya

```
>setPlotRange(-9,9,-9,9):
```




```
>A = [-1,2]; B = [-3,-1]; C = [1,3]; // definisikan titik - titiknya
>plotPoint(A,"A"); // menggambar titik A
>plotPoint(B,"B"); // menggambar titik B
>plotPoint(C,"C"); // menggambar titik C
>c = circleThrough(A,B,C); // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
>R = getCircleRadius(c); // menentukan jari - jari lingkaran
>P = getCircleCenter(c); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotPoint(P,"P"); // menggambar titik pusat
>plotCircle(c,"Lingkaran c"):
```

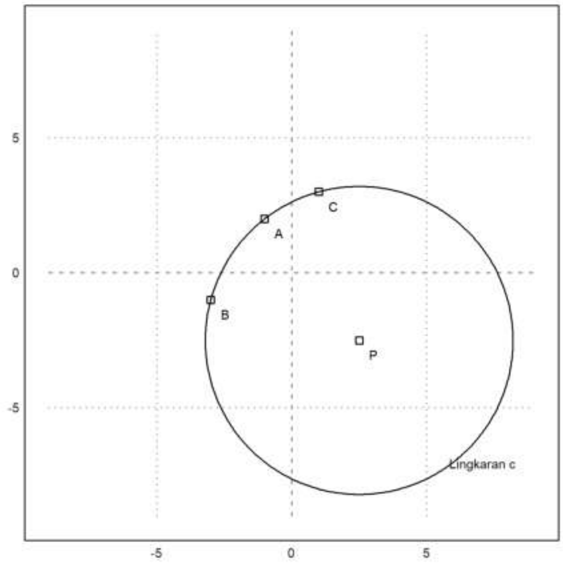


Oleh karena itu titik pusat lingkaran tersebut (c) yaitu (2.5, -2.5) dan berjari - jari 5.7008771255

```
>P, R, c
```

```
[2.5,  -2.5]
5.7008771255
[2.5,  -2.5,  5.70088]
```

```
>circleWithCenter(P,R):
```

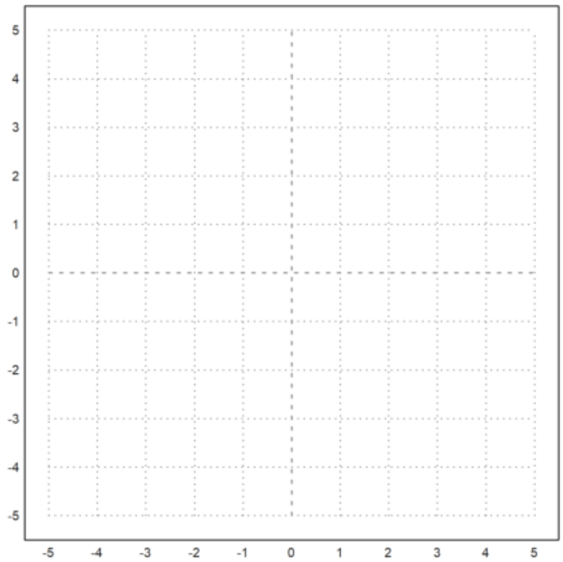



```
>reset
```

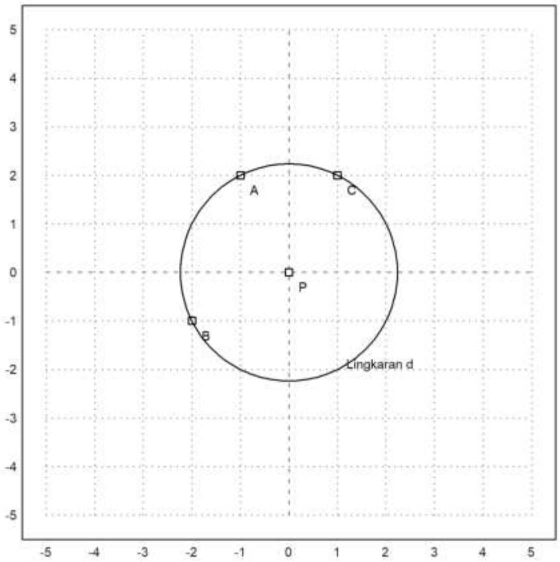
```
0
```

2. Gambarlah lingkaran yang melalui titik A(-1,2), B(-2,-1), C(1,2) dan tentukan titik pusat dan jari - jarinya

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5):
```




```
>A = [-1,2]; B = [-2,-1]; C = [1,2]; // definisikan titik - titiknya
>plotPoint(A,"A"); // menggambar titik A
>plotPoint(B,"B"); // menggambar titik B
>plotPoint(C,"C"); // menggambar titik C
>d = circleThrough(A,B,C); // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
>R = getCircleRadius(d); // menentukan jari - jari lingkaran
>P = getCircleCenter(d); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotPoint(P,"P"); // menggambar titik pusat
>plotCircle(d,"Lingkaran d"):
```

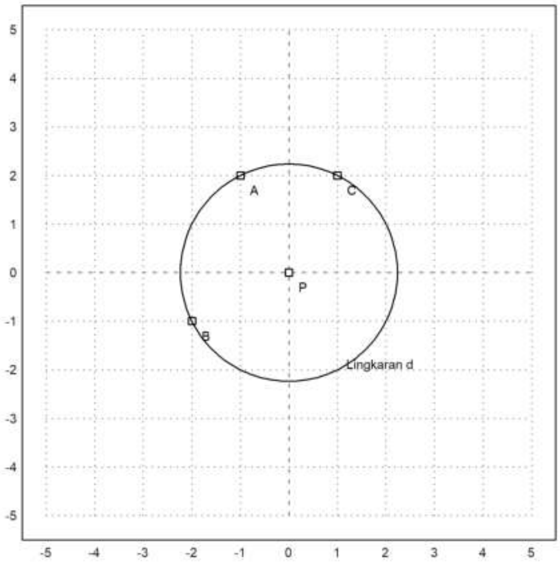


Oleh karena itu titik pusat lingkaran tersebut (d) yaitu (0,0) dan berjari - jari 2.2360679775

```
>P, R, d
```

```
[0,  0]
2.2360679775
[0,  0,  2.23607]
```

```
>circleWithCenter(P,R):
```

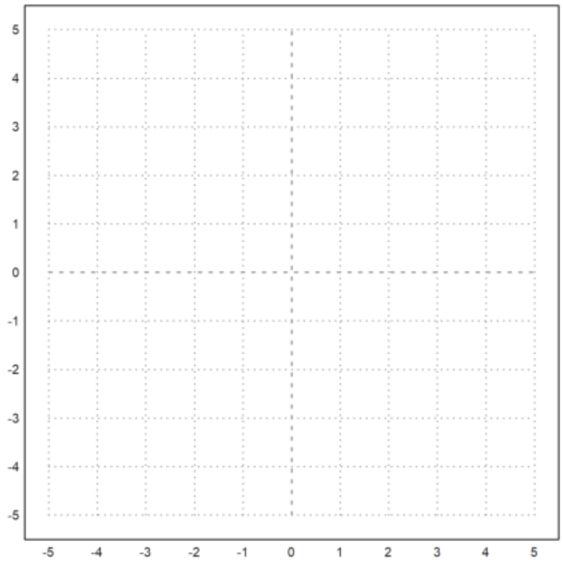



```
>reset
```

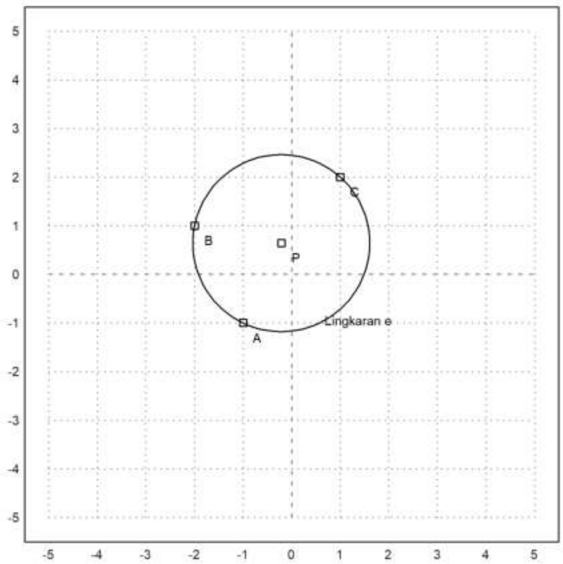
```
0
```

3. Gambarlah lingkaran yang melalui titik A(-1,-1), B(-2,1), C(1,2) dan tentukan titik pusat dan jari - jarinya

```
>setPlotRange(-5,5,-5,5):
```



```
>A = [-1,-1]; B = [-2,1]; C = [1,2]; // definisikan titik - titiknya
>plotPoint(A,"A"); // menggambar titik A
>plotPoint(B,"B"); // menggambar titik B
>plotPoint(C,"C"); // menggambar titik C
>e = circleThrough(A,B,C); // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
>R = getCircleRadius(e); // menentukan jari - jari lingkaran
>P = getCircleCenter(e); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotPoint(P,"P"); // menggambar titik pusat
>plotCircle(e,"Lingkaran e"):
```

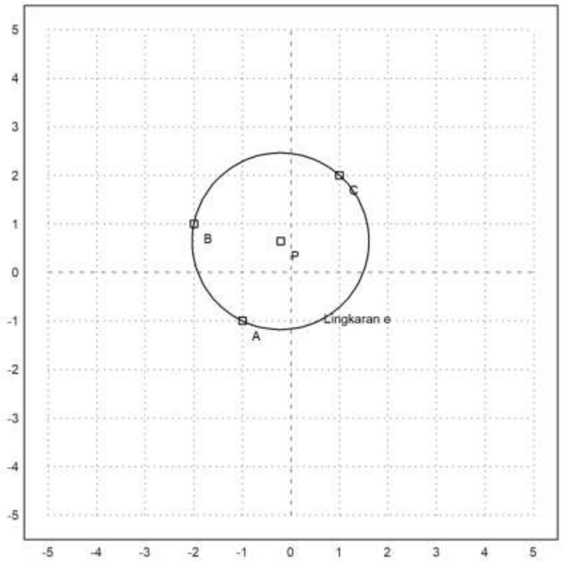


Oleh karena itu titik pusat lingkaran tersebut (e) yaitu (-0.214286, 0.642857) dan berjari - jari 1.82107839771

```
>P, R, e
```

```
[-0.214286,  0.642857]
1.82107839771
[-0.214286,  0.642857,  1.82108]
```

```
>circleWithCenter(P,R):
```




```
>reset
```

```
0
```

7. Menentukan Persamaan Lingkaran yang Melalui Tiga Titik

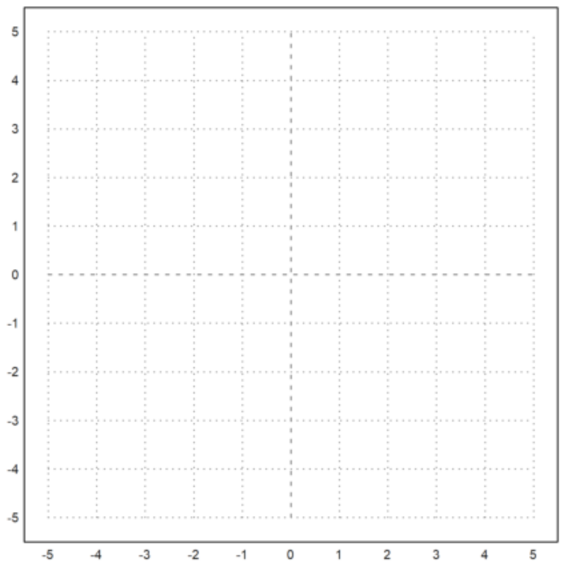
Untuk menentukan persamaan lingkaran melalui tiga titik dapat menggunakan cara substitusi ketiga titik tersebut ke persamaan bentuk baku

Setelah didapati tiga persamaan dari substitusi tersebut, kita dapat mengeliminasi masing - masing persamaan dengan persamaan yang lain, kemudian substitusikan nilai A, B, dan C nya kedalam persamaan bentuk baku.
Untuk lebih jelasnya, lihat contoh dibawah ini:

Contoh

1. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui (-1,-1), (-1,1), (1,1)

```
>remvalue x,y,A,B,C
>setPlotRange(-5,5,-5,5):
```



```
>A = [-1,-1]; B = [-1,1]; C = [1,1]; // definisikan titik - titiknya
>&powerdisp:true
```

```
true
```

```
>p1 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=-1,y=-1]
```

```
2 - A - B + C = 0
```

```
>p2 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=-1,y=1]

                              2 - A + B + C = 0


>p3 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=1,y=1]

                              2 + A + B + C = 0


>$p2 - p1
```

$$2\,B=0$$

```
>$p3 - p2
```

$$2\,A=0$$

```
>nilaic &= 2+A+B+C=0 with [A=0,B=0]

                                  2 + C = 0
```

Dari perhitungan di atas didapat bahwa nilai A=0, B=0, C = -2

```
>pb &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [A=0,B=0,C=-2]

                                    2    2
                              - 2 + x  + y  = 0
```

Jadi persamaan lingkaran yang melalui (-1,-1), (-1,1), (1,1) adalah:

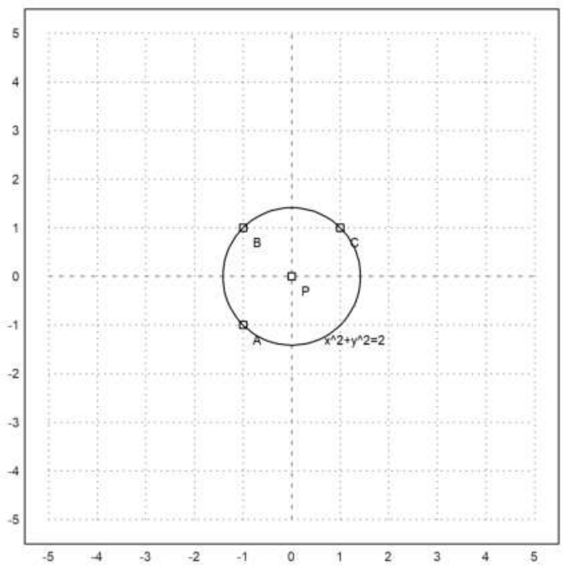
atau

Ini artinya, persamaan tersebut memiliki titik pusat di

dan berjari - jari

Akan digambarkan lingkarannya dibawah ini

```
>plotPoint(A,"A"); // menggambar titik A
>plotPoint(B,"B"); // menggambar titik B
>plotPoint(C,"C"); // menggambar titik C
>f = circleThrough(A,B,C); // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
>R = getCircleRadius(f); // menentukan jari - jari lingkaran
>P = getCircleCenter(f); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotPoint(P,"P"); // menggambar titik pusat
>plotCircle(f,"x^2+y^2=2"):
```




```
>P, R, f

     [0,  0]
     1.41421356237
```

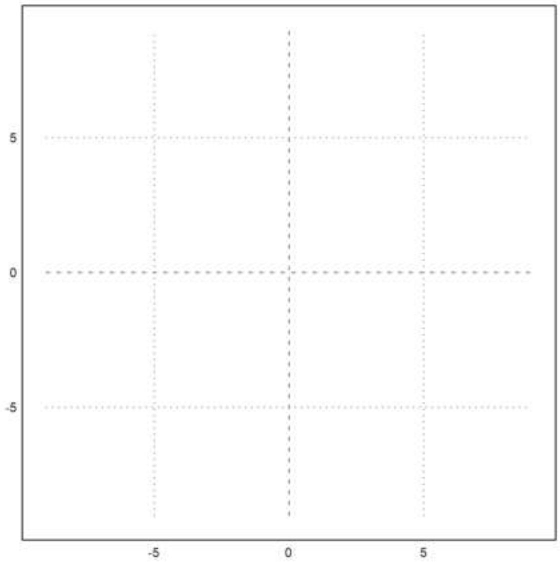
```
[0,  0,  1.41421]
```

```
>reset
```

```
0
```

2. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui (-2,-2), (-2,2), (2,2)

```
>setPlotRange(-9,9,-9,9):
```




```
>A = [-2,-2]; B = [-2,2]; C = [2,2]; // definisikan titik - titiknya
>&powerdisp:true
```

```
true
```

```
>p1 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=-2,y=-2]
```

```
8 - 2 A - 2 B + C = 0
```

```
>p2 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=-2,y=2]
```

```
8 - 2 A + 2 B + C = 0
```

```
>p3 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=2,y=2]
```

```
8 + 2 A + 2 B + C = 0
```

```
>$p2 - p1
```

$$4\,B=0$$

```
>$p3 - p2
```

$$4\,A=0$$

```
>nilaic &= 8+2*A+2*B+C=0 with [A=0,B=0]
```

```
8 + C = 0
```

Dari perhitungan di atas didapat bahwa nilai A=0, B=0, C = -8

```
>pb &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [A=0,B=0,C=-8]
```

```
             2     2
    - 8 + x   + y   = 0
```

Jadi persamaan lingkaran yang melalui (-1,-1), (-1,1), (1,1) adalah:

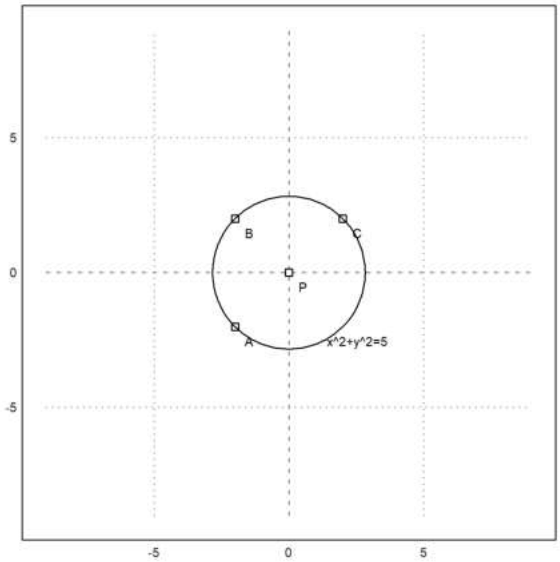
atau

Ini artinya, persamaan tersebut memiliki titik pusat di

dan berjari - jari

Akan digambarkan lingkarannya dibawah ini

```
>plotPoint(A,"A"); // menggambar titik A
>plotPoint(B,"B"); // menggambar titik B
>plotPoint(C,"C"); // menggambar titik C
>g = circleThrough(A,B,C); // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
>R = getCircleRadius(g); // menentukan jari - jari lingkaran
>P = getCircleCenter(g); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotPoint(P,"P"); // menggambar titik pusat
>plotCircle(g,"x^2+y^2=5"):
```




```
>P, R, g
```

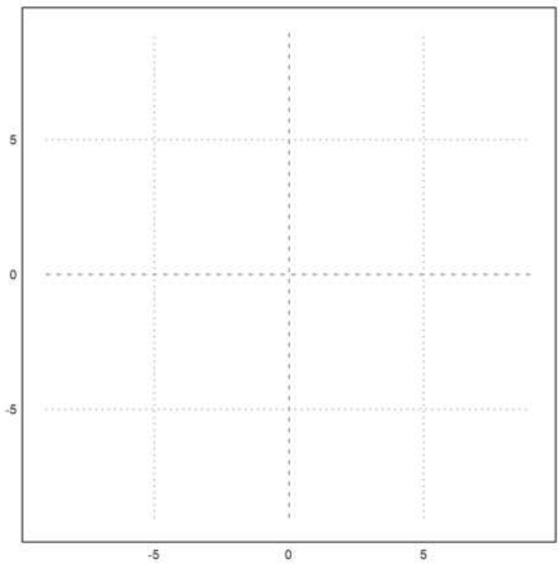
```
[0,  0]
2.82842712475
[0,  0,  2.82843]
```

```
>reset
```

```
0
```

3. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui (-1,-2), (-2,1), (1,2)

```
>setPlotRange(-9,9,-9,9):
```



```
>A = [-1,-2]; B = [-2,1]; C = [1,2]; // definisikan titik - titiknya
>&powerdisp:true
```

```
true
```

```
>p1 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=-1,y=-2]
```

```
5 - A - 2 B + C = 0
```

```
>p2 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=-2,y=1]
```

```
5 - 2 A + B + C = 0
```

```
>p3 &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [x=1,y=2]
```

```
5 + A + 2 B + C = 0
```

```
>$p2 - p1
```

$$-A+3\,B=0$$

```
>$p3 - p2
```

$$3\,A+B=0$$

```
>nilaic &= 5+A+2*B+C=0 with [A=0,B=0]
```

```
5 + C = 0
```

Dari perhitungan di atas didapat bahwa nilai A=0, B=0, C = -5

```
>pb &= x^2+A*x+y^2+B*y+C=0 with [A=0,B=0,C=-5]
```

```
             2     2
    - 5 + x   + y   = 0
```

Jadi persamaan lingkaran yang melalui (-1,-2), (-2,1), (1,2) adalah:

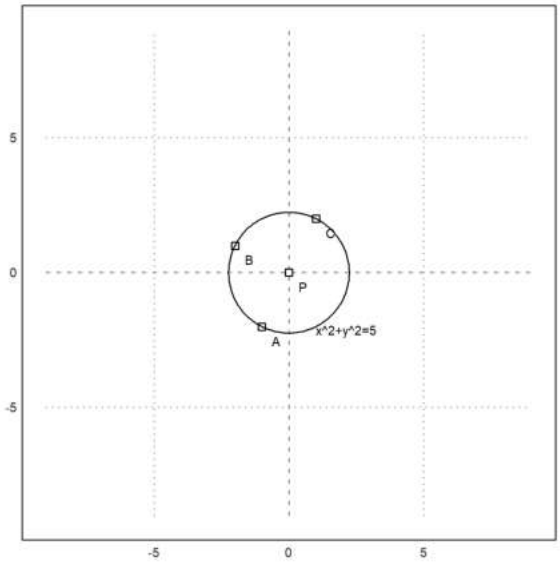
atau

Ini artinya, persamaan tersebut memiliki titik pusat di

dan berjari - jari

Akan digambarkan lingkarannya dibawah ini

```
>plotPoint(A,"A"); // menggambar titik A
>plotPoint(B,"B"); // menggambar titik B
>plotPoint(C,"C"); // menggambar titik C
>h = circleThrough(A,B,C); // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
>R = getCircleRadius(h); // menentukan jari - jari lingkaran
>P = getCircleCenter(h); // menentukan titik pusat lingkaran
>plotPoint(P,"P"); // menggambar titik pusat
>plotCircle(h,"x^2+y^2=5"):
```




```
>P, R, h
```

```
[0,  0]
2.2360679775
[0,  0,  2.23607]
```

```
>reset
```

```
0
```

8. Lingkaran Dalam dan Luar Segitiga

Pada sub topik 8 akan dibahas mengenai :

1. Menentukan titik pusat & jari-jari lingkaran luar suatu segitiga
2. Menentukan titik pusat & jari-jari lingkaran dalam suatu segitiga

Menentukan titik pusat & jari-jari lingkaran luar suatu segitiga

Titik pusat lingkaran luar segitiga

Titik pusat lingkaran luar segitiga, yang juga disebut "pusat lingkaran luar" atau "pusat sirkum," adalah titik tunggal di mana lingkaran luar yang melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut bersentuhan. Ini adalah titik pusat lingkaran yang melingkupi seluruh segitiga, dan jaraknya sama dari ketiga sudut segitiga. Pusat lingkaran luar ini memiliki sifat penting dalam geometri segitiga.

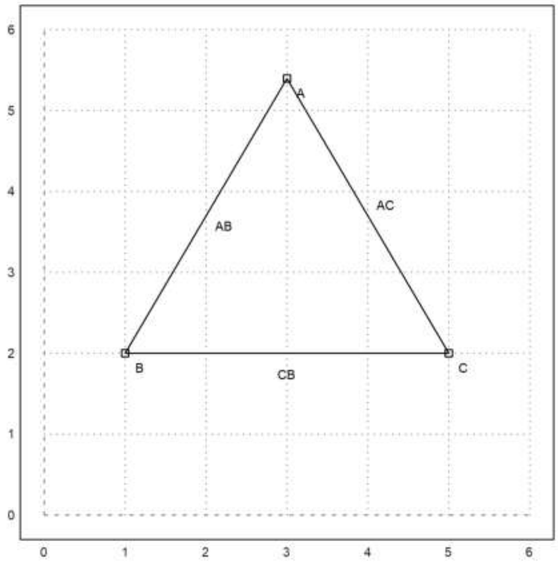
Jari-jari lingkaran luar segitiga

Jari-jari lingkaran luar segitiga adalah garis lurus yang ditarik dari pusat lingkaran luar segitiga ke salah satu titik sudut segitiga tersebut. Dengan kata lain, jari-jari ini adalah jarak dari pusat lingkaran ke salah satu sudut segitiga yang sekaligus merupakan panjang garis lurus terpendek dari pusat lingkaran luar ke sisi segitiga yang bersangkutan. Jari-jari lingkaran luar segitiga memiliki peran penting dalam berbagai konsep matematika dan geometri, seperti dalam menghitung keliling segitiga, menggambar lingkaran luar segitiga, dan memahami sifat-sifat segitiga tertentu.

```
>load geometry
```

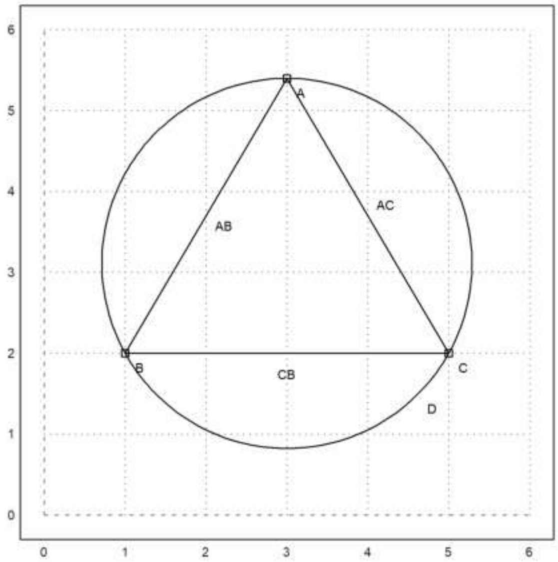
```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(0,6,0,6);
>A=[3,5.4]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A, B);
>plotSegment(A, C);
>plotSegment(C, B):
```

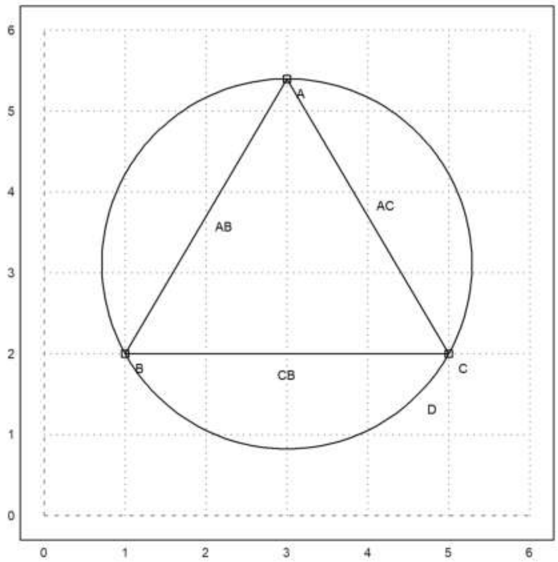


2. Menggambar lingkaran luar suatu segitiga

```
>D=circleThrough(A,B,C); plotCircle(D,"D"):
```

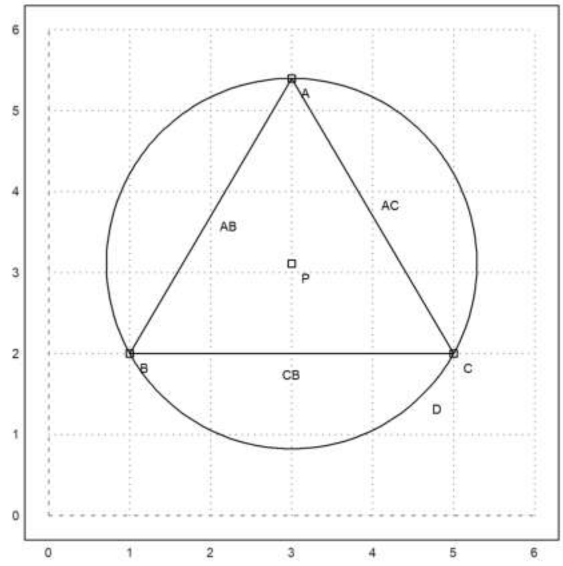



```
>getCircleCenter(D):
```



3. Menggambar titik pusat lingkaran

```
>P=getCircleCenter(D);
>plotPoint (P, "P"):
```




```
>reset
```

```
0
```

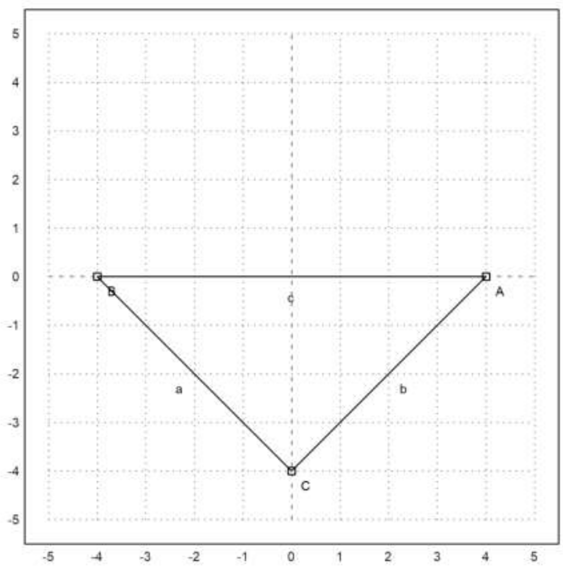
Latihan 1

1.Diketahui suatu segitiga dengan koordinat titik sudutnya A(4,0), B(-4,0), C(0,-4) tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran luarnya!

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5);
>A=[4,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[-4,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,-4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(A,C,"b");
>plotSegment(C,B,"a"):
```



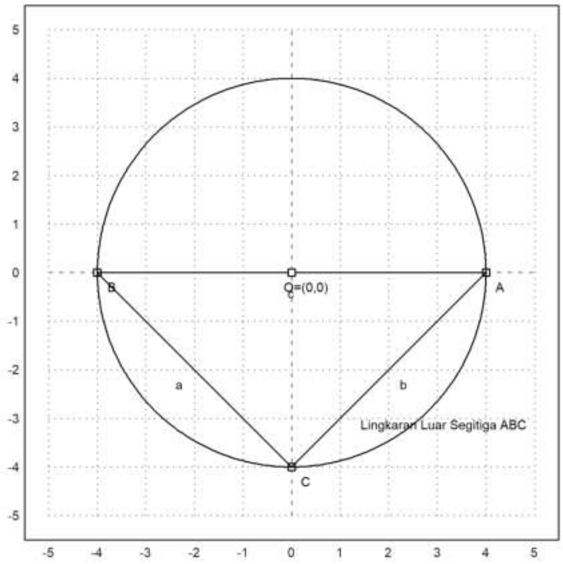

```
>d=circleThrough(A,B,C);
>R=getCircleRadius(d)
```

```
4
```

```
>O=getCircleCenter(d)
```

```
[0,  0]
```

```
>plotPoint(O,value=1);
>plotCircle(d,"Lingkaran Luar Segitiga ABC"):
```




```
>reset
```

```
0
```

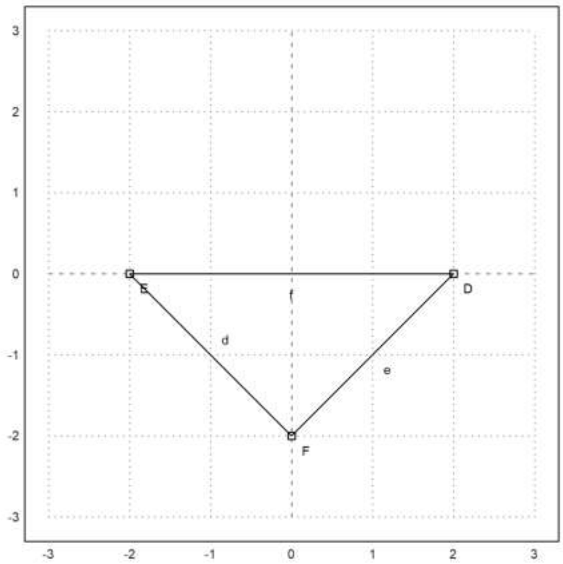
Latihan 2

2.Diketahui suatu segitiga dengan koordinat titik sudutnya D(2,0),E(-2,0),F(0,-2) tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran luarnya!

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(3);
>D=[2,0]; plotPoint(D,"D");
>E=[-2,0]; plotPoint(E,"E");
>F=[0,-2]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(D,E,"f");
>plotSegment(E,F,"d");
>plotSegment(D,F,"e"):
```



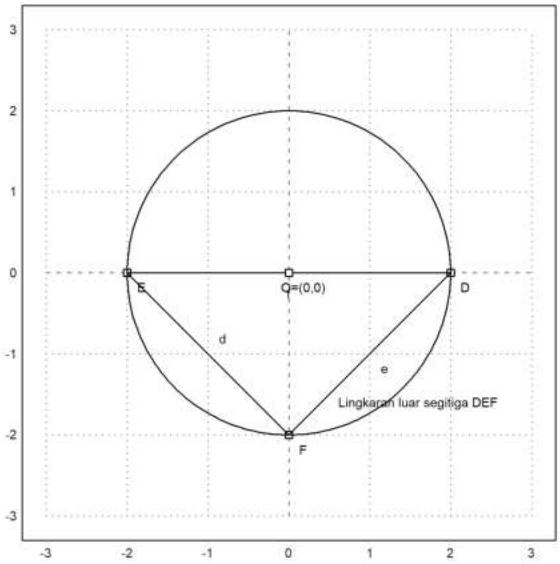

```
>c=circleThrough(D,E,F);
>R=getCircleRadius(c)
```

```
2
```

```
>O=getCircleCenter(c)
```

```
[0,  0]
```

```
>plotPoint(O,value=1);
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga DEF"):
```




```
>reset
```

```
0
```

```
>
```

Menentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dalam suatu segitiga

Titik pusat lingkaran dalam segitiga

Titik pusat lingkaran dalam segitiga disebut "pusat lingkaran dalam" atau "insentro." Pusat lingkaran dalam adalah titik di dalam segitiga yang memiliki jarak yang sama dari ketiga sisi segitiga. Itu juga merupakan pertemuan dari tiga sudut-bagi segitiga yang menjadikannya titik pusat lingkaran dalam segitiga. Pusat lingkaran dalam ini memiliki banyak sifat geometri yang penting dalam memahami segitiga, seperti membagi sudut-bagi segitiga menjadi dua bagian yang sama panjang.

Jari-jari lingkaran dalam segitiga

Jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah garis yang ditarik dari pusat lingkaran ke titik-titik pada sisi segitiga yang bersinggungan dengan lingkaran. Ini biasanya digunakan dalam berbagai konteks geometri untuk menghitung panjang atau hubungan antara jari-jari lingkaran dan sisi segitiga. Salah satu hubungan yang penting adalah bahwa jari-jari lingkaran dalam segitiga selalu tegak lurus terhadap sisi segitiga yang bersentuhan dengannya. Dalam konteks trigonometri, hal ini dapat digunakan untuk menghitung sudut dan panjang sisi dalam segitiga.

Contoh bagaimana kita menentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dalam suatu segitiga dengan menggunakan Euler Math Toolbox.
Semisal kita
Misal kita diberikan 3 titik sudut suatu segitiga dengan koordinat A(1,0),B(0,1),dan C(2,2) dan menentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dalam segitiga tersebut

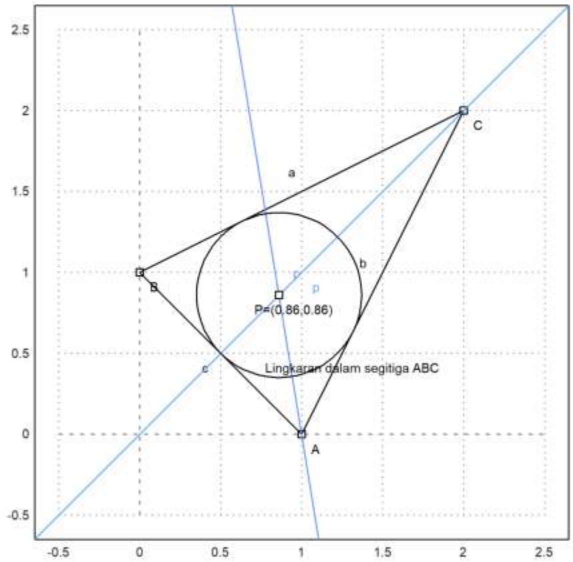
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g); // titik potong kedua garis bagi sudut
>color(12); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,value=1);
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dalam
```



Latihan 1

Diketahui suatu segitiga dengan koordinat titik sudutnya D(4,0),E(-4,0),F(0,-4) tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dalamnya!

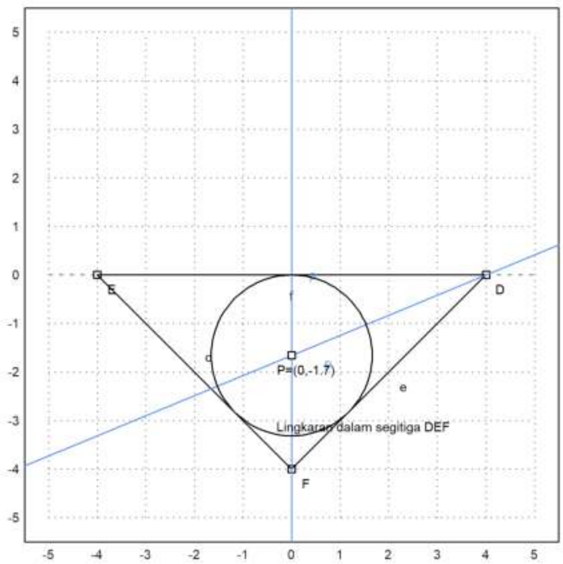
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>D=[4,0]; plotPoint(D,"D");
>E=[-4,0]; plotPoint(E,"E");
>F=[0,-4]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(D,E,"f");
>plotSegment(E,F,"d");
>plotSegment(D,F,"e");
>l=angleBisector(D,F,E); // garis bagi <DFE
>g=angleBisector(F,D,E); // garis bagi <FDE
>P=lineIntersection(l,g); // titik potong kedua garis bagi sudut
>color(12); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,value=1);
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(D,E))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
1.65685424949
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga DEF"): // gambar lingkaran dalamg=angleBisector(I,
```




```
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0,  -1.65685]
```

```
>reset
```

```
0
```

2.Diketahui suatu segitiga dengan koordinat titik sudutnya G(-2,0),H(0,-2),I(2,0) tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dalamnya!

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

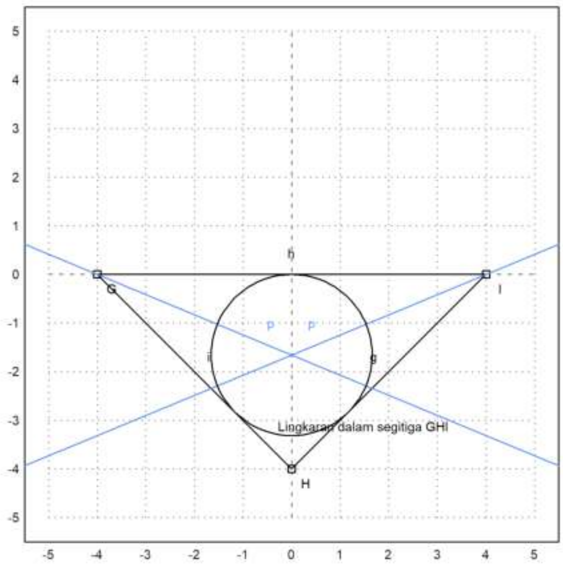
```
>setPlotRange(5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>G=[-4,0]; plotPoint(G,"G");
>H=[0,-4]; plotPoint(H,"H");
>I=[4,0]; plotPoint(I,"I");
>plotSegment(G,H,"i");
>plotSegment(H,I,"g");
>plotSegment(G,I,"h");
>l=angleBisector(G,I,H); // garis bagi <GIH
>g=angleBisector(I,G,H); // garis bagi <IGH
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0,  -1.65685]
```

```
>color(12); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(G,H))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
1.65685424949
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga GHI"): // gambar lingkaran dalam
```



9. Menentukan Persamaan dan Menggambar Parabola

Pada sub topik 9 akan dibahas mengenai :

1. Menentukan persamaan parabola yang ditentukan oleh titik fokus dan garis arah (direktris).
2. Menggambar parabola yang ditentukan oleh titik fokus dan garis arah (direktris).

Parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu dan suatu garis tertentu. Selanjutnya, titik tersebut dikenal sebagai titik fokus parabola, sedangkan garis tersebut dikenal sebagai garis arah (direktris).

Menentukan persamaan parabola yang ditentukan oleh titik fokus dan

garis arah (direktris)

Akan diilustrasikan gambar dari kurva parabola. Misalkan titik fokus F(p,0), titik puncak O(0,0), garis arah (direktris) yaitu garis g dan kita pilih R (-p,y) pada garis g, kita pilih sembarang titik P(x,y) yang ada pada parabola. Berikut ilustrasi gambar dari kurva parabolanya

Jika P(x,y) adalah sembarang titik pada parabola, maka dari definisi kurva parabola diperoleh hubungan

Persamaan parabola y^2 = 4px dengan titik puncak O (0,0) dengan titik fokus F(p,0) akan mepresentasikan parabola terbuka ke kanan (arah sumbu x positif).

Dengan cara perhitungan yang mirip dengan cara di atas, maka kita akan dapat menentukan representasi dari tiga persamaan parabola lainnya yang menghadap ke arah yang berbeda

Menggambar parabola yang ditentukan oleh titik fokus dan garis arah

(direktris).

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>A &=[-1,-1]; B &=[2,0]; C &=[1,2]
```

```
[1, 2]
```

```
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$$[-1, 3, -2]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{-2+x}{3}\right]$$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}+\frac{2-x+3\,y}{\sqrt{10}}=0$$

```
>A=[-1,-1]; B=[2,0]; C=[1,2]
```

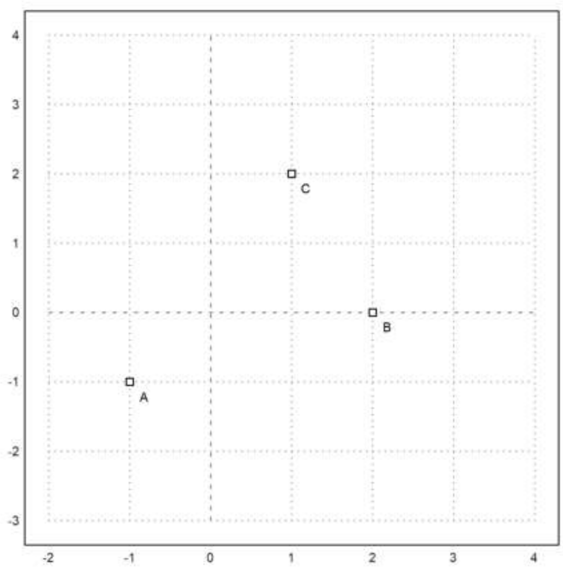
```
[1,  2]
```

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

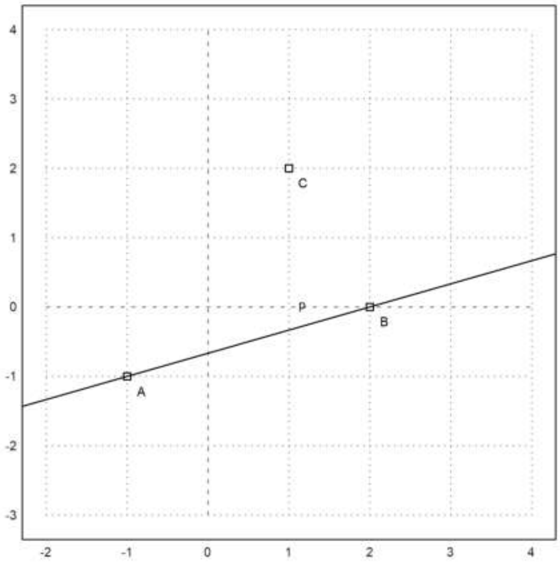
```
[y = 26 - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) - 3 x,
                         y = 26 + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) - 3 x]
```

Solusinya adalah:

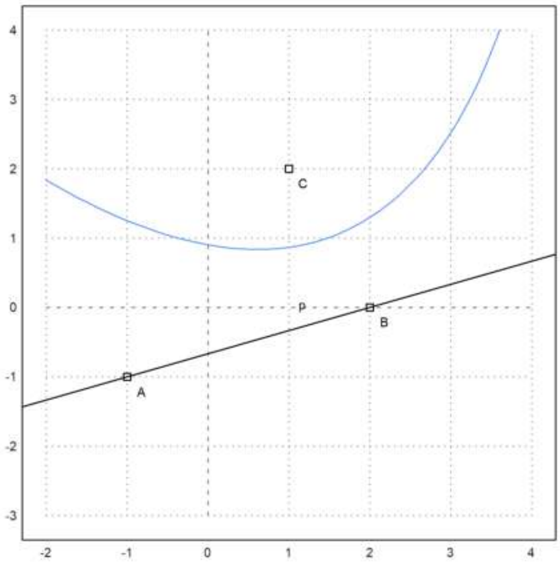
```
>setPlotRange (-2,4,-3,4); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"):
```




```
>plotLine(lineThrough(A,B)):
```




```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=12):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x) = g(x) // Fungsi yang mendefinisikan kurva di titik G
```

$$g\left(x\right)=26-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}-3\,x$$

Untuk membuktikan bahwa persamaan parabola benar, kita dapat mengambil sebarang titik pada kurva tersebut misalnya titik T.

```
>T &=[-1, g(-1)]; // Sebarang titik pada kurva
>dTC &= distance (T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // Jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // Proyeksi T Pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} , \frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // Jarak T ke AB
```

$$\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

Karena jarak T ke AB sesuai dengan jarak T ke C, ini membuktikan bahwa persamaan parabola ini benar.

Latihan 1

Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,2), B (1,-1), C(4,2) dan gambarkan parabolanya.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>A &=[3,2]; B &=[1,-1]; C &=[4,2];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$$[3, -2, 5]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

$$\left[y = \frac{-5+3\,x}{2}\right]$$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(4-x)^2+(2-y)^2}+\frac{-5+3\,x-2\,y}{\sqrt{13}}=0$$

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

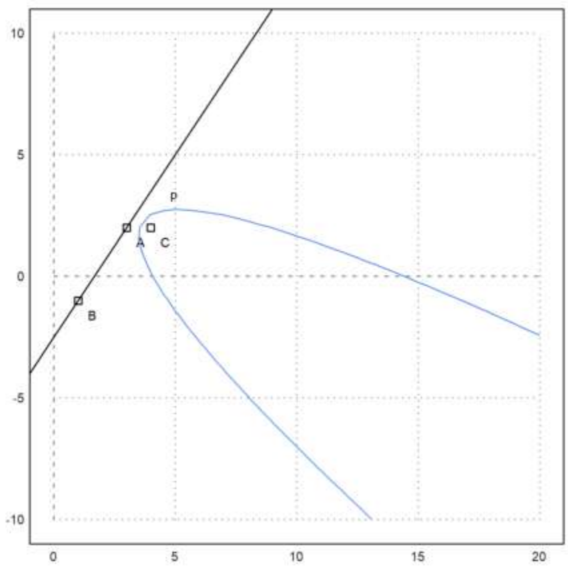
```
             12 - 2 x - sqrt(13) sqrt(- 7 + 2 x)
        [y = -----------------------------------,
                              3
                     12 - 2 x + sqrt(13) sqrt(- 7 + 2 x)
                 y = -----------------------------------]
                                      3
```

Solusinya adalah:

```
>A=[3,2]; B=[1,-1]; C=[4,2]
```

```
[4,  2]
```

```
>setPlotRange (0,20,-10,10); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=12):
```




```
>reset
```

```
0
```

Latihan 2

Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,2), B (-1,1), C(2,2) dan gambarkan parabolanya.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>A &=[3,2]; B &=[-1,1]; C &=[2,2];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$$[1,-4,-5]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{5+x}{4}\right]$$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}-\frac{5+x-4\,y}{\sqrt{17}}=0$$

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

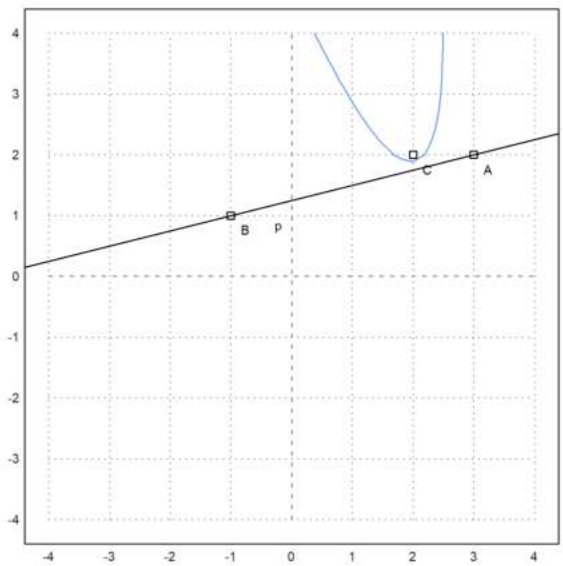
```
           [y = 14 - sqrt(17) sqrt(5 - 2 x) - 4 x, 
                                  y = 14 + sqrt(17) sqrt(5 - 2 x) - 4 x]
```

Solusinya adalah:

```
>A=[3,2]; B=[-1,1]; C=[2,2]
```

```
    [2,  2]
```

```
>setPlotRange (4); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=12):
```



10. Persamaan Ellips

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang memenuhi jumlahan jaraknya ke dua titik tertentu tetap. Pertama kita akan mencari persamaan ellips.

```
>load geometry
```

```
  Numerical and symbolic geometry.
```

Untuk mencari persamaan ellips, hitung luas segitiga dengan panjang sisi a, b, dan c, pertama kita meletakkan titik-titik pada (0,0), (a,0), dan (x,y).

untuk x dan y

Pertama, kita akan menyelesaikan persamaan di atas terlebih dahulu

```
>Hasil &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
[]
```

Kita menjabarkan hasil y

```
>Hasily &= y with Hasil[2][2]
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
Hasily &= y with Hasil[2][2] ...
                            ^
```

Kita mendapatkan Rumus Heron

```
>function F(a,b,c) &= sqrt(factor((Hasily*a/2)^2))
```

```
mabs(a) mabs(Hasily)
--------------------
         2
```

```
>$solve(diff(F(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [0,0,4]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
 $solve(diff(F(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
                              ^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Ini sama saja sebuah ellips

```
>p1 &= subst(d-c,b,Hasil[2])
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
p1 &= subst(d-c,b,Hasil[2]) ...
                           ^
```

Sekarang kita buat fungsi ini

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(p1[1])
```

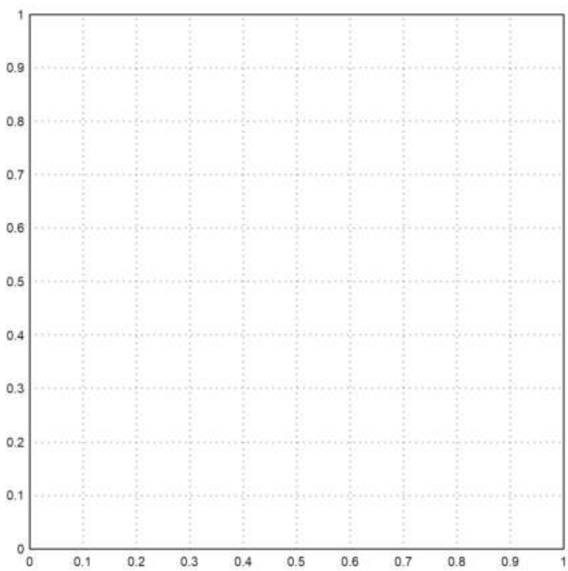
```
0
```

```
>function fy(a,c,d) &= rhs(p1[2])
```

```
0
```

Sekarang kita dapat menggambar himpunan tersebut. Di sini kita akan mendapatkan sebuah ellips

```
>plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```




```
>$((fx(a,c,d)-a/2)^2/a^2+fy(a,c,d)^2/b^2 with [a=d/2,b=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{1}{4}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\frac{1}{4}$$

Sekarang kita bisa membuat persamaan umum untuk ellips ini, yaitu

Di mana (xp, yp) adalah titik pusat, dan a dan b adalah setengah dari sumbu-sumbunya.

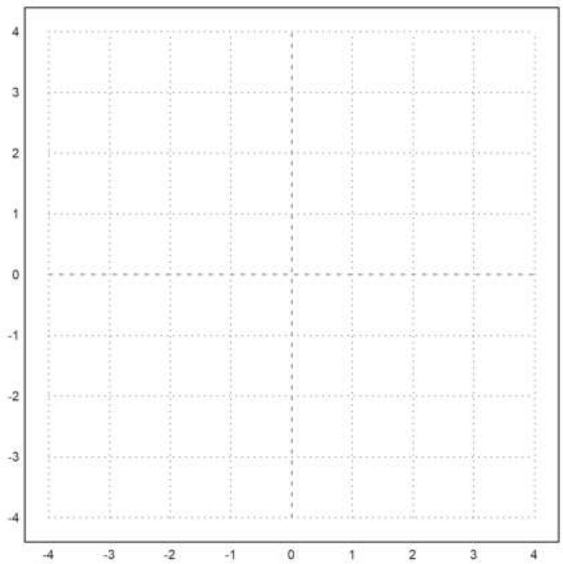
```
>reset();
```

Mencari persamaan ellips dengan cara manual.

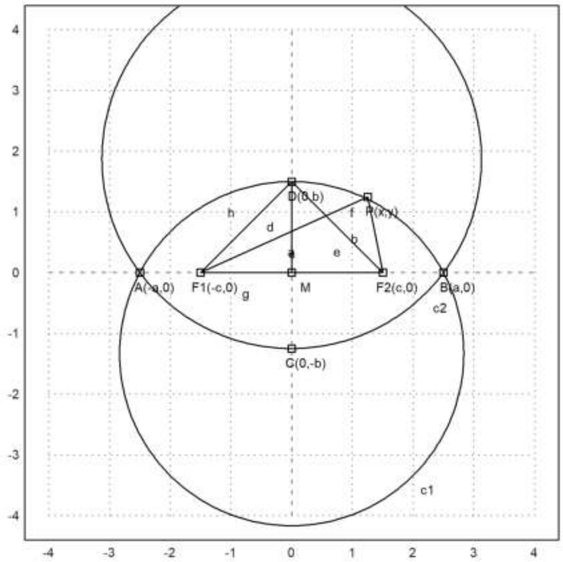
Akan dicari persamaan ellips dengan menggunakan definisi.

Pertama kita gambarkan ellips terlebih dahulu.

```
>setPlotRange(-4,4,-4,4): // mendefinisikan bidang koordinat
```



```
>A=[-1.5,0]; plotPoint(A,"F1(-c,0)"); // definisi dan gambar titik
>B=[1.5,0]; plotPoint(B,"F2(c,0)");
>C=[1.25,1.25]; plotPoint(C,"P(x,y)");
>plotSegment(A,B,"a"); // a=AB
>plotSegment(B,C,"b"); // b=BC
>plotSegment(C,A,"c"); // c=CA
>D=[0,0]; plotPoint(D,"M"); // definisi dan gambar titik
>E=[0,1.5]; plotPoint(E,"D(0,b)");
>plotSegment(D,E,"d"); // d=DE
>plotSegment(D,B,"e"); // e=DB
>plotSegment(E,B,"f"); // f=EB
>plotSegment(D,A,"g"); // g=DA
>plotSegment(A,E,"h"); // h=AE
>F=[-2.5,0]; plotPoint(F,"A(-a,0)"); // definisi dan gambar titik
>G=[2.5,0]; plotPoint(G,"B(a,0)");
>H=[0,-1.25]; plotPoint(H,"C(0,-b)");
>c1=circleThrough(E,F,G); // lingkaran titik EFG
>c2=circleThrough(F,G,H); // lingkaran titik FGH
>plotCircle(c1); plotCircle(c2): // plot lingkaran c1 dan c2
```



Misal kedua titik tetap tersebut F1(-c,0) dan F2(c,0) dan jumlah jarak yang tetap tersebut 2a. Maka untuk sembarang titik P(x,y) pada tepat kedudukan memenuhi:

Dengan memisalkan

Diperoleh:

Menggambar Ellips Jika Diketahui Dua Titik Fokus

Untuk menggambar ellips dengan mudah, langkah pertama yaitu dengan menggunakan "load(draw)"

```
>$load(draw):
```

"Draw" adalah sistem antarmuka dari Maxima-Gnuplot.

Ada tiga fungsi utama yang digunakan pada tingkat Maxima, yaitu: "draw2d", "draw3d", dan "draw".

Perintah "ellipse (<xp>, <yp>, <a>, <b>, <ang1>, <ang2>)" menggambar sebuah elips yang berpusat di "[<xp>, <yp>]" dengan sumbu semi horizontal dan vertikal sebesar <a> dan <b>, berturut-turut, dimulai dari sudut <ang1> sejauh sudut <ang2>.

Soal 1

Sebuah elips memiliki fokus di (-1, 0) dan (7, 0) serta melalui titik (0, 12/5). Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Penyelesaian

Titik Fokus
F1 = (-c, 0) = (-1, 0)
F2 = (c, 0) = (7, 0)

Melalui titik (0, 12/5)

```
>d1 &= sqrt((0+(-1))^2+(12/5)^2) // d1 = jarak F1 ke titik (0,12/5)

                                 13
                                 --
                                 5

>d2 &= sqrt((0-7)^2+(12/5)^2) // d2 = jarak F2 ke titik (0,12/5)

                                 37
                                 --
                                 5
```

Diketahui

sesuai definisi elips sehingga diperoleh

```
>a &= (d1+d2)/2 // menentukan nilai a

                                 5

>xp &= (-1+7)/2 // titik pusat ellips xp

                                 3
```

```
>yp &= (0-0)/2 // titik pusat ellips yp
```

0

Titik pusat ellips (xp, yp) = (3, 0)

```
>c &= (-1+7)/2 // jarak fokus ke pusat
```

3

```
>b &= sqrt(a^2-c^2) // menentukan nilai b
```

4

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{(-3+x)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Selanjutnya, kita akan menggambar ellips menggunakan fungsi "draw2d"

```
>$draw2d(ellipse(3, 0, 5, 4, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset();
```

Soal 2

Sebuah elips memiliki fokus di (-5, 0) dan (5, 0) serta melalui titik (3, 4). Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Penyelesaian

Titik Fokus
F1 = (-c, 0) = (-5, 0)
F2 = (c, 0) = (5, 0)

Melalui titik (3, 4)

```
>d1 &= sqrt((3+(-5))^2+(4)^2) // d1 = jarak F1 ke titik (0,4)
```

2 sqrt(5)

```
>d2 &= sqrt((3-6)^2+(4)^2) // d2 = jarak F2 ke titik (0,4)
```

5

Diketahui

sesuai definisi elips sehingga diperoleh

```
>a &= (d1+d2)/2 // menentukan nilai a
```

```
5 + 2 sqrt(5)
-------------
      2
```

```
>xp &= (-5+5)/2 // titik pusat ellips xp
```

0

```
>yp &= (0-0)/2 // titik pusat ellips yp
```

0

Titik pusat ellips (xp, yp) = (0, 0)

```
>c &= (-5+5)/2 // jarak fokus ke pusat
```

0

```
>b &= sqrt(a^2-c^2) // menentukan nilai b
```

```
5 + 2 sqrt(5)
-------------
      2
```

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{4\,x^2}{\left(5+2\,\sqrt{5}\right)^2}+\frac{4\,y^2}{\left(5+2\,\sqrt{5}\right)^2}=1$$

```
>$draw2d(ellipse(0, 0, (2*(sqrt(5))+5)/2, (2*(sqrt(5))+5)/2, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset();
```

Soal 3

Sebuah elips memiliki fokus di (-10, 0) dan (10, 0) serta panjang sumbu mayor 24. Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Penyelesaian

Titik Fokus
F1 = (-c, 0) = (-10, 0)
F2 = (c, 0) = (10, 0)

Panjang sumbu mayor = 24

```
>a &= 24/2 // panjang sumbu mayor = 2a
```

```
12
```

```
>c &= (10-(-10))/2 // jarak fokus ke pusat
```

```
10
```

Sehingga

```
>b &= sqrt(a^2-c^2)
```

```
2 sqrt(11)
```

```
>xp &= (-10+10)/2 // titik pusat ellips xp
```

```
0
```

```
>yp &= (0+0)/2 // titik pusat ellips yp
```

```
0
```

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{44}=1$$

```
>$draw2d(ellipse(0, 0, 12, (2*(sqrt(11)))/2, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset()
```

```
0
```

11. Melakukan Perhitungan Geometris

Pada Sub bab kali ini akan dibahas:
1. Jarak dua titik (panjang ruas garis)
2. Luas segitiga dan keliling segitiga
3. Luas lingkaran dan keliling lingkaran
4. Perhitungan sudut pada bangun datar

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Jarak dua titik

Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut.
Jika diketahui dua titik pada koordinat kartesius, misal A(x1,y1) dan B(x2,y2), maka jarak antara titik A dan B adalah

sebagai contoh digambar suatu bidang koordinat

```
>setPlotRange(-1,5,-1,5);
```

kemudian tentukan dua titik yang akan dihitung jaraknya

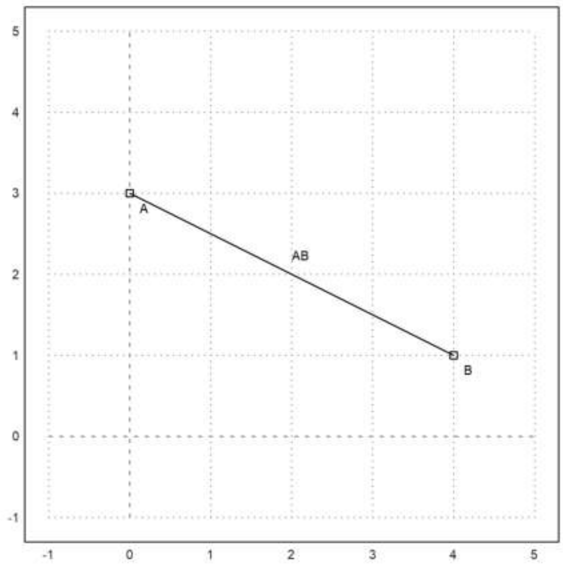
```
>A=[0,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[4,1]; plotPoint(B,"B");
```

hitung jarak antara titik A dan titik B

```
>distance(A, B)
```

```
4.472135955
```

```
>plotSegment(A,B):
```



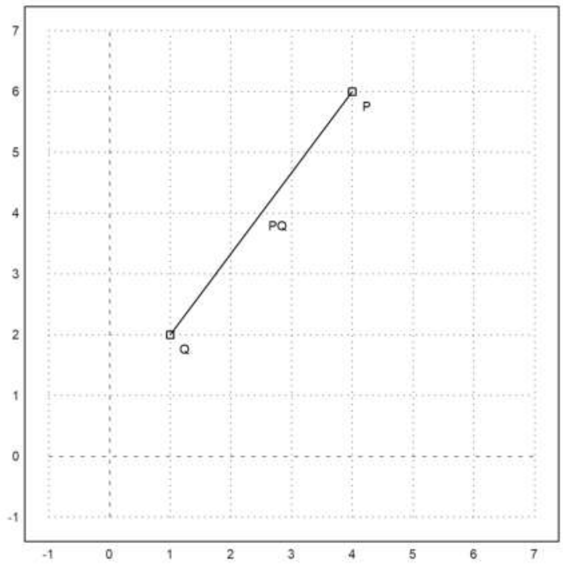
Latihan

1. Diketahui dua buah titik P(2,4) dan Q(1,3). Tentukanlah panjang garis PQ.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>P=[4,6]; plotPoint(P,"P");
>Q=[1,2]; plotPoint(Q,"Q");
>distance(P, Q)
```

```
5
```

```
>plotSegment(P,Q):
```

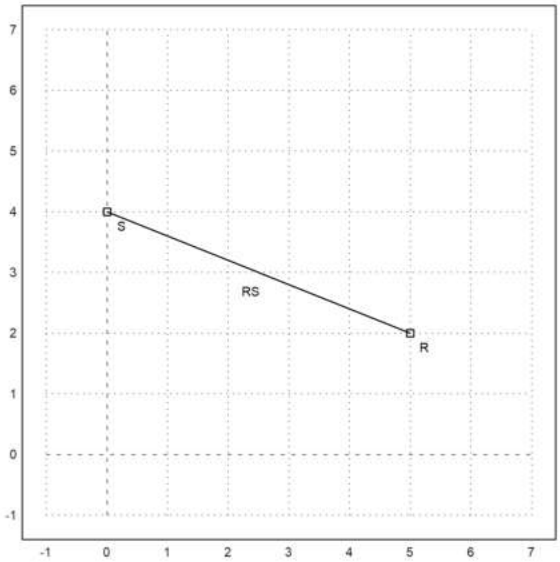


2. Diketahui dua buah titik R(5,2) dan S(0,4). Tentukanlah panjang garis PQ.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>R=[5,2]; plotPoint(R,"R");
>S=[0,4]; plotPoint(S,"S");
>distance(R, S)
```

```
5.38516480713
```

```
>plotSegment(R,S):
```



Luas dan Keliling Segitiga

Terdapat cukup banyak bangun datar yang bisa dihitung luasnya namun

pada kesempatan kali ini kita akan mempelajari luas dari bangun datar sedderhana yaitu segitiga. Segitiga dipilih menjadi topik kali ini bukan tanpa alasan namun karena bangun datar dengan sisi-n teratur paling tidak terbentuk dari segitiga sama sisi.
Selanjutnya sebelum kita ke rumus dari kedua bangun datar tersebut kita akan mencari tahu dulu apa itu luas. Luas adalah sebuah ukuran yang digunakan untuk mengukur seberapa besar atau seberapa banyak ruang atau wilayah yang ditempati oleh suatu objek atau bentuk dalam ruang dua atau tiga dimensi dan kali ini akan berfokus pada ruang dua dimensi terlebih dahulu. Maka dari itu ketika disediakan sebuah persegi atau segiempat kita bisa mengukur luasnya dengan:

Segitiga memiliki beberapa jenis, ada segitiga siku-siku, segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga sembarang.
Untuk menghitung luas dari segitiga siku-siku, segitiga sama sisi dan segitiga sama kaki menggunakan rumus :

Sedangkan untuk mencari luas dari segitiga sembarang dapat menggunakan rumus :

Sebagai contoh digambar sebuah segitiga sembarang.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
```

dipilih tiga titik sembarang.

```
>A=[4,6]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,2]; plotPoint(C,"C");
```

kemudian menentukan tiga segmen garis.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

menentukan masing-masing panjang dari a, b, dan c.

```
>distance (B, C)
```

```
4
```

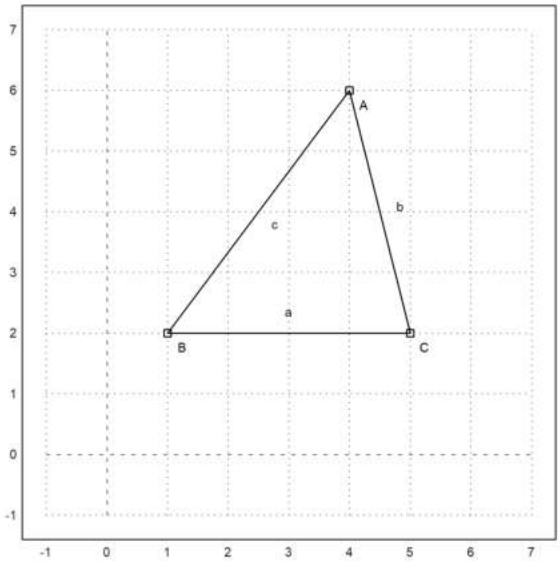
```
>distance (A, C)
```

```
4.12310562562
```

```
>distance (A, B)
```

```
5
```

```
>areaTriangle(A,B,C):
```




```
>areaTriangle(A,B,C)
```

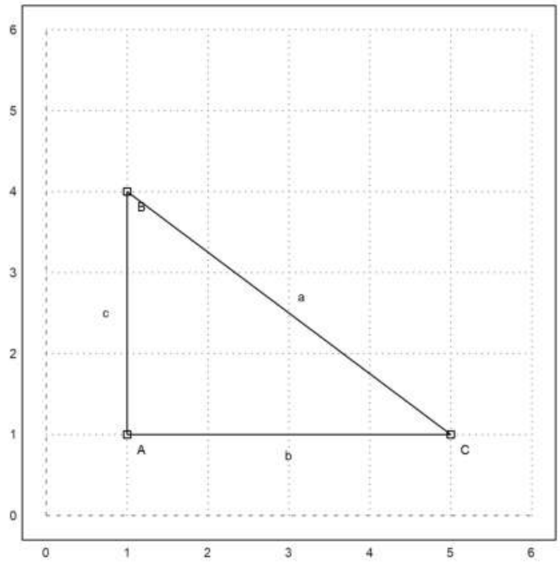
```
8
```

```
>setPlotRange(0,6,0,6) // mendefinisikan bidang koordinat
```

```
[0,   6,   0,   6]
```

Segitiga Siku-Siku

```
>A=[1,1]; plotPoint (A,"A");
>B=[1,4]; plotPoint (B,"B");
>C=[5,1]; plotPoint (C,"C");
>plotSegment (A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment (B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment (C,A,"b"): // b=CD
```




```
>distance (A, C)
```

```
4
```

```
>distance (A, B)
```

```
3
```

```
>Luas:=(distance (A, C)*distance (A, B))/2
```

    6

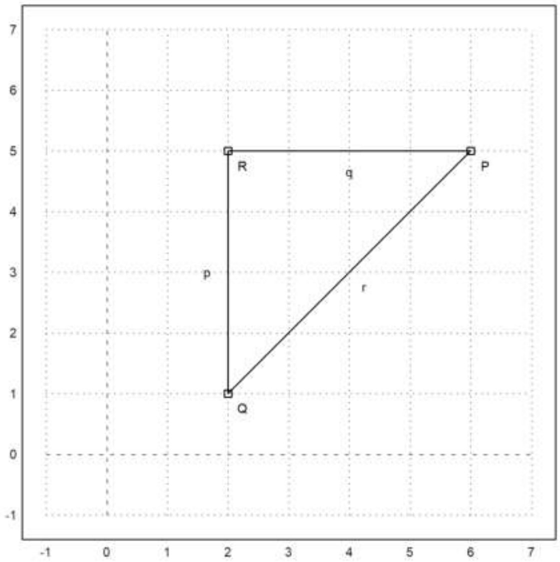
```
>areaTriangle (A,B,C)
```

    6

Latihan

1. Diketahui sebuah segitiga PQR dengan titik P(2,5), Q(2,1), dan R(6,4)
Hitunglah luas dari segitiga PQR tersebut.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>P=[6,5]; plotPoint(P,"P");
>Q=[2,1]; plotPoint(Q,"Q");
>R=[2,5]; plotPoint(R,"R");
>plotSegment(P,Q,"r"); // r=PQ
>plotSegment(Q,R,"p"); // p=QR
>plotSegment(P,R,"q"): // q=PR
```




```
>distance (Q, R)
```

    4

```
>distance (P, Q)
```

    5.65685424949

```
>distance (R, P)
```

    4

```
>areaTriangle(R,Q,P)
```

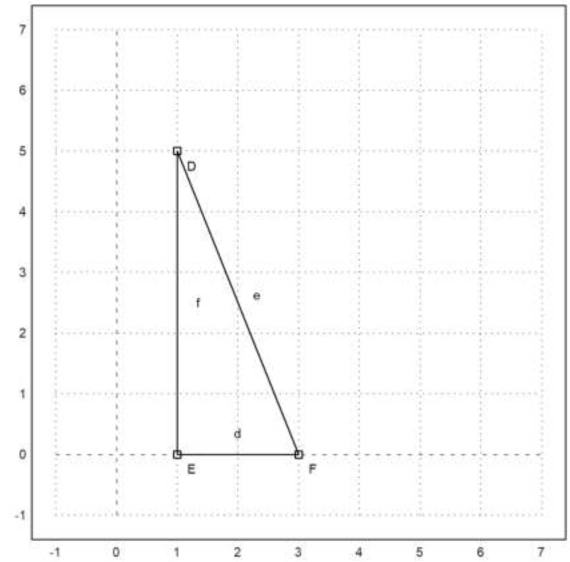
    8

```
>Luas:=(distance (R, P)*distance(Q, R))/2
```

    8

2. Diketahui sebuah segitiga DEF dengan titik D(1,5), E(1,0), dan F(3,0)
Hitunglah luas dari segitiga DEF tersebut.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>D=[1,5]; plotPoint(D,"D");
>E=[1,0]; plotPoint(E,"E");
>F=[3,0]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(D,E,"f"); // f=DE
>plotSegment(E,F,"d"); // d=EF
>plotSegment(D,F,"e"): // e=DF
```




```
>distance (D, E)
```

5

```
>distance (E, F)
```

2

```
>areaTriangle(D,E,F)
```

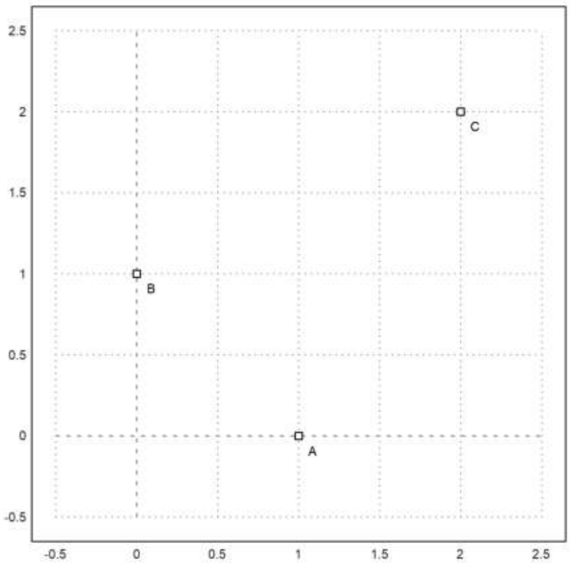
5

Luas dan keliling lingkaran

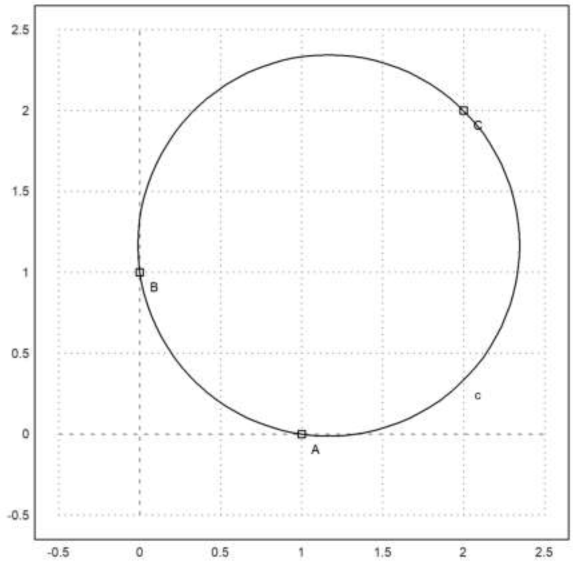
Luas lingkaran adalah luasan daerah pada lingkaran tersebut.
Luas pada sebuah lingkaran memiliki rumus :

sedangkan untuk keliling lingkaran memiliki rumus :

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5);
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>c=circleThrough(A,B,C):
```




```
>plotCircle(c):
```




```
>r=getCircleRadius(c)
```

    1.17851130198

```
>LuasLingkaran:=pi*r^2
```

    4.36332312999

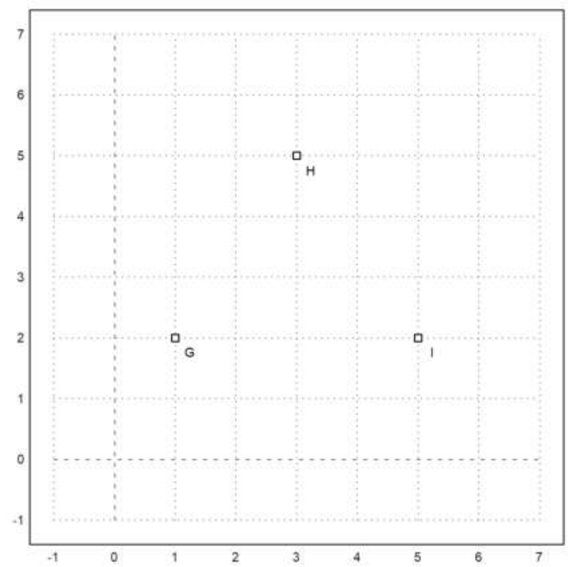
```
>KelilingLingkaran:=2*pi*r
```

    7.40480489693

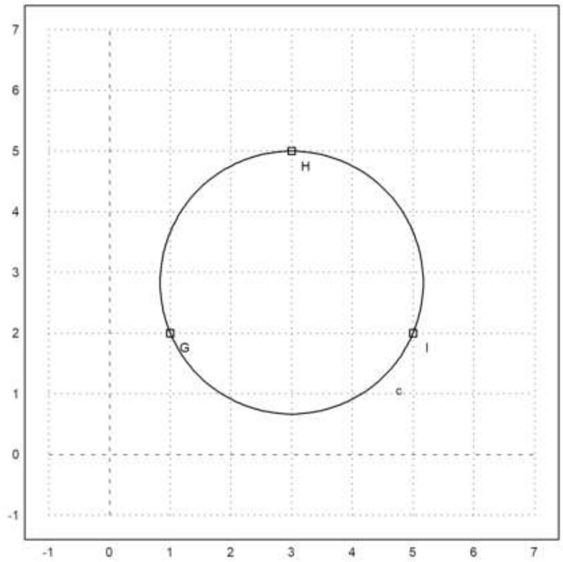
Latihan

Diketahui sebuah lingkaran yang melalui titik G(1,2), H(3,5), dan I(5,2). Hitunglah luas dan keliling lingkaran tersebut.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>G=[1,2]; plotPoint(G,"G");
>H=[3,5]; plotPoint(H,"H");
>I=[5,2]; plotPoint(I,"I");
>c=circleThrough(G,H,I):
```




```
>plotCircle(c):
```




```
>r=getCircleRadius(c)
```

```
2.16666666667
```

```
>LuasLingkaran:=pi*r^2
```

```
14.7480321794
```

```
>KelilingLingkaran:=2*pi*r
```

```
13.6135681656
```

Perhitungan sudut pada bangun datar

```
Perhitungan sudut dalam konteks bangun datar dan antara dua garis
```

melibatkan pengukuran besarnya sudut antara dua garis atau sudut dalam suatu bangun datar. Sudut diukur dalam derajat (°) atau radian (rad) tergantung pada preferensi dan konteks pengukuran yang digunakan. Dan dalam kesempatan kali ini kita akan menggunakan sudut derajat (°). Contoh:

dimana S adalah sudut yang akan ditentukan dalam derajat (°)
n adalah jumlah sudut yang ada pada bangun datar tersebut
dan k adalah jumlah sudut segitiga yang diketahui
contoh:
Andi ingin membuat segitiga menggunakan kawat dan dia ingin membuat segitiga siku-siku dan dia telah menentukan bahwa salah satu sudut selain siku-sikunya adalah 30° maka berapakah sudut yang belum diketahuinya?

```
>n:= 3;
>k:= 90+30;
>S:= ((n-2)*180)-k
```

```
60
```

Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

atau bisa ditulis dalam bentuk lain:

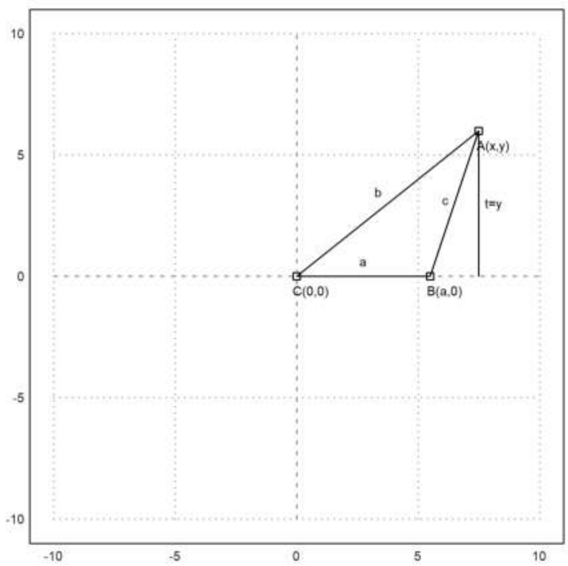
Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

```
>remvalue a,b,c,x,y
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(10);
>plotPoint([0,0], "C(0,0)"); plotPoint([5.5,0], "B(a,0)"); ...
  plotPoint([7.5,6], "A(x,y)");
>plotSegment([0,0],[5.5,0], "a",25); plotSegment([5.5,0],[7.5,6],"c",15); ...
 plotSegment([0,0],[7.5,6], "b",25);
>plotSegment([7.5,6],[7.5,0],"t=y",25):
```




```
>&assume(a>0); sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
                  2    2    2
                 a  + b  - c
        [[x = ------------, y =
                     2 a
              4      2  2    4      2  2      2  2    4
  sqrt(- a  + 2 a  b  - b  + 2 a  c  + 2 b  c  - c )
- ---------------------------------------------------],
                           2 a
         2    2    2
        a  + b  - c
    [x = ------------, y =
             2 a
         4      2  2    4      2  2      2  2    4
    sqrt(- a  + 2 a  b  - b  + 2 a  c  + 2 b  c  - c )
    ---------------------------------------------------]]
                           2 a
```

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $'y=sqrt(factor(ysol^2))
```

$$y=\frac{\sqrt{\left(a+b-c\right)\,\left(a-b+c\right)\,\left(-a+b+c\right)\,\left(a+b+c\right)}}{2\,a}$$

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a , b , c\right)=\frac{\sqrt{\left(a+b-c\right)\,\left(a-b+c\right)\,\left(-a+b+c\right)\,\left(a+b+c\right)}}{4}$$

```
>$'Luas=H(2,5,6)
```

$$Luas=\frac{3\,\sqrt{39}}{4}$$

```
>$'Luas=H(12,18,20)
```

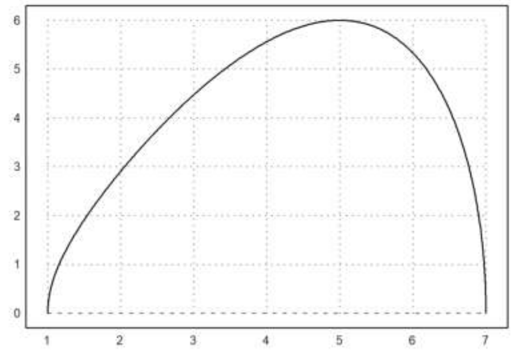
$$Luas=5\,\sqrt{455}$$

```
>H(3,4,5) //luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
6
```

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan dua sisi 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (1<= x <=7)
```



Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

$$\left[c=-\sqrt{a^2+b^2}, c=\sqrt{a^2+b^2}, c=0\right]$$

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk beberapa konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

$$\left[x=\frac{a^2-c^2+(-c+d)^2}{2\,a}, y=\frac{\sqrt{-a^4+2\,a^2\,c^2-c^4+2\,a^2\,(-c+d)^2+2\,c^2\,(-c+d)^2-(-c+d)^4}}{2\,a}\right]$$

Dan buat fungsi ini.

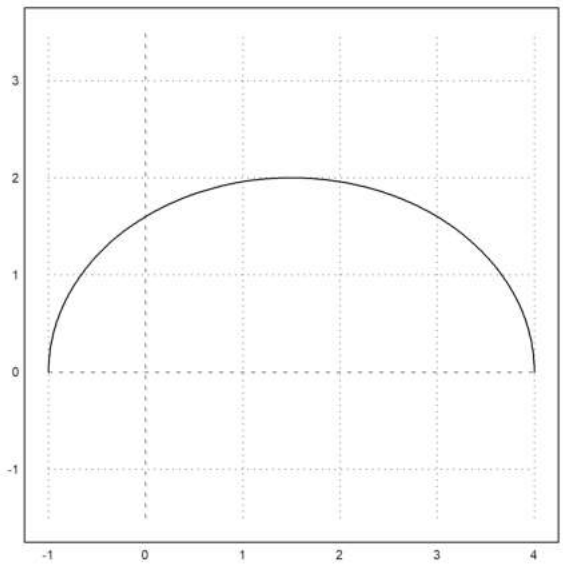
```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d)
```

$$\frac{a^2-c^2+(-c+d)^2}{2\,a}$$

$$\frac{\sqrt{-a^4+2\,a^2\,c^2-c^4+2\,a^2\,(-c+d)^2+2\,c^2\,(-c+d)^2-(-c+d)^4}}{2\,a}$$

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```



Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu.

di mana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$1$$

Kita lihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d maksimal jika segitiga sama sisi. Kami ingin menurunkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{d\,(-2\,a+d)\,(-2\,b+d)}{8}+\frac{d\,(-2\,b+d)\,(-2\,a-2\,b+d)}{8}=0, \frac{d\,(-2\,a+d)\,(-2\,b+d)}{8}+\frac{d\,(-2\,a+d)\,(-2\,a-2\,b+d)}{8}=0\right]$$

Kami mendapatkan beberapa minimal, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusinya a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$\left[\left[a=\frac{d}{3},b=\frac{d}{3}\right],\left[a=0,b=\frac{d}{2}\right],\left[a=\frac{d}{2},b=0\right],\left[a=\frac{d}{2},b=\frac{d}{2}\right]\right]$$

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
    diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
                             d      d
              [[a = 0, b = -, c = -, la = 0],
                             2      2
        d             d                 d      d
   [a = -, b = 0, c = -, la = 0], [a = -, b = -, c = 0, la = 0],
        2             2                 2      2
                                3
        d      d      d        d
   [a = -, b = -, c = -, la = ---]]
        3      3      3        108
```

Kita bisa membuat plot situasinya

Pertama-tama atur poin di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

$$\left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2\,a},\frac{\sqrt{-a^4+2\,a^2\,b^2-b^4+2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2-c^4}}{2\,a}\right]$$

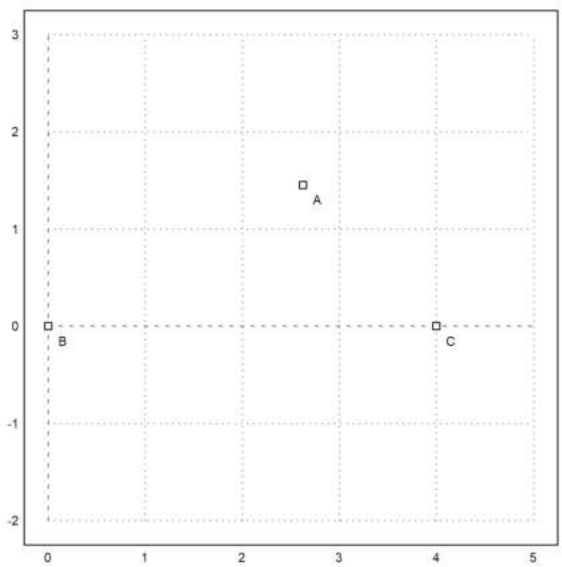
```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0,0]$$

$$[a,0]$$

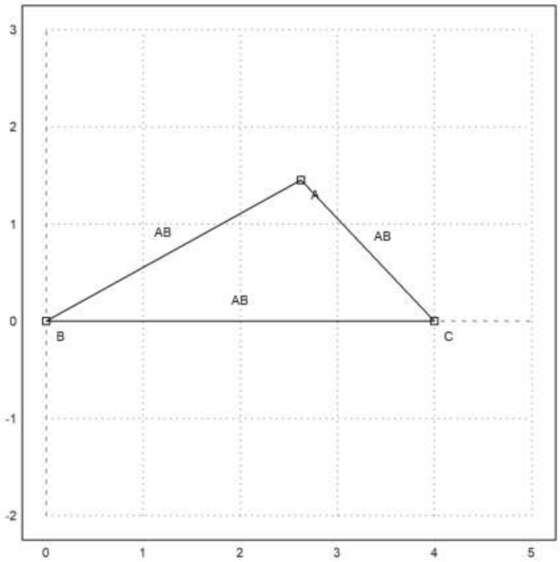
Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
 a=4; b=3; c=2; ...
 plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
 plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```



Plot segmen.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
 plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
 plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```



Hitung tegak lurus tengah di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

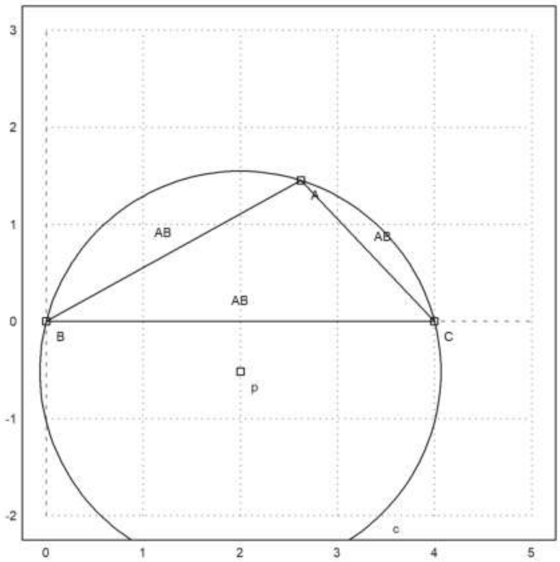
Kami mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{i\,a\,b\,c}{\sqrt{-a-b+c}\,\sqrt{a-b+c}\,\sqrt{-a+b+c}\,\sqrt{a+b+c}}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>plotPoint(U()); ...
 plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```



Menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

untuk radiusnya. Kami dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita kuadratkan.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$-\frac{4\,a^2\,b^2\,c^2}{(-a-b+c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}$$

Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Merupakan garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, antara lain ortocenter, sirkumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasinya, kita menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolik.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

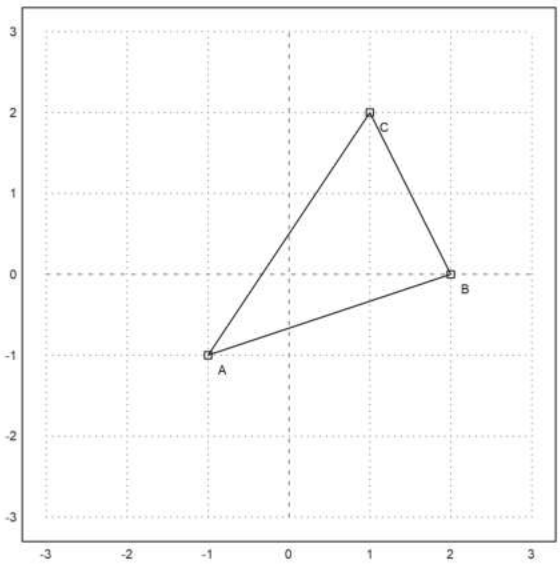
```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kita menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke dalamnya. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menjumlahkan sisi-sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""); color(1):
```



Berikut luas segitiga menggunakan rumus determinan. Dan akan diambil nilai absolut dari luas segitiga berikut

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$-x+3\,y=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari Hesseform. Memasukkan titik akan menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{2-x+3\,y}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita menghitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

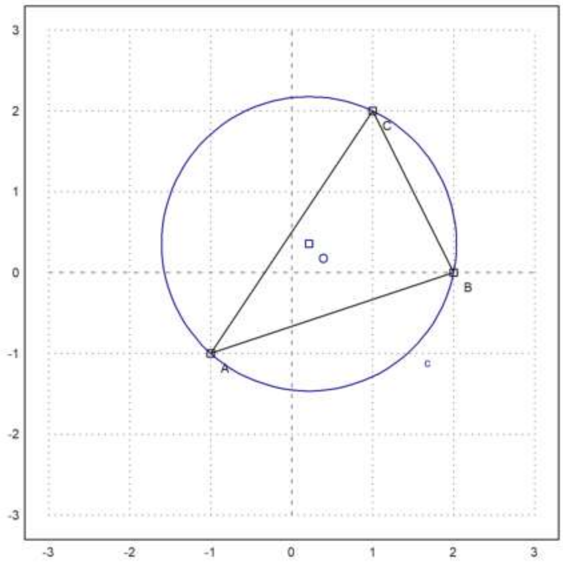
$$\left(-\frac{3}{14}+x\right)^2+\left(-\frac{5}{14}+y\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right]$$

Plot lingkaran dan pusatnya. Cu dan U bersifat simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>color (4); plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```



Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (ortocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
   perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7}, \frac{2}{7}\right]$$

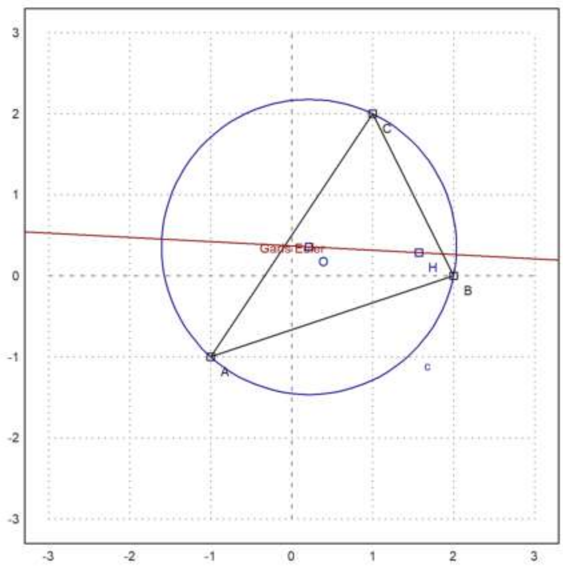
Sekarang kita dapat menghitung garis segitiga Euler.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{x}{14} - \frac{19\,y}{14} = -\frac{1}{2}$$

Akan kita tambahkan ke plot.

```
>plotPoint(H(),"H"), color(4); plotLine(el(),"Garis Euler",color(2)):
```

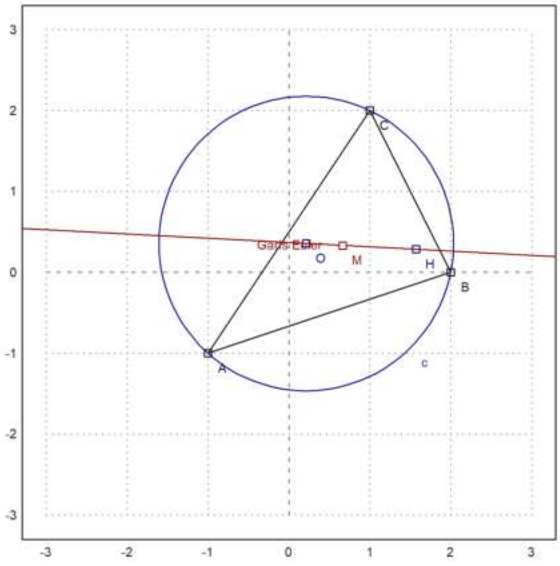


Pusat gravitasi seharusnya berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"); color(4): // titik berat
```



Teorinya memberitahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai hal ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsinya mencakup fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan pusat lingkaran tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{3-15\sqrt{2}+\left(1+2^{\frac{3}{2}}\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}}{14}, \frac{5+5\,2^{\frac{3}{2}}+\left(-3+\sqrt{2}\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi jari-jari lingkaran yang tertulis.

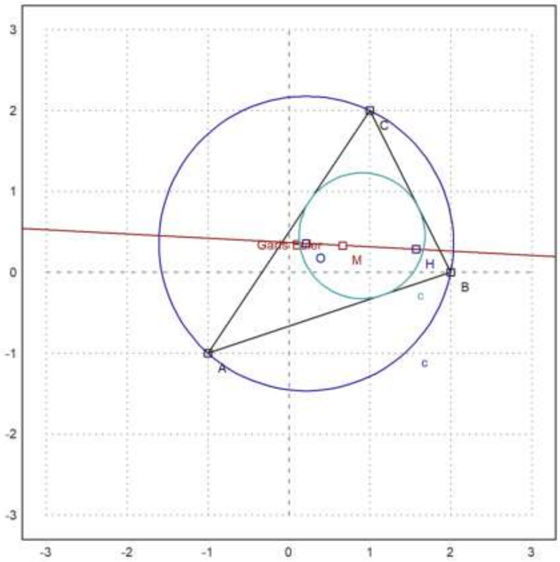
```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{614+115\sqrt{2}+\left(-31-41\sqrt{2}\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}}}{7\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke dalam plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```



Parabola

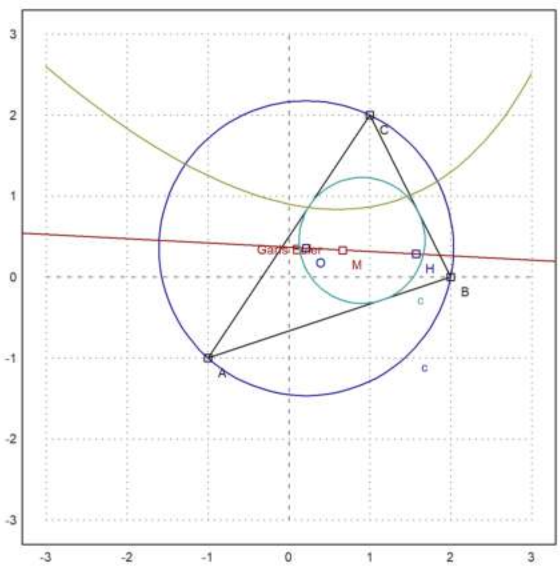
Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}+\frac{2-x+3\,y}{\sqrt{10}}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```



Ini seharusnya merupakan suatu fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita mengkuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

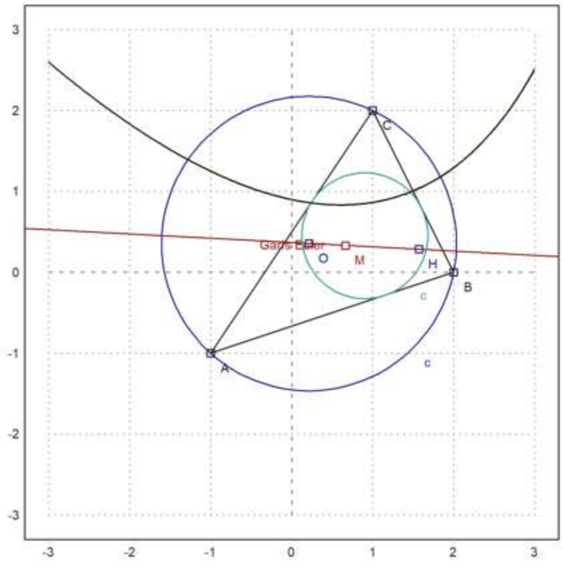
```
[y = 26 - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) - 3 x,
                      y = 26 + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) - 3 x]
```

Solusi pertama adalah

maxima: akar[1]

Menambahkan solusi pertama pada plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teorinya memberitahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1); color(5):
```




```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g(x) = 26 - \sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x} - 3\,x$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503 - 54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80 - 3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}, \frac{20 - \sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$\sqrt{1503 - 54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Dan ini membuktikan bahwa Parabola yang digambar adalah benar

Trigonometri Rasional

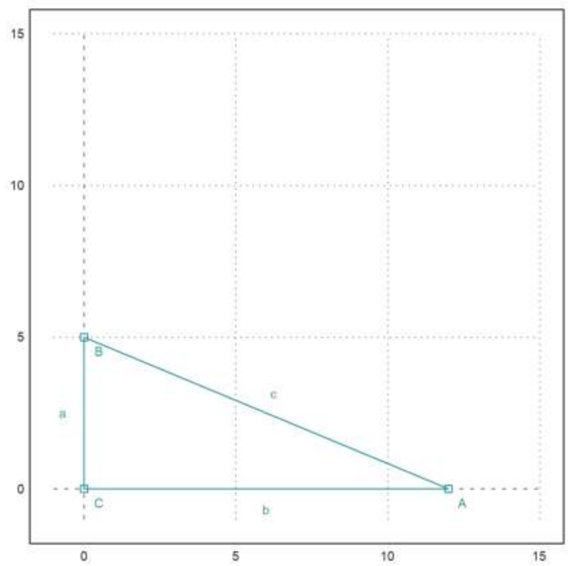
Trigonometri Rasional adalah cabang matematika yang mempelajari fungsi-fungsi trigonometri yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan rasional. Fungsi-fungsi ini dapat dinyatakan sebagai pecahan dari dua polinomial, yaitu polinomial pembilang dan penyebut. Contoh fungsi trigonometri rasional adalah 1/cos (x)

Perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang mengevaluasi ke pendekatan numerik saja.

```
>load geometry;
```

Langkah awal adalah dengan menyalakan perintah awal pada materi geometri. Perintah di atas merupakan perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[12,0]; B&:=[0,5];...
 setPlotRange(-1,15,-1,15); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg(30);
```



Saya menggunakan segitiga dengan proporsi 5,12,13.

di mana wa adalah sudut di A. Cara biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan melakukan invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak secara perkiraan.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.

Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, itu hanya kuadrat jarak. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadrat dari sisi-sisinya.

Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 5^2; b &= 12^2; c &= 13^2; &a+b=c
```

```
169 = 169
```

Gagasan kedua dari trigonometri rasional adalah penyebarannya. Spread mengukur bukaan antar baris. Ini adalah 0, jika garis sejajar, dan 1, jika garis persegi panjang. Ini adalah kuadrat dari sinus sudut antara dua garis.

Garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai

di mana a dan c adalah kuadrat dari segitiga persegi panjang mana pun dengan satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{25}{169}$$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti yang sudut dapat ditambahkan dengan mudah.

Tentu saja, kita dapat mengubah nilai perkiraan sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum cosinus dari trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

Di sini a, b, dan c adalah kuadran dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah sebaran di sudut A. Sisi a, seperti biasa, berlawanan dengan sudut A.

Hukum ini diimplementasikan dalam file geometry.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left(-aa+bb+cc\right)^2=4\,bb\,cc\,\left(1-saa\right)$$

Dalam kasus kami, kita mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$82944=82944$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari sebaran di A. Untuk melakukan ini, kita menghasilkan crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan menyelesaikannya untuk sebaran yang tidak diketahui sa.

Anda dapat melakukan ini dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja,kami mendapatkan hasilnya, kami sudah mendapatkannya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$82944 = 97344\,(1 - x)$$

$$\left[x = \frac{25}{169}\right]$$

Kami sudah tahu ini. Definisi penyebaran adalah kasus khusus dari hukum lintas hukum.

Kita juga bisa menyelesaikan ini untuk umum a, b, c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung sebaran sudut segitiga berdasarkan kuadran ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[x = \frac{-aa^2 + 2\,aa\,bb - bb^2 - (-2\,aa - 2\,bb)\,cc - cc^2}{4\,bb\,cc}\right]$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah ditentukan dalam file geometry.e Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{25}{169}$$

Sebagai contoh, kita bisa menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga bersisi

Hasilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

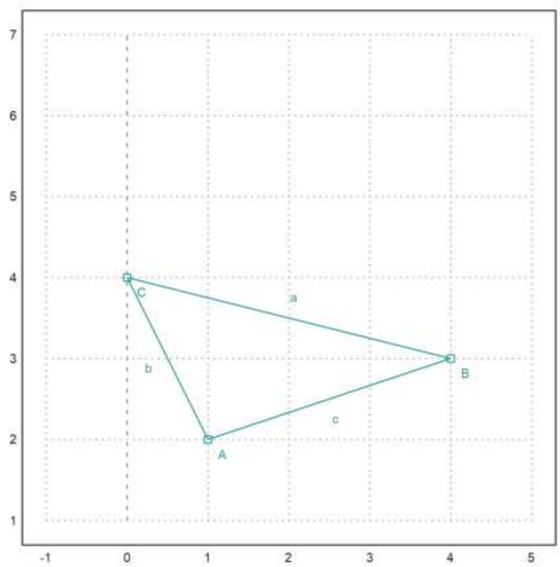
```
67°47'32.44''
```

Contoh Lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.

Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.
asilnya rasional, yang tidak mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
 setPlotRange(-1,5,1,7); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg;
```



Menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga mengandung fungsi untuk kuadran antara dua titik.
Dalam contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga itu bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$10$$

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan hasil kali titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang.

Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x),
```

$$4 = 200\,(1 - x)$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Yaitu, apa yang dilakukan oleh penyebaran fungsi yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksanya. Itu menyelesaikan istilah sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki penyebaran di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingatlah bahwa

menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut ini dibuat dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadran dan penyebaran.

Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadrannya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berurusan dengan kuadran!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus penentu yang biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama-tama kita menghitung penyebaran di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), memfaktorkannya dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.

Memang, hal ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-a^4+2\,a^2\,b^2-b^4-\left(-2\,a^2-2\,b^2\right)\,c^2-c^4}{4\,a^2\,c^2}$$

$$\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c)\,(a+b+c)}{16}$$

Aturan Penyebaran Tiga

Kerugian dari spread adalah bahwa mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut seperti.

Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut ini.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$(sa+sb+sc)^2=4\,sa\,sb\,sc+2\,\left(sa^2+sb^2+sc^2\right)$$

Aturan ini berlaku untuk tiga sudut yang berjumlah 180°.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Karena penyebaran dari

$$\alpha,\pi-\alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatifnya sama, aturan penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Contohnya, kita bisa menghitung penyebaran sudut 60°. Hasilnya adalah 3/4. Namun, persamaan ini memiliki solusi kedua, di mana semua penyebarannya adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4},x=0\right]$$

Penyebaran 90° jelas adalah 1. Jika dua sudut ditambahkan ke 90°, penyebarannya akan menyelesaikan persamaan penyebaran tiga dengan a, b, 1. Dengan perhitungan berikut, kita mendapatkan a + b = 1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$(1+x+y)^2=4\,x\,y+2\,\left(1+x^2+y^2\right)$$

$$[x=1-y]$$

Karena penyebaran 180°-t sama dengan penyebaran t, rumus penyebaran tiga kali lipat juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dari dua sudut lainnya.

Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut dua kali lipat. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kita jadikan ini sebuah fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

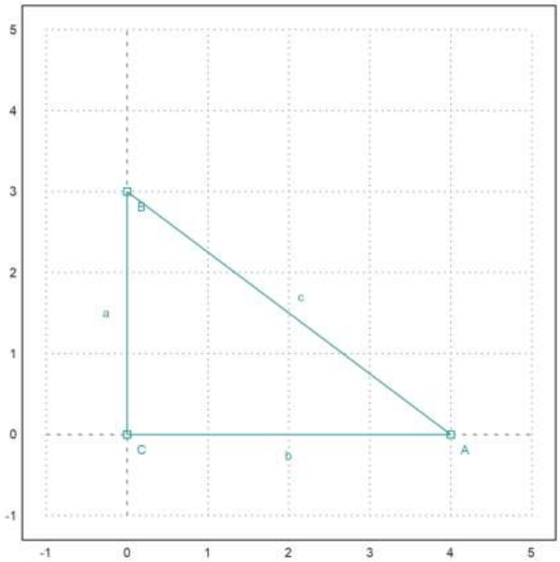
$$\left[x=4\,a-4\,a^2,x=0\right]$$

```
- 4 (- 1 + a) a
```

Garis Pembagi Sudut

Ini adalah situasi yang sudah kita ketahui.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
 setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 insimg;
```



Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk a, b, c secara umum.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi, pertama-tama kita menghitung penyebaran sudut yang dibelah dua di A, menggunakan rumus penyebaran tiga.

Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Rumus ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih salah satu yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbagi dua 180°-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(\frac{a}{a+b}+2\,x\right)^2=\frac{4\,a\,x^2}{a+b}+2\,\left(\frac{a^2}{(a+b)^2}+2\,x^2\right)$$

$$\left[x=\frac{a+b-\sqrt{b}\,\sqrt{a+b}}{2\,a+2\,b} , x=\frac{a+b+\sqrt{b}\,\sqrt{a+b}}{2\,a+2\,b}\right]$$

$$\frac{a+b-\sqrt{b}\,\sqrt{a+b}}{2\,a+2\,b}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kita bisa mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

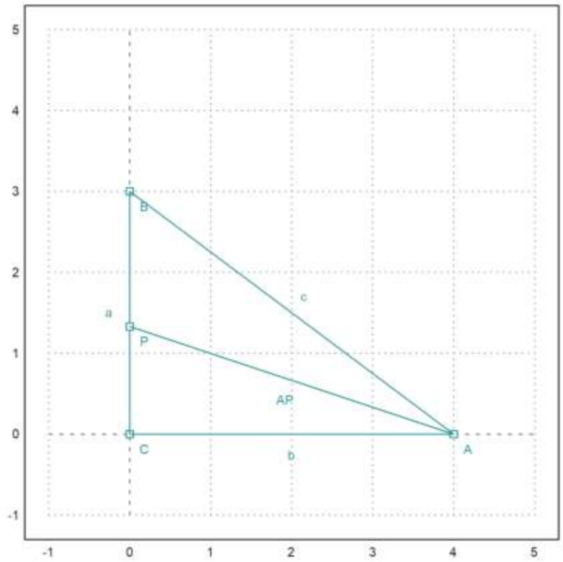
```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```



Mari kita periksa sudut-sudutnya dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita menghitung panjang garis bagi AP.

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, ini diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a, b, c menunjukkan kuadrannya.

Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita mendapatkan bisa/1=b/(1-sa2) dan bisa menghitung bisa (kuadran dari pembagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,(a+b)}{a+b+\sqrt{b}\,\sqrt{a+b}}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P dengan menggunakan rumus penyebaran.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\,\left(-a-b+\sqrt{b}\,\sqrt{a+b}\right)}{a+b+\sqrt{b}\,\sqrt{a+b}}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

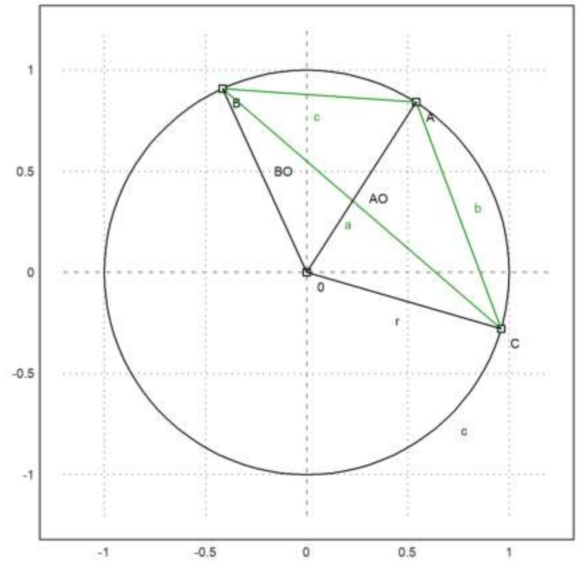
```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akor

Lihatlah situasi berikut ini

```
>setPlotRange(1.2); ...
 color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
 A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
 plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
 color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
 color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
 plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
 insimg;
```



Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Dengan demikian kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadran sisi-sisinya.

Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa angka nol yang rumit, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{a^2+b^2+a\,\left(-2\,b-2\,c\right)-2\,b\,c+c^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebuah fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A, B, C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Radiusnya 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

Faktanya adalah, bahwa penyebaran CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut akor.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Faktanya, penyebarannya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut chord b adalah setengah dari sudut tengah.

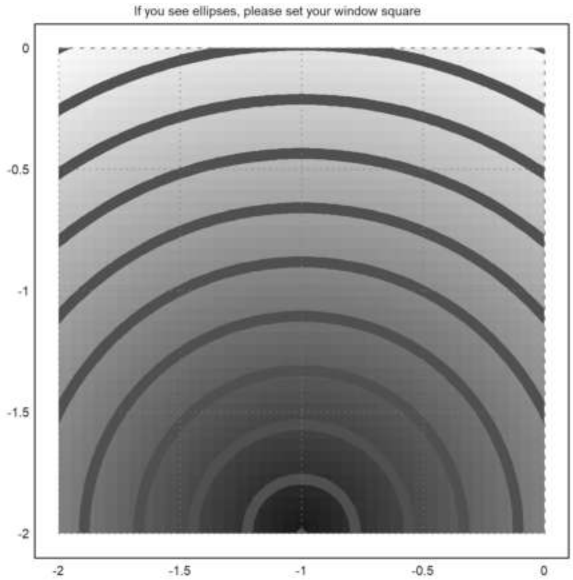
```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

$$0$$

Jarak Minimal Pada Bidang

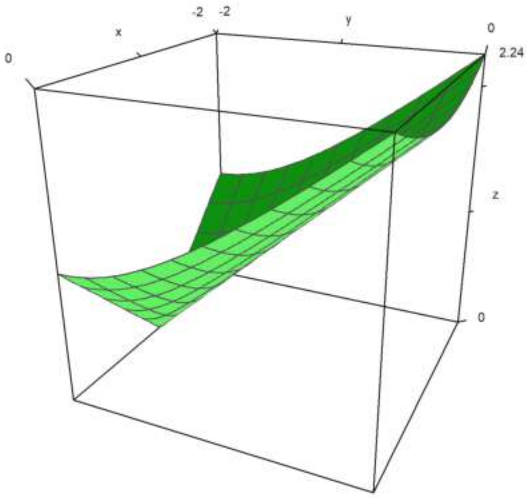
Fungsi yang menghubungkan titik A ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-2];
>function d2(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
 title="If you see ellipses, please set your window square"):
```



dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

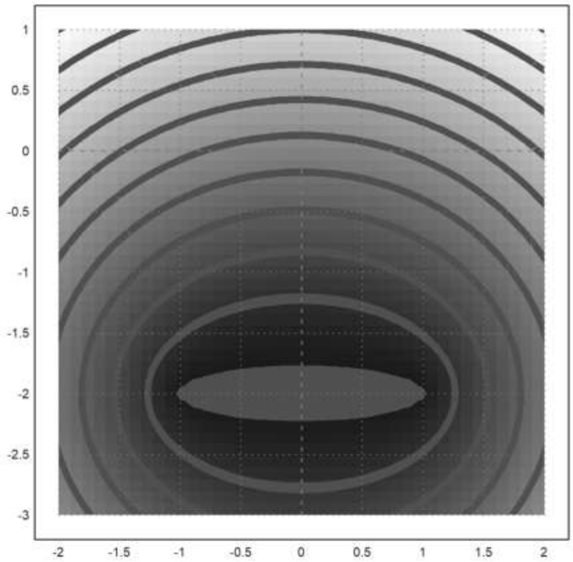


Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Dua poin

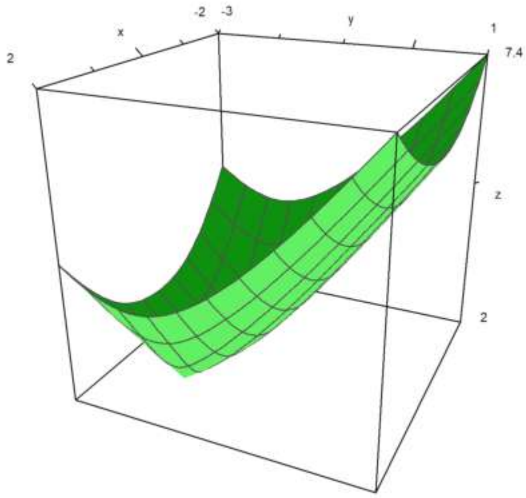
Sekarang kita lihat fungsi MA+MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang diketahui" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-2];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```



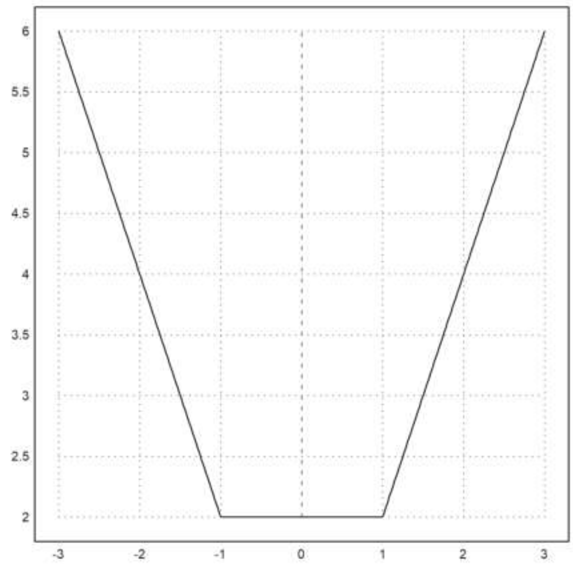
Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```



Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```



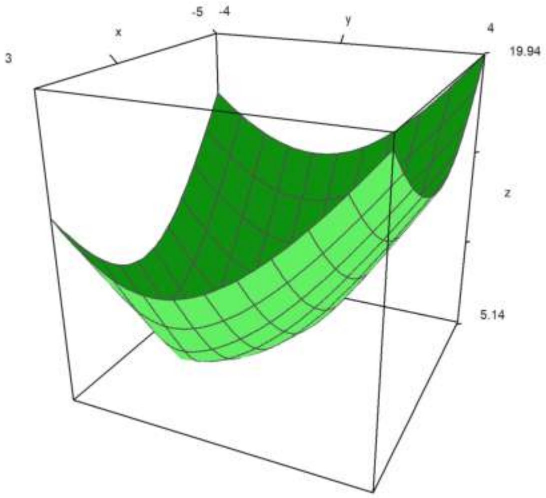
Tiga poin

Sekarang hal-hal yang kurang sederhana: Ini sedikit kurang terkenal bahwa MA+MB+MC mencapai minimum pada satu titik pesawat tetapi untuk menentukan itu kurang sederhana:

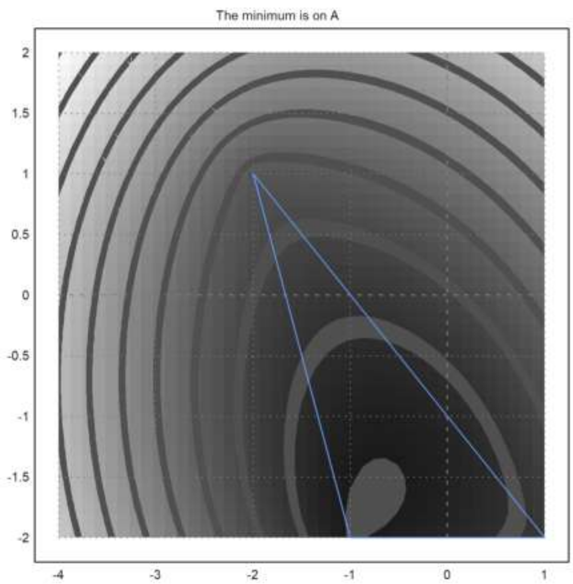
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (misalnya AB+AC).

Contoh:

```
>C=[-2,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

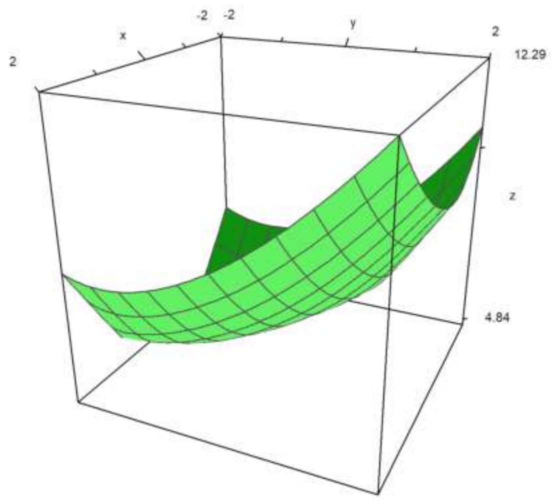



```
>fcontour("d4",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

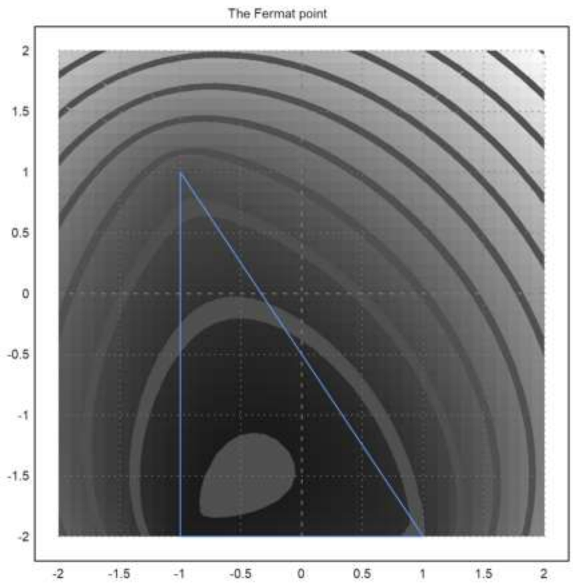


2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120 °, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing 120 °):

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```




```
>fcontour("d4",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```



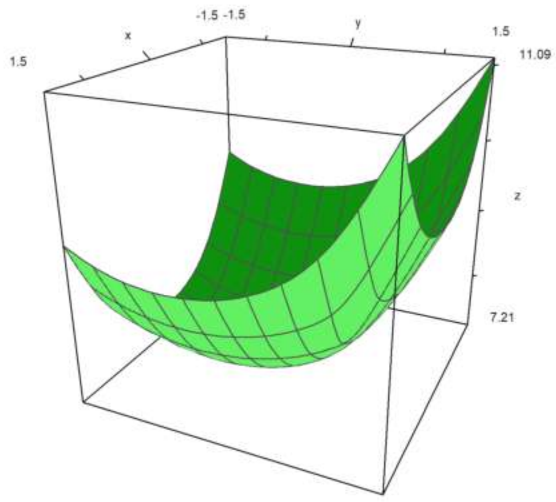
Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft yang ditulis di Jawa yang memiliki instruksi "garis kontur" ...

Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada dilettants lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat segitiga. Tetapi tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat melakukannya! Bagaimanapun tradisinya adalah mencatat poin ini F...

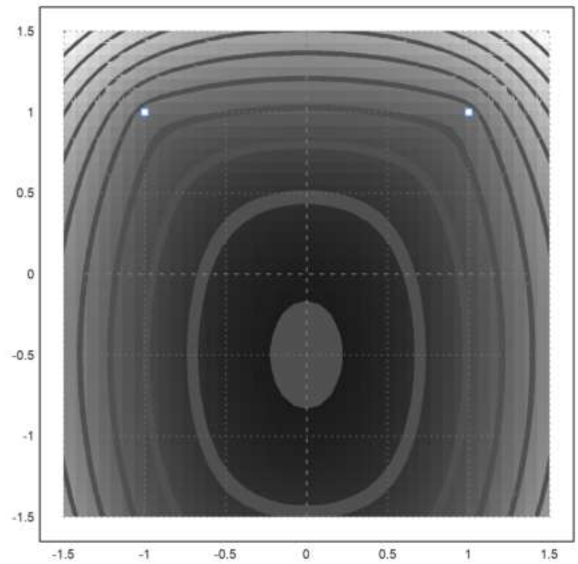
Empat poin

Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d5(x,y):=d4(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d5",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```




```
>fcontour("d5",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```



Masih ada minimum dan tidak tercapai di salah satu simpul A, B, C atau D:

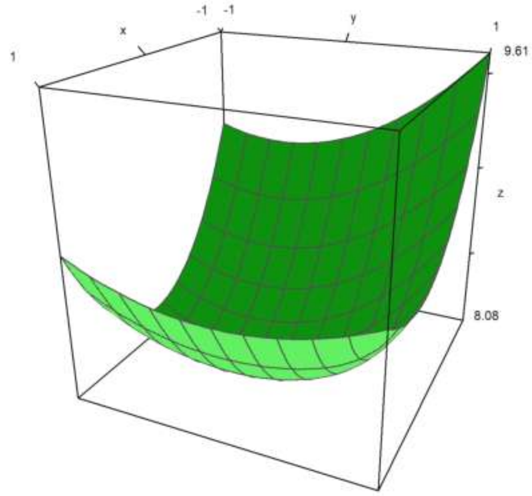
```
>function f(x):=d5(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
    [-2.30224e-07,  -0.5]
```

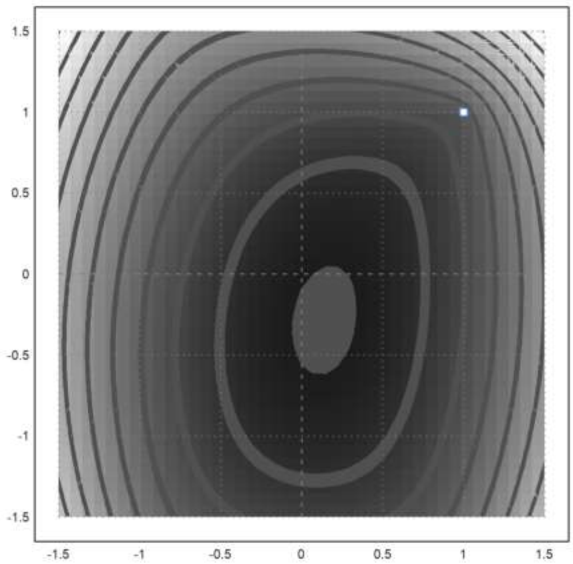
Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...

Sekarang ABCD adalah persegi, kami berharap bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

```
>C=[-1,2];
>plot3d("d5",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```




```
>fcontour("d5",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```



Bola Dandelion dengan Povray

Pertama kita menghitung jari-jari bola.

Jika diperhatikan gambar di bawah, terlihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.

Kami menggunakan file geometri.e Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama bentuk dua garis membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

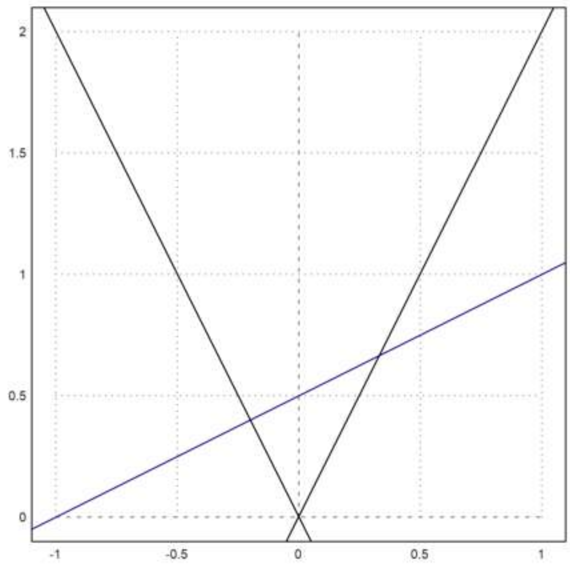
```
[- a, - 1, 0]
```

Kemudian beri garis ke tiga

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(blue); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(black); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```



Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
                                    [0, u]
```

Menghitung jarak ke g1

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\frac{a^2\,u^2}{\left(1+a^2\right)^2}+\left(-u+\frac{a^2\,u}{1+a^2}\right)^2}$$

Menghitung jarak ke g

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\frac{\left(-1+2\,u\right)^2}{25}+\left(-u+\frac{2+u}{5}\right)^2}$$

Menententukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{2+2\,a^2-\sqrt{5}\,\sqrt{1+a^2}}{-1+4\,a^2},u=\frac{2+2\,a^2+\sqrt{5}\,\sqrt{1+a^2}}{-1+4\,a^2}\right]$$

Ada dua solusi.

Kita mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, serta kedua jarak.

```
>u := sol()
```

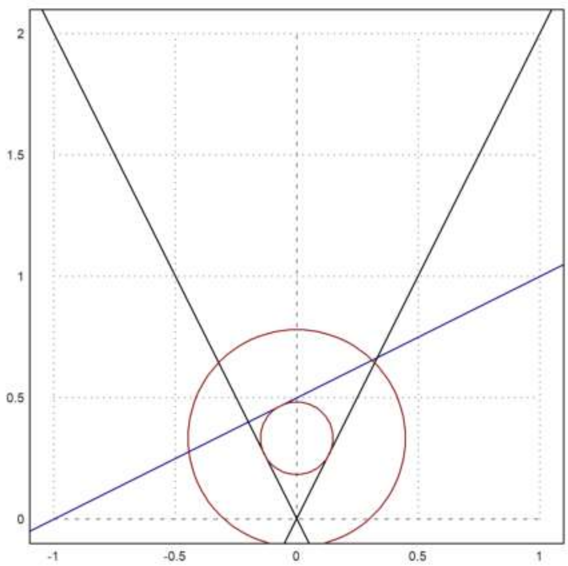
```
    [0.333333,   1]
```

```
>dd := d()
```

```
    [0.149071,   0.447214]
```

Gambarkan lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[2]),"");
>insimg;
```



Plot dengan Povray

Selanjutnya, kita membuat plot dengan Povray. Perhatikan bahwa kita dapat mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan ulang semua perintah dengan Shift-Return.

Pertama, kita muat fungsi-fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
    C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kemudian, kita atur perintah dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya, kita tulis dua bola ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(blue)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(blue)));
```

Dan kerucutnya, berwarna transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kita hasilkan bidang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik di lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
```

Menggambarkan povpoint P1 dengan warna kuning.

```
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Menggambarkan povpoint P2 dengan warna kuning.

Kemudian kita menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus dari elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=turnz([P3[1],0,P3[2]]);
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
```

Menggambarkan povpoint P3 dengan warna kuning.

```
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=turnz([P4[1],0,P4[2]]);
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Menggambarkan povpoint P4 dengan warna kuning.

Selanjutnya kita hitung irisan dari P1 dan P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp ; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
```

```
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Menggambarkan povpoint P5 dengan warna kuning.

Kita hubungkan titik-titik dengan segmen garis.

```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
```

Menggambarkan garis dari P1 ke P2 dengan warna kuning.

```
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
```

Menggambarkan garis dari P5 ke P3 dengan warna kuning.

```
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

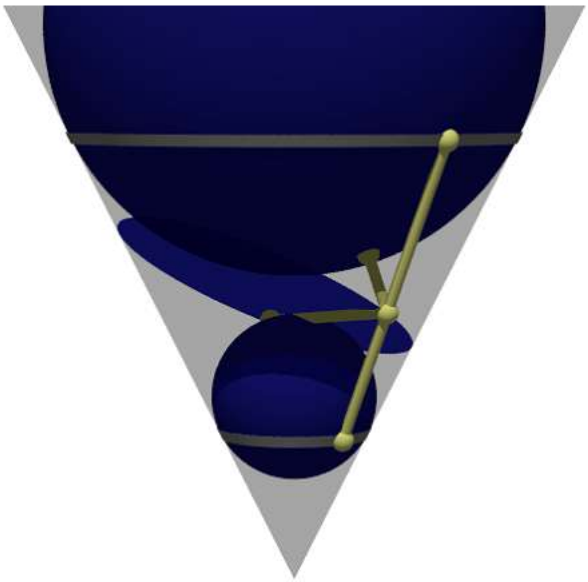
Menggambarkan garis dari P5 ke P4 dengan warna kuning.

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Memulai program Povray.

```
>povend();
```



Untuk mendapatkan Anaglyph dari ini, kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi adegan. Fungsi ini akan digunakan dua kali nanti.

```
>function scene () ... // menggabungkan seluruh perintah yang sudah ditulis sebelumnya
 global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
 writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
 writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
 writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
 gp=g();
 pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
 vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
 writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
 P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
 writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
 P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
 writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
 P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
 writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
 P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
 writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
 t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
 writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
 writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
 pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
 pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
 writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
 pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
 writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
 endfunction
```

Anda memerlukan kacamata merah/biru untuk menghargai efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

```
Command was not allowed!
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povanaglyph:
    povray(currentfile,w,h,aspect,exit);
```

Geometri Bumi

Pada bab ini akan dilakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kita menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut posisi kampus FMIPA UNY dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk menemukan koordinatnya).

```
>FMIPA=[-7.7743°, 110.3857°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(FMIPA), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.458' E 110°23.142'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 433,12 km. Kita mendapatkan perkiraan yang bagus.

```
>esdist(FMIPA,Monas)->" km"
```

```
433.127867645 km
```

Judulnya sama dengan yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(FMIPA,Monas))
```

```
294°2'36.38''
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan arah dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi inversi secara tepat, tetapi mengambil perkiraan radius bumi di sepanjang jalur.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Monas),esdist(FMIPA,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun demikian, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu saja, kita tidak bisa berlayar dengan arah yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin mengambil jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang ke arah NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti arah yang konstan!

Perhitungan berikut ini menunjukkan bahwa kita akan melenceng dari tujuan yang benar, jika kita menggunakan arah yang sama selama perjalanan.

```
>dist=esdist(FMIPA,Monas); hd=esdir(FMIPA,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak tersebut, dengan menggunakan arah menuju Monas, kita akan sampai di Tugu.

```
>p=FMIPA; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh berbeda.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.257' E 106°48.372'
     1.542km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran lintang 30°, tetapi jalur yang lebih pendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
79.69°
```

Namun, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi, kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kita sesuaikan pada 1/10 dari jarak total.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
   loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan jika kita mengikuti arah yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kita mendapatkan perkiraan yang baik, jika kita menyesuaikan arah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=FMIPA; dist=esdist(FMIPA,Monas); ...
   loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(FMIPA,Monas,10); ...
   loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

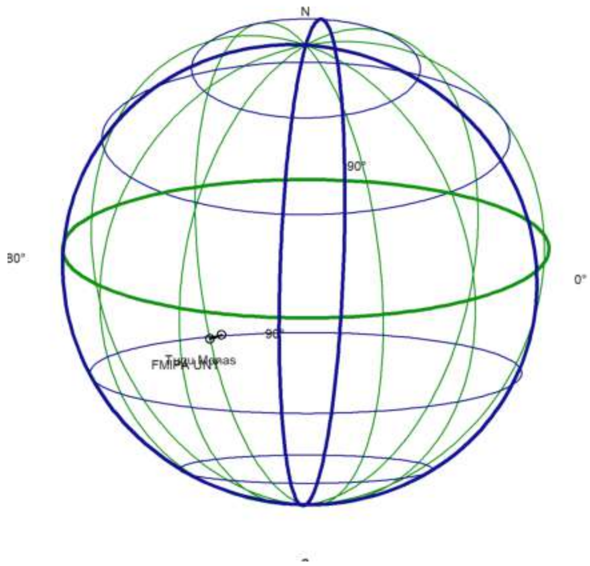
```
S 7°46.458' E 110°23.142'
S 7°36.937' E 110°1.631'
S 7°27.398' E 109°40.137'
S 7°17.842' E 109°18.658'
S 7°8.270' E 108°57.194'
S 6°58.680' E 108°35.746'
S 6°49.075' E 108°14.312'
S 6°39.454' E 107°52.892'
S 6°29.817' E 107°31.487'
S 6°20.166' E 107°10.095'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kita menulis sebuah fungsi yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
 useglobal;
 plotearth;
 plotpos(FMIPA,"FMIPA UNY"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
 plotposline(v);
 endfunction
```

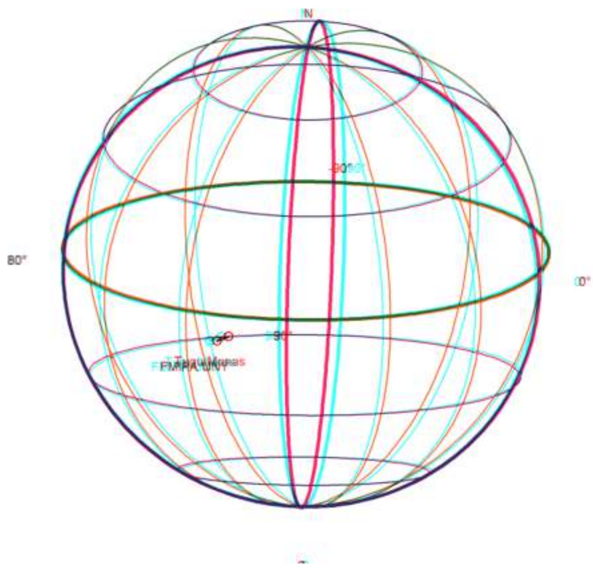
Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```



Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/cyan.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```



Persamaan garis yang melalui dua titik

Persamaan garis yang melalui dua titik atau juga dikenal sebagai persamaan titik-dua-titik adalah cara umum untuk menggambarkan garis lurus dalam sistem koordinat. Untuk menentukan persamaan garis yang melalui dua titik tertentu, dua titik tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

Setelah kita mendapatkan koordinat 2 titik tersebut, kita membuat garis yang melewati 2 titik tersebut, yaitu titik A dan B. Lalu kita cari persamaannya, sedemikian sehingga saat x1 disubtitusi ke persamaan maka menghasilkan nilai y1, juga saat x2 disubtitusi ke persamaan maka didapat nilai y2 didapat dengan perintah EMT yaitu:

lineThrough(A,B);

setelah itu kita mengambar garis tersebut, dan dihitung persamaannya dengan menggunakan perintah:

getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)

Contoh soal:
Diberikan 2 titik A dan B dengan koordinat sebagai berikut:

$$A(3, -2) \quad dan \quad B(-2, 5)$$

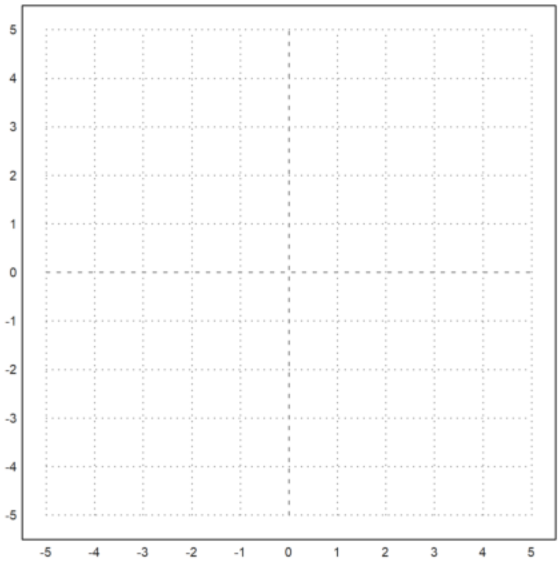
Tentukan persamaan dari garis yang melewati titik A dan B!

Penyelesaian :
Menggambar garis pada plot range

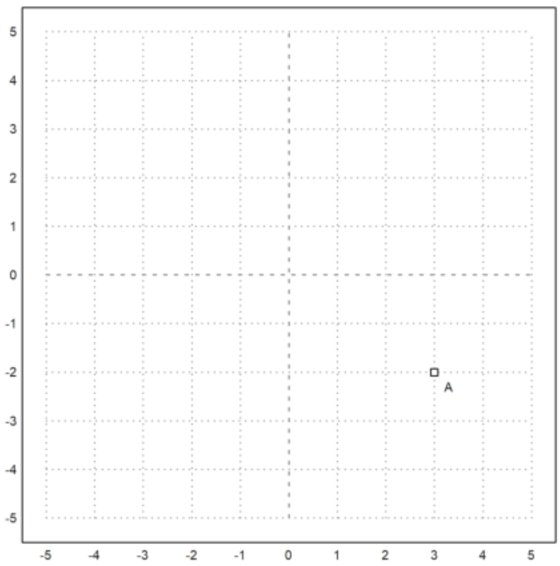
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

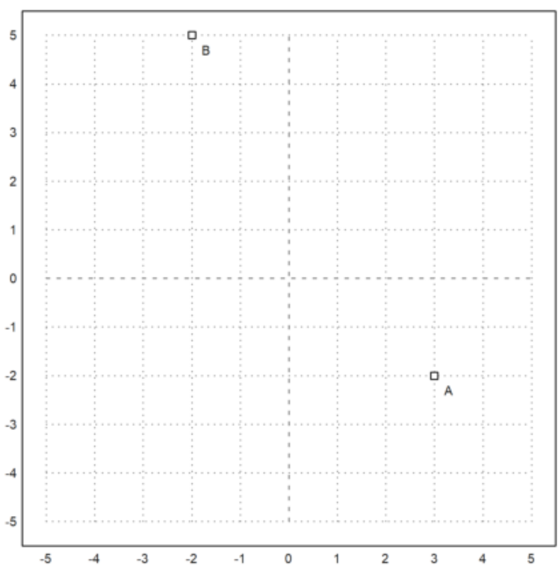
```
>setPlotRange(5):
```



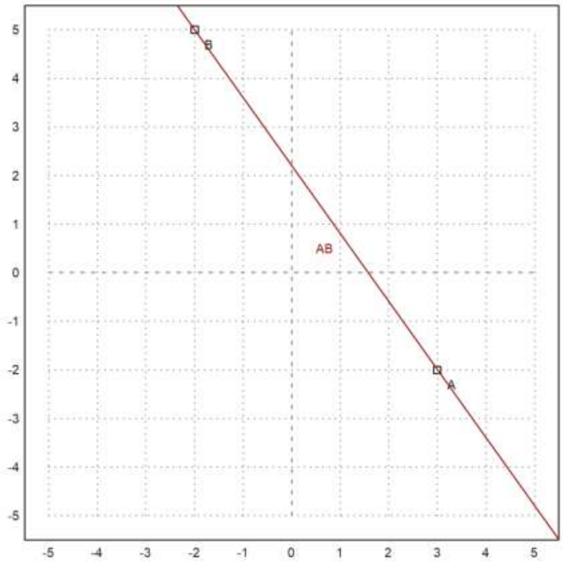
```
>A=[3,-2];
>B=[-2,5];
>plotPoint(A):
```




```
>plotPoint(B):
```



```
>color(2);
>plotLine(lineThrough(A,B),"AB"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis yang melalui titik A dan B

```
>A&=[3,-2];
>B&=[-2,5];
>$getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y)
```

$$-7\,x-5\,y=-11$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{11-7\,x}{5}\right]$$

Rumus menentukan persamaan garis melalui dua titik

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Diketahui

$$A(3,-2)\ \ dan\ \ B(-2,5)$$

$$x_1=3,\ x_2=-2,\ y_1=-2,\ y_2=5$$

Penyelesaian

$$\frac{y-(-2)}{5-(-2)}=\frac{x-3}{-2-3}$$

$$\frac{y+2}{7}=\frac{x-3}{-5}$$

$$y=\frac{(x-3)7}{-5}-2$$

$$y=\frac{7x-21+10}{-5}$$

$$y=\frac{7x-11}{-5}$$

$$y=\frac{11-7x}{5}$$

Persamaan garis sumbu

Garis sumbu adalah garis yang membagi sisi menjadi dua bagian sama panjang dan tegak lurus. Garis sumbu dalam sebuah segitiga adalah garis lurus yang menghubungkan satu titik pada segitiga dengan sisi dihadapannya dan membagi sisi tersebut menjadi dua bagian sama panjang secara tegak lurus.

Contoh soal :

Terdapat

$$\triangle ABC,\ dengan\ A(3,4);\ B(-5,-4);\ dan\ C(3,-4)$$

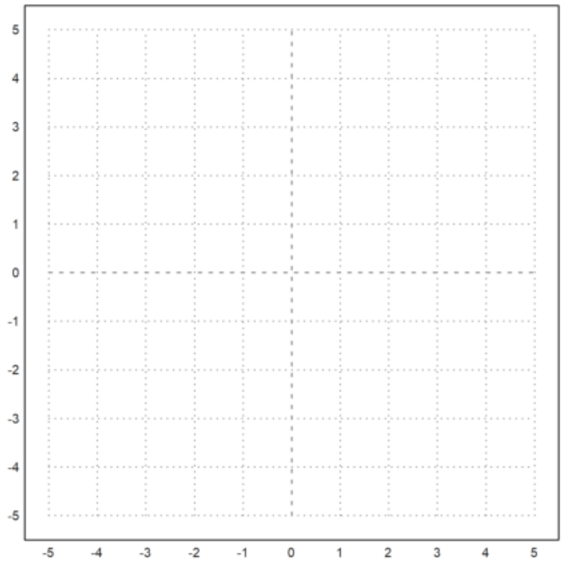
Tentukan persamaan garis sumbu dari ruas garis BC!

Penyelesaian :
Membuat plot garis sumbu segitiga

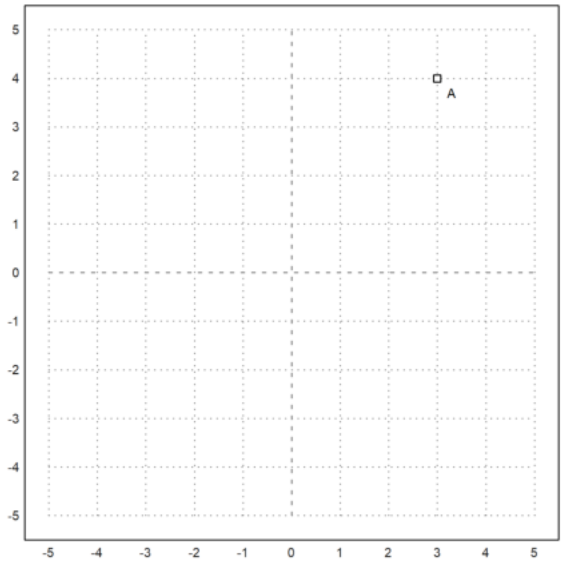
```
>load geometry
```

    Numerical and symbolic geometry.

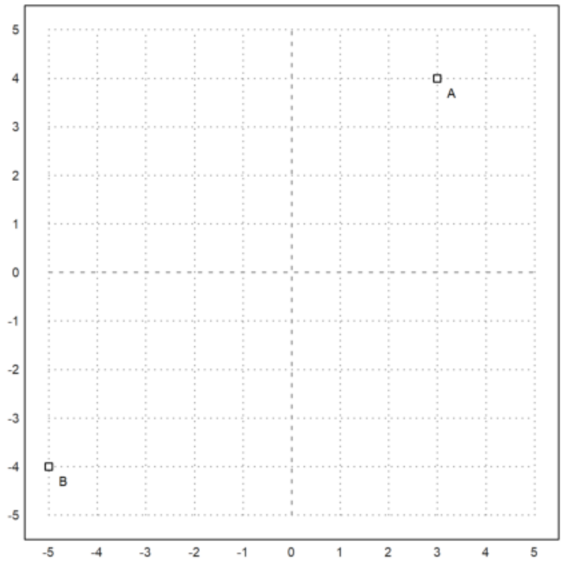
```
>setPlotRange(5):
```



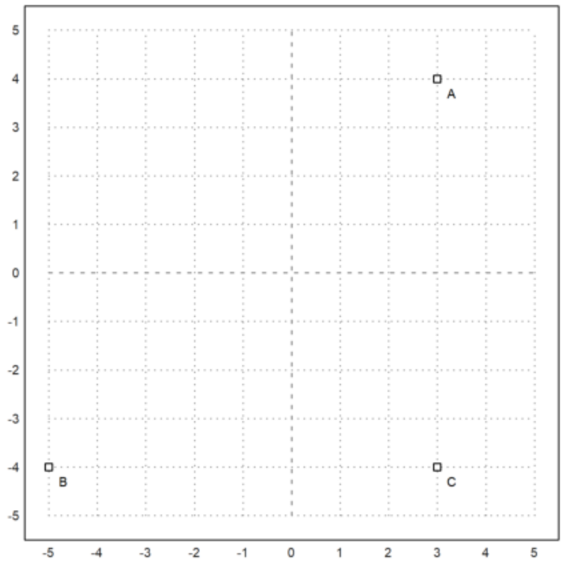
```
>A=[3,4]; plotPoint(A,"A"): // definisi dan gambar titik
```



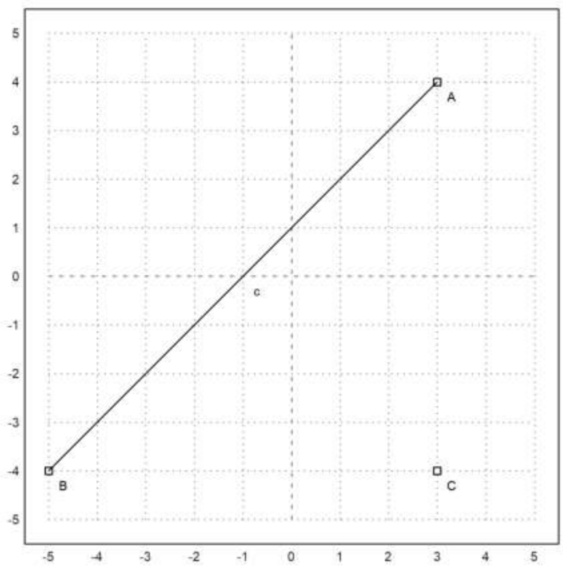
```
>B=[-5,-4]; plotPoint(B,"B"):
```



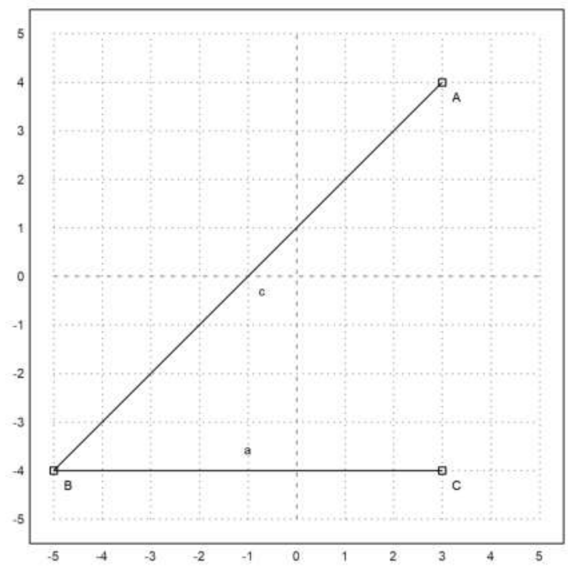

```
>C=[3,-4]; plotPoint(C,"C"):
```



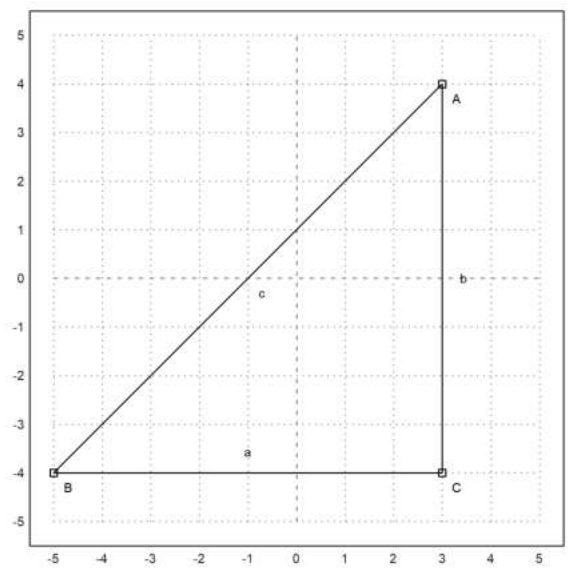

```
>plotSegment(A,B,"c"):
```



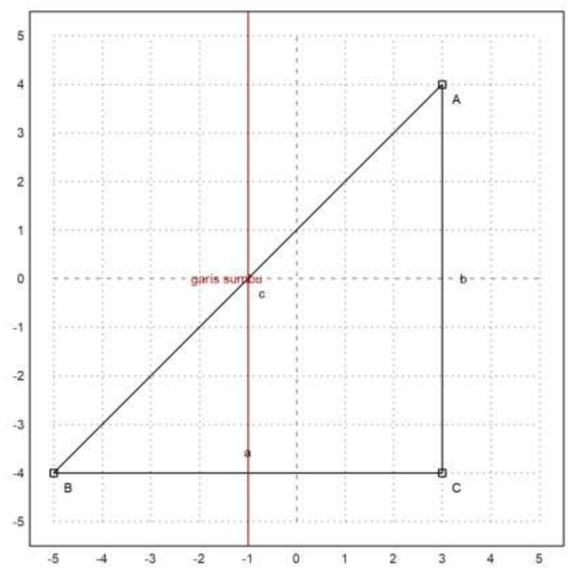

```
>plotSegment(B,C,"a"):
```




```
>plotSegment(A,C,"b"):
```




```
>color(2);
>p=middlePerpendicular(B,C); plotLine(p,"garis sumbu"):
```



Mencari persamaan garis sumbunya

```
>color(1);
>B&=[-5,-4];
>C&=[3,-4];
>p&=middlePerpendicular(B,C)
```

```
[- 8, 0, 8]
```

```
>$getLineEquation(p,x,y)
```

$$-8\,x=8$$

```
>$solve(%,x)
```

$$[x=-1]$$

Garis sumbu segitiga melalui 2 titik yaitu

$$(-1,-4)\ dan\ (-1,0)$$

$$x_1=-1,\ x_2=-1,\ y_1=-4,\ y_2=0$$

$$\frac{y-(-4)}{0-(-4)}=\frac{x-(-1)}{-1-(-1)}$$

$$\frac{y+4}{4}=\frac{x+1}{0}$$

$$4(x+1)=0$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

Persamaan garis bagi sudut

Garis bagi sudut adalah garis yang membagi sudut menjadi dua sudut yang besarnya sama. Nama lain garis bagi dalam bahasa inggris adalah angle bisector yang dapat dijelaskan sebagai garis yang memotong sudut sehingga sudut tersebut terbagi menjadi dua bagian yang sama besar.
Garis bagi segitiga adalah garis yang membagi sudut segitiga menjadi dua sudut sama besar.

Contoh soal:

Terdapat

$$\triangle ABC,\ dengan\ A(1,3);\ B(3,-4);\ dan\ C(-4,-4)$$

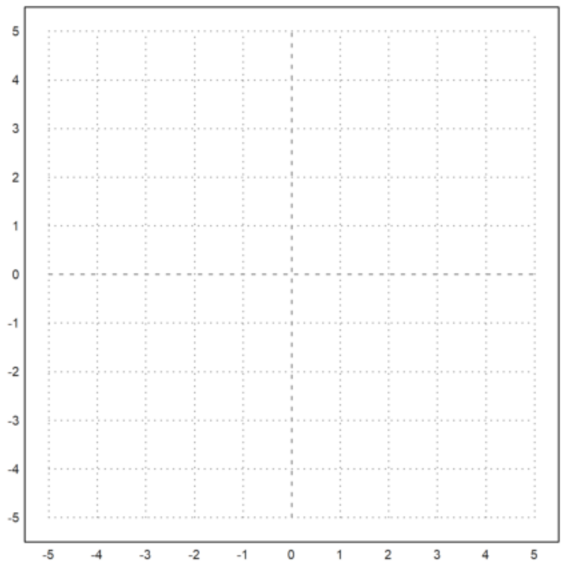
Tentukan garis bagi dari sudut A dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis bagi segitiga

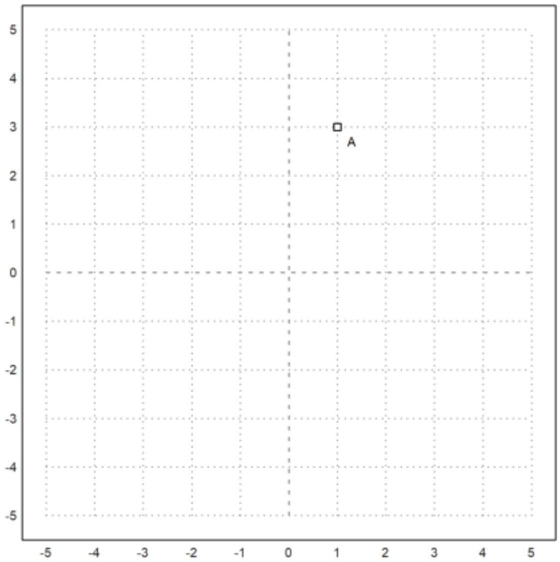
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

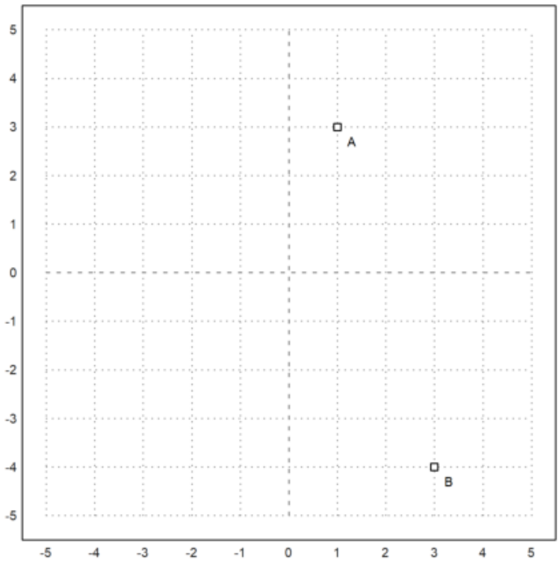
```
>setPlotRange(5):
```



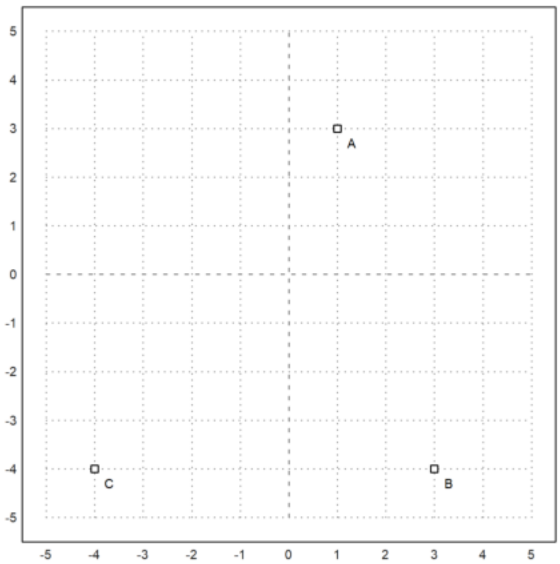

```
>A=[1,3]; plotPoint(A,"A"):
```



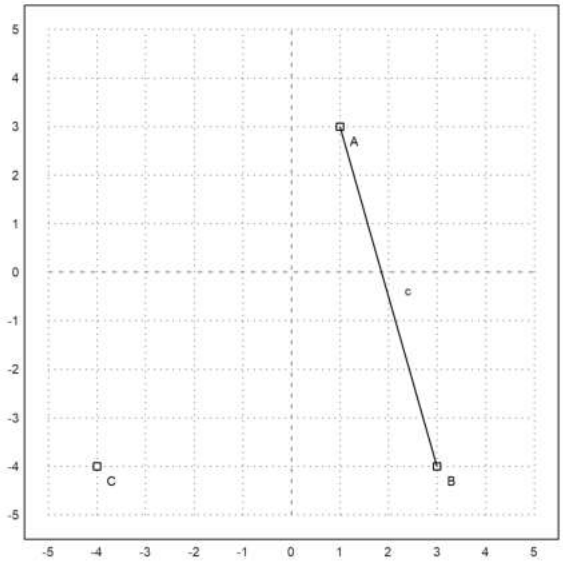

```
>B=[3,-4]; plotPoint(B,"B"):
```



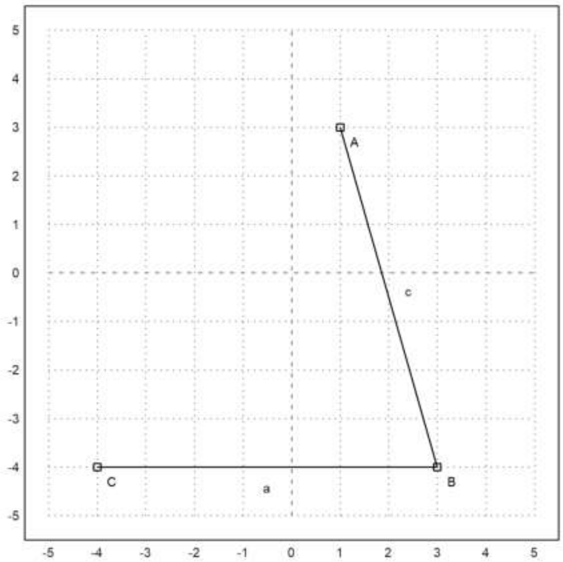

```
>C=[-4,-4]; plotPoint(C,"C"):
```



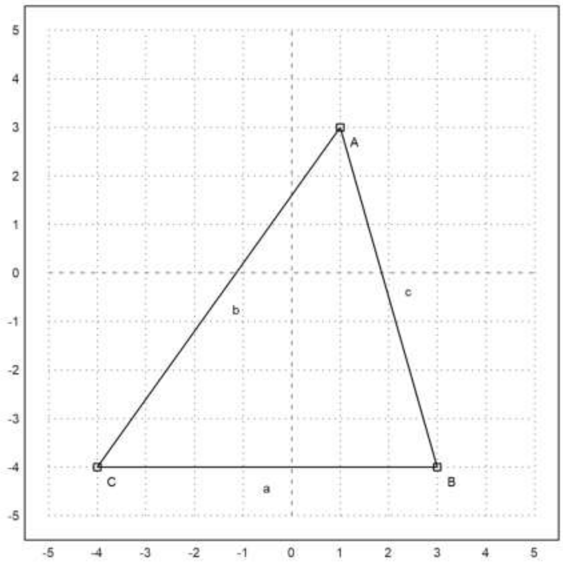

```
>plotSegment(A,B,"c"):
```



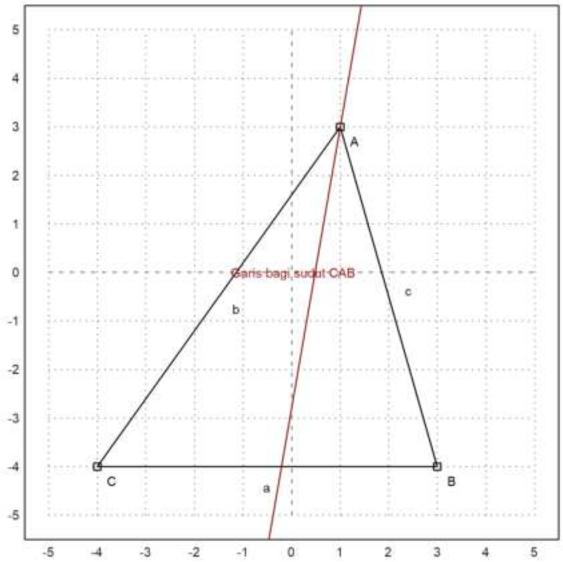

```
>plotSegment(B,C,"a"):
```




```
>plotSegment(A,C,"b"):
```



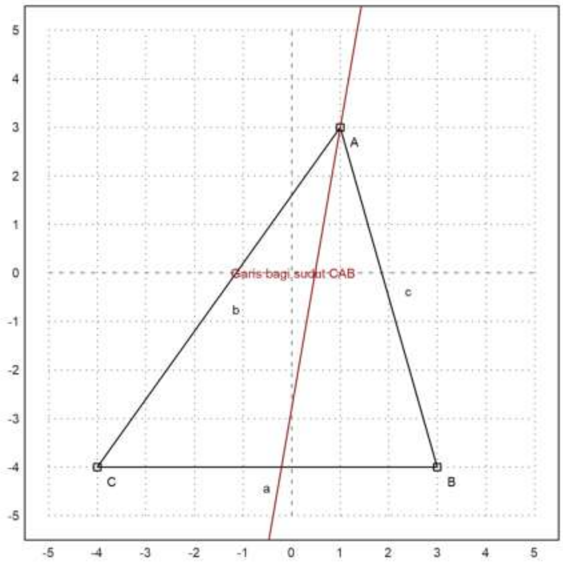

```
>t=angleBisector(C,A,B);
>color(2);
>plotLine(t,"Garis bagi sudut CAB"):
```




```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis bagi sudutnya

```
>A&=[1,3];
>B&=[3,-4];
>C&=[-4,-4];
>t&=angleBisector(C,A,B):
```




```
>$getLineEquation(t,x,y)
```

$$\left(-5-\frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)x+\left(-7+\frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)y=\frac{\left(-5-\frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)\left(-3+\frac{2\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)}{2}+\frac{\left(-1-\frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)\left(-7+\frac{7\sqrt{74}}{\sqrt{53}}\right)}{2}$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{-1378+19\sqrt{53}\sqrt{74}+\left(265+2\sqrt{53}\sqrt{74}\right)x}{-371+7\sqrt{53}\sqrt{74}}\right]$$

Persamaan garis berat

Dalam geometri, garis berat segitiga merupakan sebuah ruas garis yang menghubungkan sebuah titik sudut ke titik tengah dari sisi yang berhadapan, sehingga membagi sisi tersebut menjadi dua bagian yang sama panjang. Setiap segitiga memiliki tiga garis berat yang masing-masing berasal dari salah satu sudut segitiga dan menuju titik tengah sisi yang berlawanan. Garis berat ini juga dikenal sebagai garis median karena mereka memotong sisi segitiga pada titik tengahnya.

Dalam konteks segitiga, garis berat memiliki beberapa sifat penting. Salah satunya adalah ketika ketiga garis berat bersimpang-siuran di satu titik tunggal yang disebut pusat gravitasi atau pusat berat segitiga. Titik ini membagi setiap garis berat dalam perbandingan 2:1, yang berarti bahwa jarak dari titik tengah sisi ke sudut yang berlawanan adalah dua kali jarak dari pusat gravitasi ke titik tengah sisi. Garis berat dalam segitiga juga sering digunakan dalam perhitungan geometri dan trigonometri untuk menentukan berbagai sifat dan properti segitiga, seperti panjang sisi, luas, dan lainnya.

Contoh soal:

Terdapat

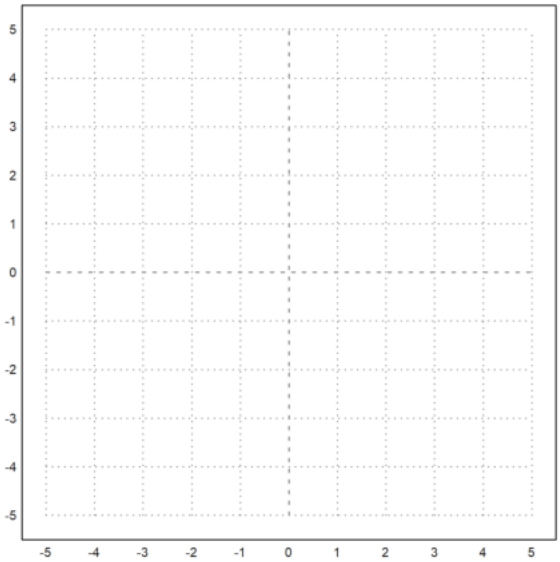
Tentukan garis berat segitiga dititik C dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis berat segitiga

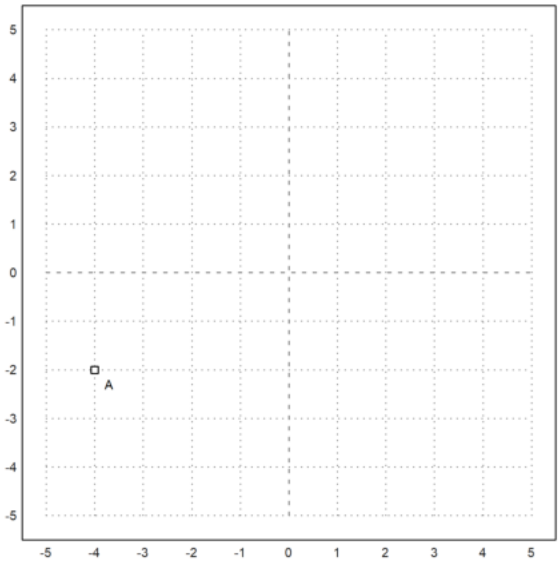
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

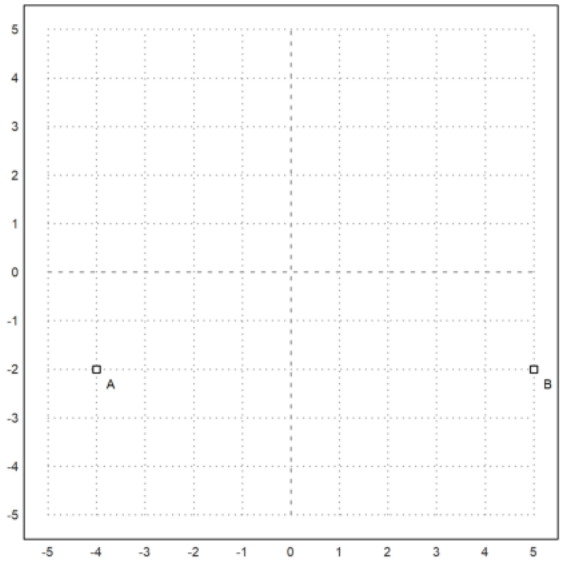
```
>setPlotRange(5):
```



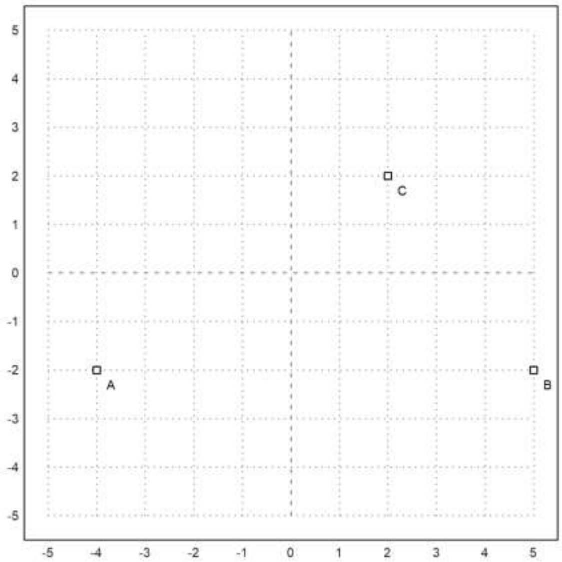
```
>A=[-4,-2]; plotPoint(A,"A"):
```



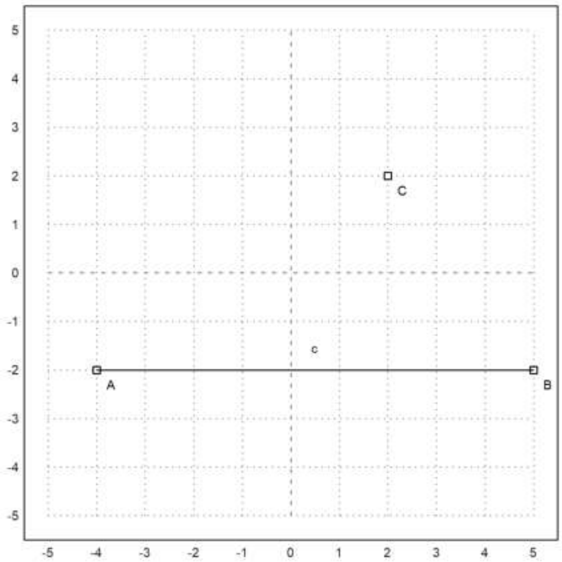

```
>B=[5,-2]; plotPoint(B,"B"):
```



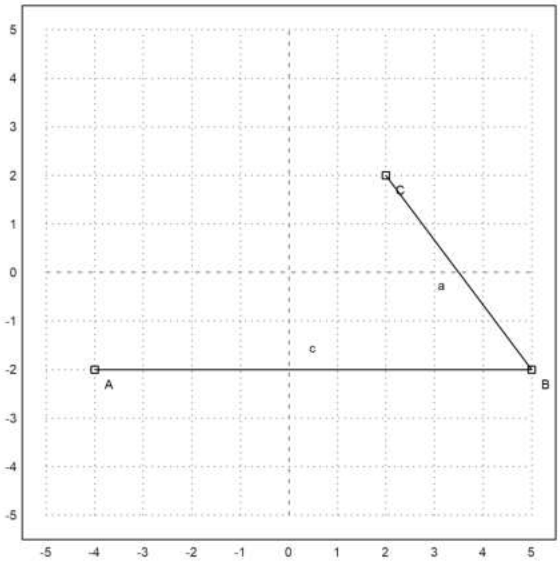

```
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C"):
```



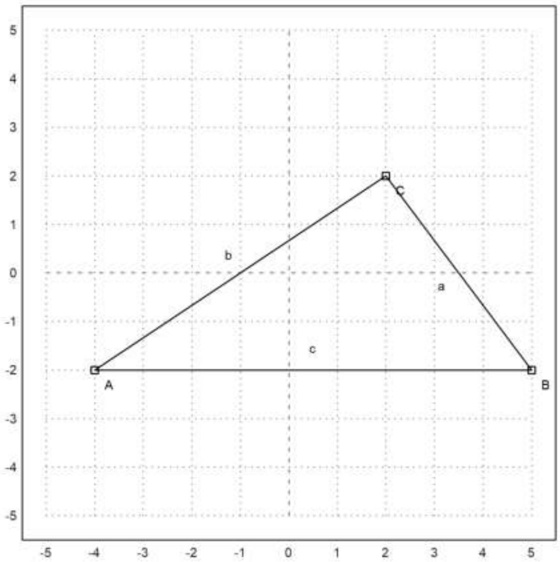

```
>plotSegment(A,B,"c"):
```



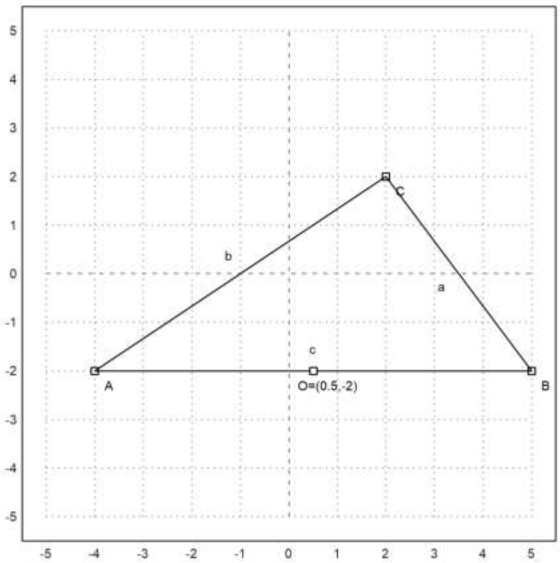

```
>plotSegment(B,C,"a"):
```



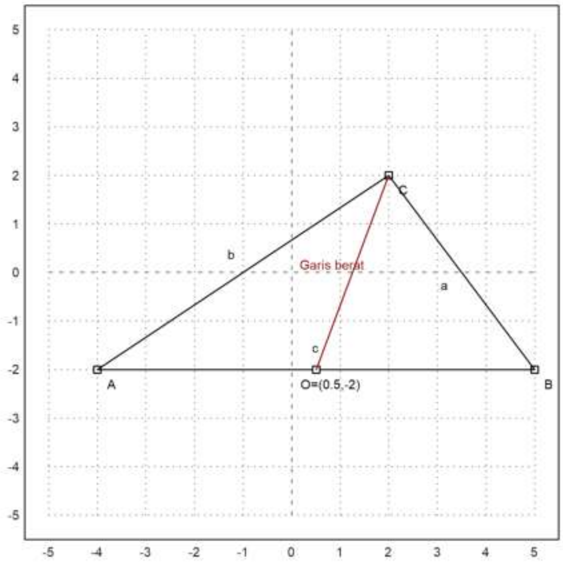

```
>plotSegment(A,C,"b"):
```




```
>t=middlePerpendicular(A,B);
>O=lineIntersection(t,lineThrough(A,B)); plotPoint(O,value=1):
```



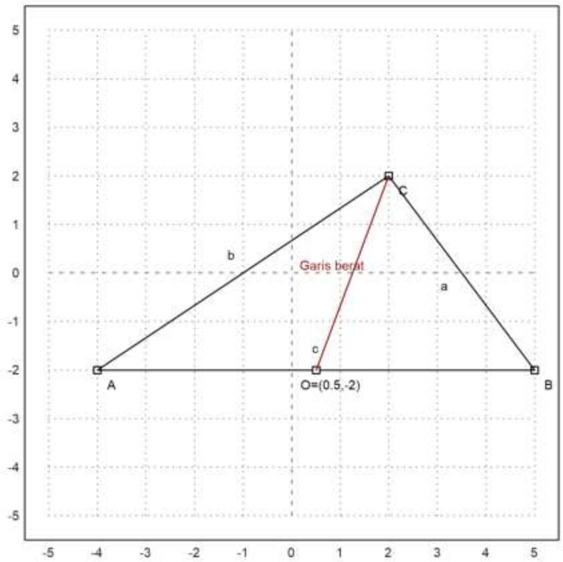

```
>color(2);
>plotSegment(O,C,"Garis berat"):
```



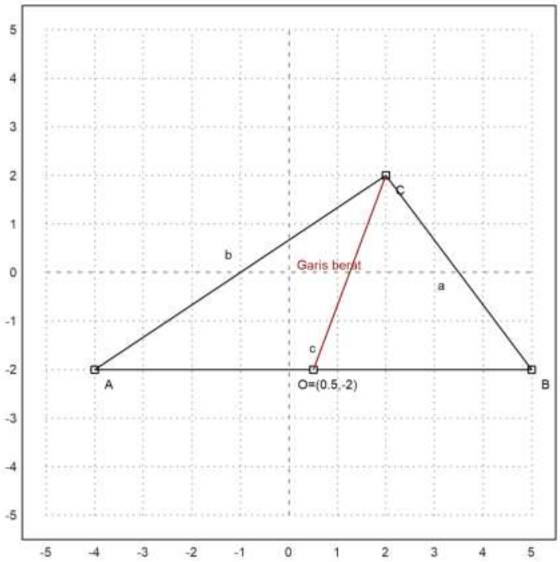

```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis beratnya

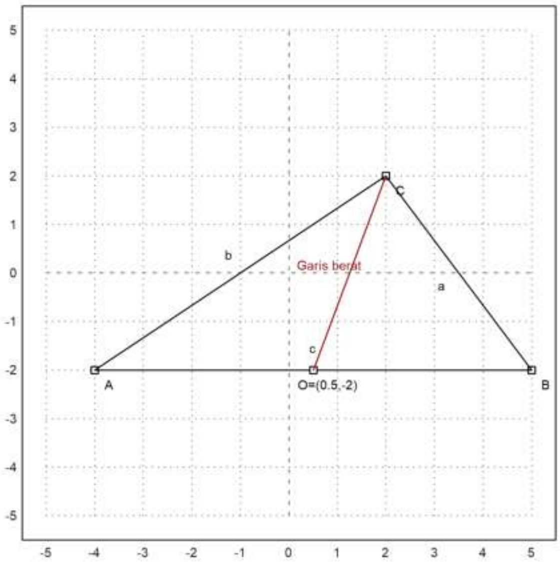
```
>A&=[-4,-2];
>B&=[5,-2];
>C&=[2,2];
>t&=middlePerpendicular(A,B):
```




```
>O&=lineIntersection(t,lineThrough(A,B)):
```




```
>p&=lineThrough(O,C):
```




```
>$getLineEquation(p,x,y)
```

$$-4\,x+\frac{3\,y}{2}=-5$$

```
>$solve(%,y)
```

$$\left[y=\frac{-10+8\,x}{3}\right]$$

Persamaan garis tinggi

Garis tinggi dalam segitiga adalah ruas garis yang ditarik dari sudut segitiga ke sisi yang berlawanan secara tegak lurus. Dengan kata lain, garis tinggi merupakan jarak vertikal dari salah satu sudut segitiga ke sisi yang berlawanan, dan garis ini membentuk sudut siku-siku dengan sisi tersebut.

Contoh soal:

Terdapat

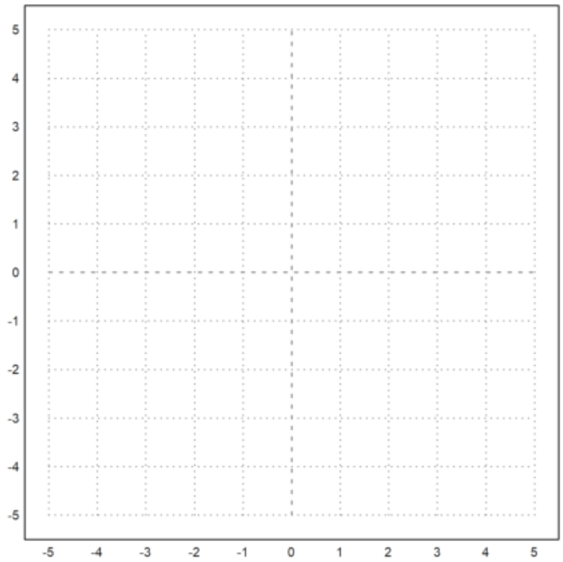
Tentukan garis tinggi di titik A dan persamaannya!

Penyelesaian:
Membuat plot garis tinggi segitiga

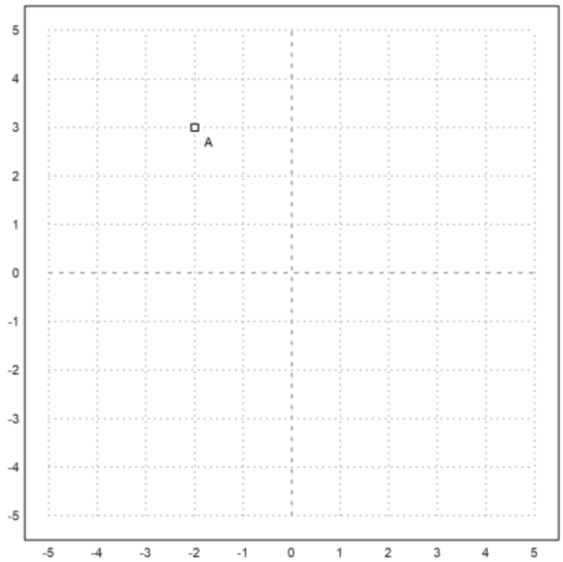
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

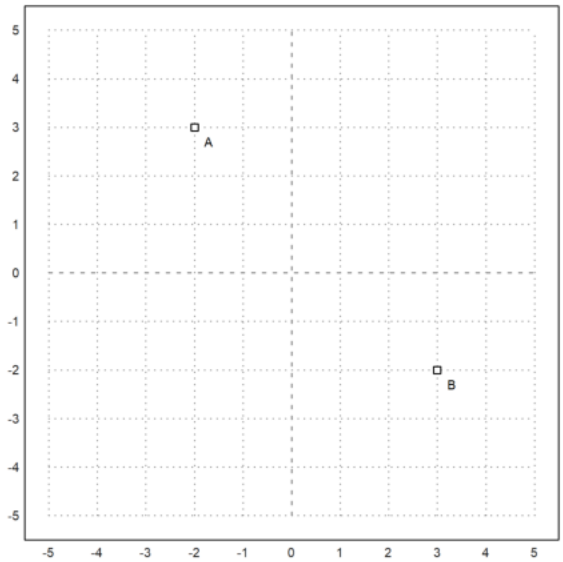
```
>setPlotRange(5):
```



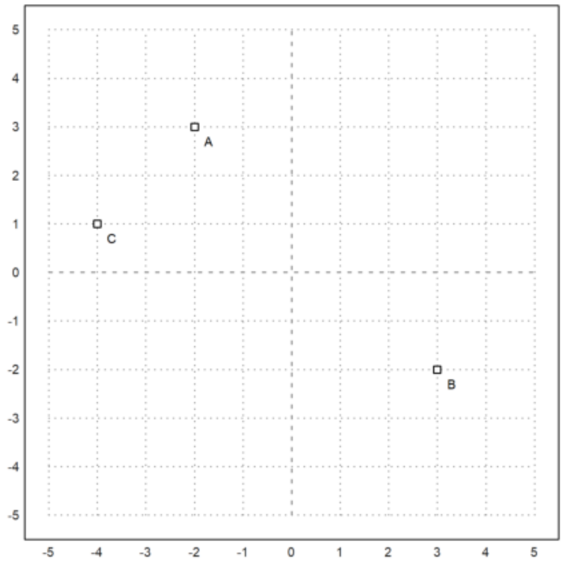

```
>A=[-2,3]; plotPoint(A,"A"):
```



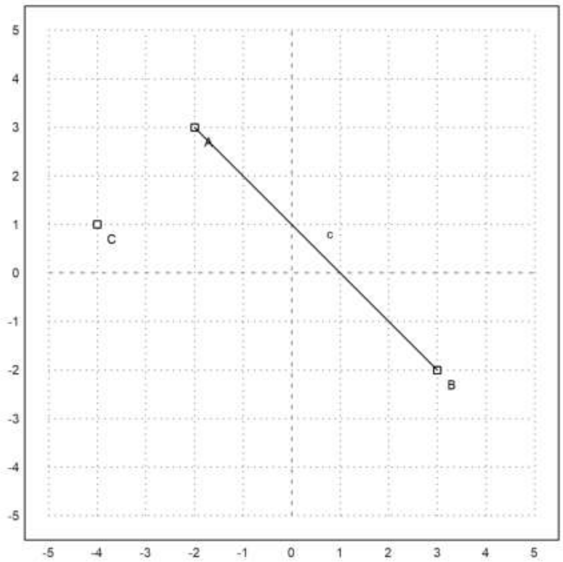

```
>B=[3,-2]; plotPoint(B,"B"):
```



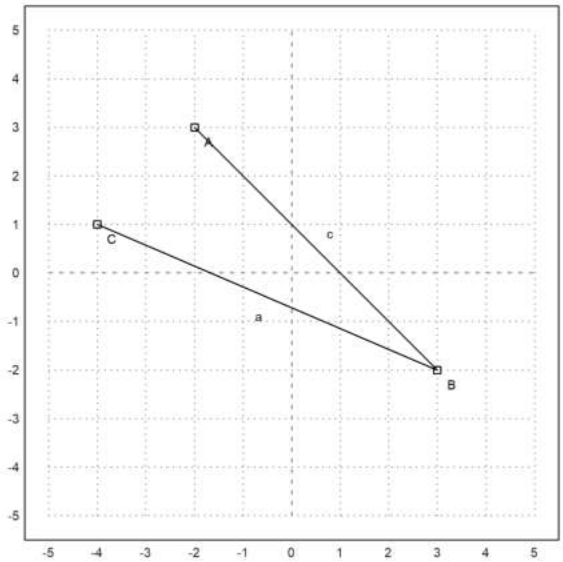

```
>C=[-4,1]; plotPoint(C,"C"):
```



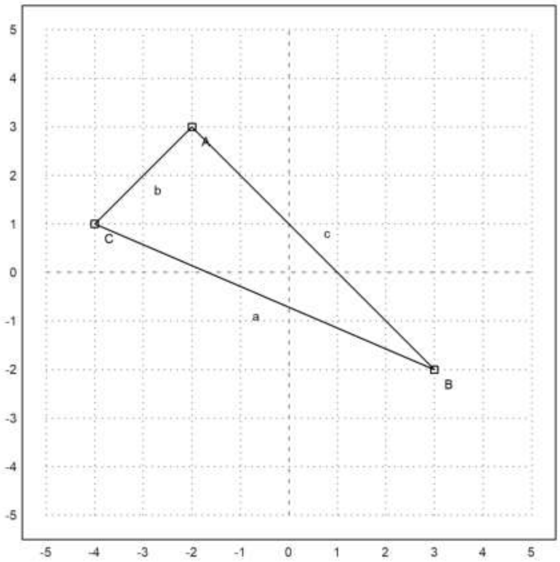
>plotSegment(A,B,"c"):



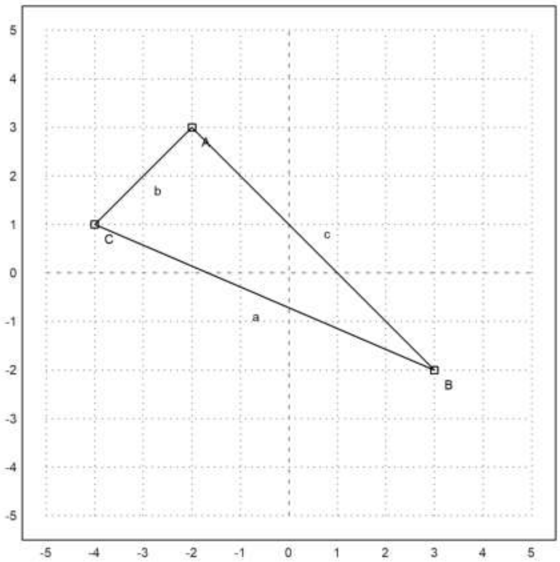
>plotSegment(B,C,"a"):



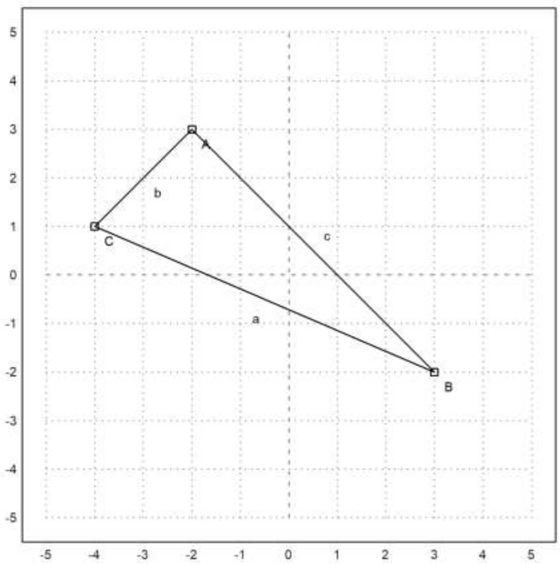
>plotSegment(A,C,"b"):



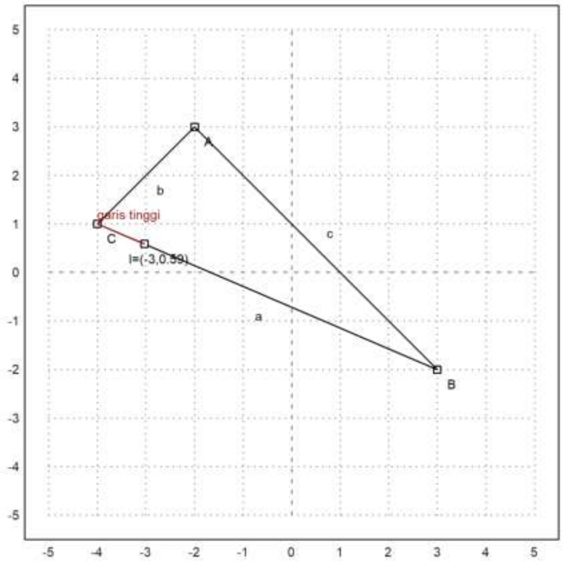

```
>g=lineThrough(B,C):
```




```
>h=perpendicular(A,g):
```



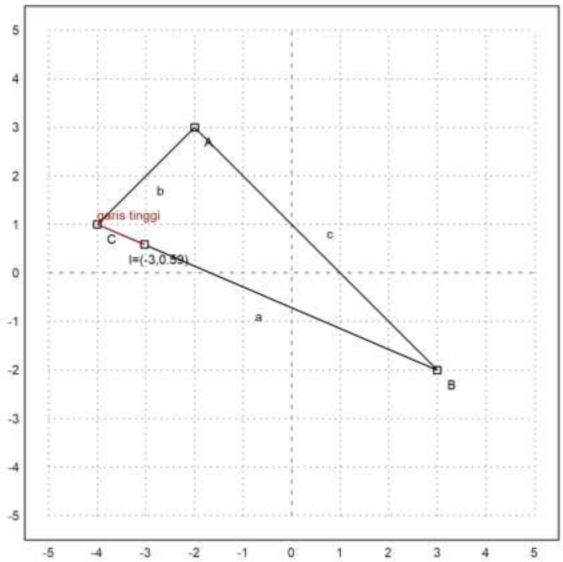

```
>I=lineIntersection(g,h); plotPoint(I,value=1);
>color(2);
>plotSegment(C,I,"garis tinggi"):
```



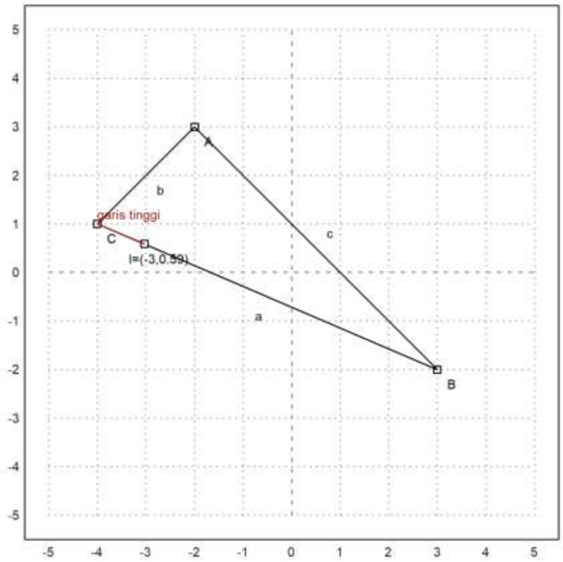

```
>color(1);
```

Mencari persamaan garis tingginya

```
>A&=[-2,3];
>B&=[3,-2];
>C&=[-4,-1];
>g&=lineThrough(B,C):
```




```
>h&=perpendicular(A,g):
```




```
>$getLineEquation(h,x,y)
```

$$-7x+y=17$$

```
>$solve(%,y)
```

$$[y=17+7x]$$

Menentukan Titik Pusat dan Jari - Jari Suatu Lingkaran

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik - titik yang berjarak sama dengan satu titik tertentu. Titik tertentu itu disebut titik pusat lingkaran, sedangkan jarak yang sama adalah jari - jari lingkaran.
Rumus umum lingkaran yaitu:

$$P(a,b):(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Rumus umum lingkaran untuk titik pusat (0,0) yaitu:

$$P(a,b):x^2+y^2=r^2$$

Contoh

Tentukan titik pusat dan jari - jari lingkaran dari persamaan berikut ini:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=25$$

Jawab:
Jari - jarinya yaitu

$$\sqrt{25}=5$$

Titik Pusatnya yaitu

$$P(a,b)=P(-2,3)$$

```
>r &= sqrt(25)
```

5

Untuk menentukan titik pusat dan jari - jari suatu lingkaran jika yang diketahui persamaan lingkarannya berupa persamaan baku :

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

maka titik pusatnya yaitu:

$$P(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$$

Bukti:
Dari persamaan bentuk baku tersebut, kita dapat menemukan titik pusat dengan cara mengelompokkan peubah yang sama di ruas kiri, sedangkan konstanta di ruas kanan, sebagai berikut:

$$x^2 + Ax + y^2 + By = -C$$

Kemudian melengkapkan kuadrat sempurna persamaan tersebut menjadi:

$$x^2 + Ax + (\frac{A}{2})^2 + y^2 + By + (\frac{B}{2})^2 = -C + (\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2$$

Bentuk tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = -C + (\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2$$

Persamaan tersebut sudah menjadi persamaan bentuk umum, dimana untuk menentukan titik pusat dari persamaan bentuk baku yaitu:

$$P(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$$

Terbukti.
Dari pembuktian tersebut, dapat dibuktikan juga bahwa cara menentukan jari-jari suatu lingkaran jika yang diketahui persamaan bentuk bakunya adalah:

$$r = \sqrt{(\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C}$$

Contoh

Tentukan titik pusat dan jari - jari lingkaran dengan persamaan

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$$

Jawab:

$$P(a,b) = P(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$$

$$P(a,b) = P(-\frac{4}{2}, -\frac{-6}{2})$$

$$P(a,b) = P(-2,3)$$

$$r = \sqrt{(\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C}$$

$$r = \sqrt{(\frac{4}{2})^2 + (\frac{-6}{2})^2 - 12}$$

$$r = \sqrt{2^2 + (-3)^2 - (-12)}$$

$$r = \sqrt{25} = 5$$

Untuk menentukan titik pusat dan jari - jari suatu lingkaran di EMT dapat menggunakan getCircleCenter(c) untuk titik pusat dan getCircleRadius(c) untuk jari - jari. Namun, hal ini dapat digunakan jika sudah terdapat lingkarannya yang ditentukan dari tiga titik yang diketahui.

Sebagai tambahan untuk membuktikan titik pusat dan jari - jari yang didapatkan benar, dapat dibuktikan dengan menggambar lingkaran yang berpusat di titik tersebut dan berjari - jari yang sesuai dengan yang dihasilkan menggunakan fungsi circleWithCenter(P,R)

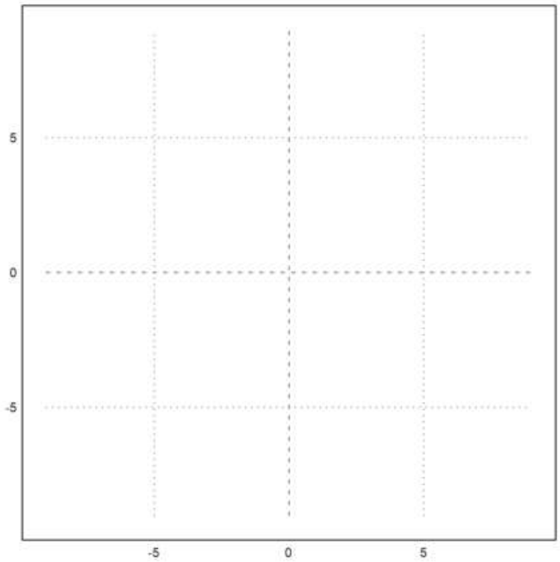
Contoh

1. Gambarlah lingkaran yang melalui titik A(-1,2), B(-3,-1), C(1,3) dan tentukan titik pusat dan jari - jarinya

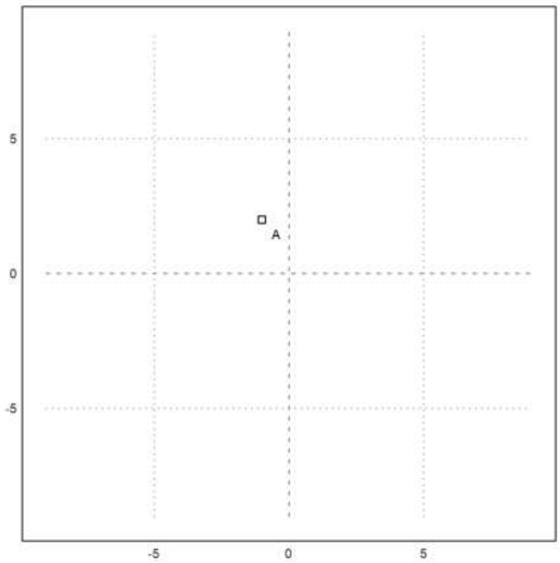
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

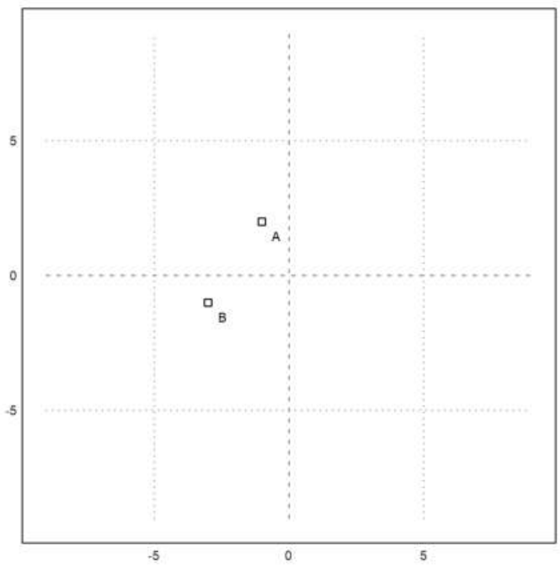
```
>setPlotRange(-9,9,-9,9):
```



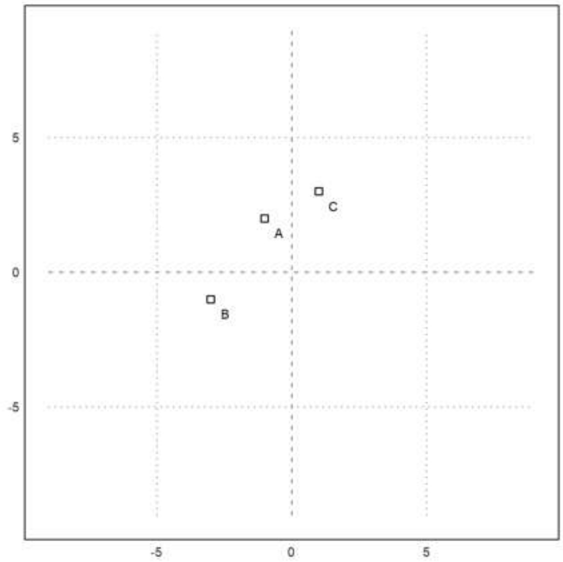

```
>A = [-1,2]; B = [-3,-1]; C = [1,3]; // definisikan titik - titiknya
>plotPoint(A,"A"): // menggambar titik A
```



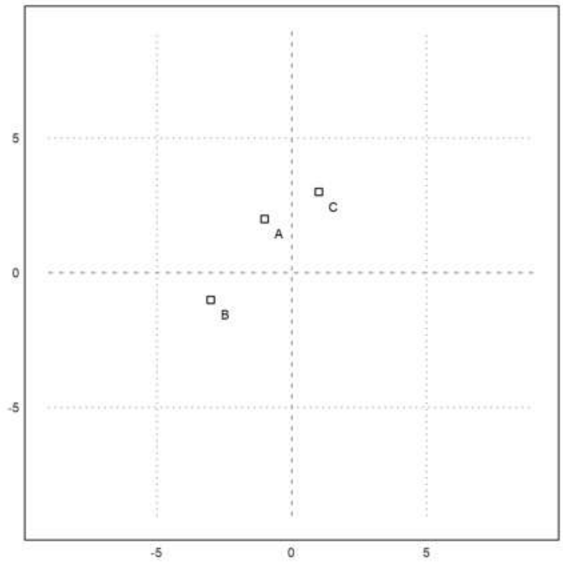

```
>plotPoint(B,"B"): // menggambar titik B
```



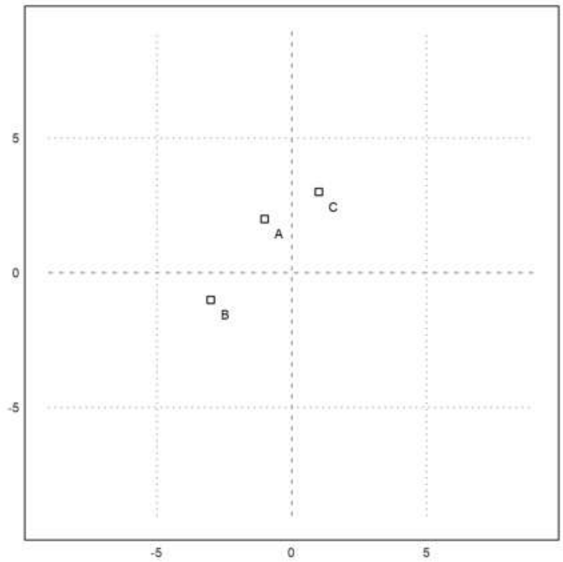

```
>plotPoint(C,"C"): // menggambar titik C
```



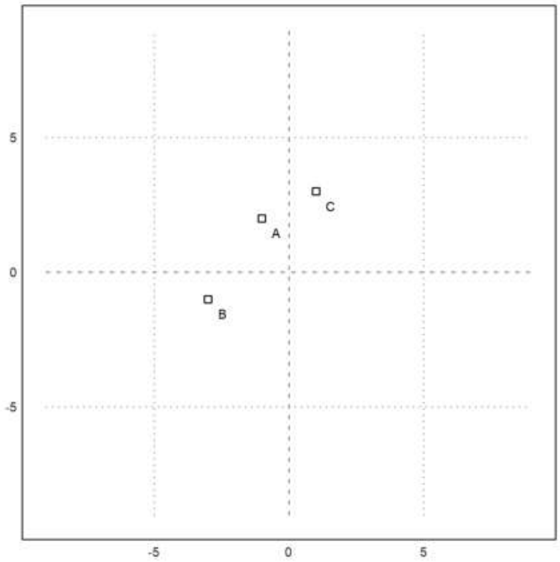

```
>c = circleThrough(A,B,C): // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
```



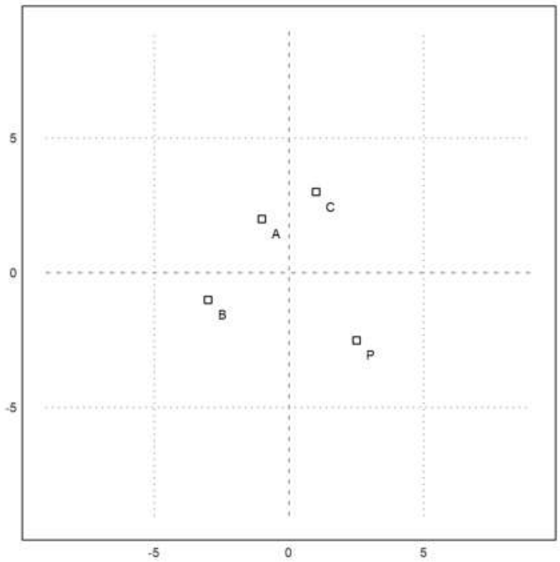

```
>R = getCircleRadius(c): // menentukan jari - jari lingkaran
```



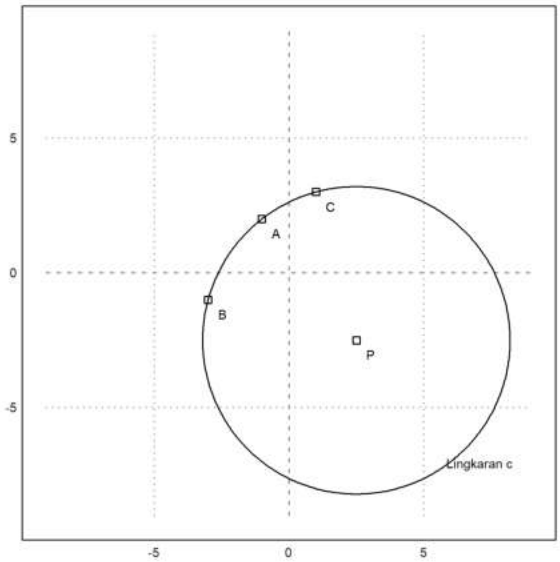

```
>P = getCircleCenter(c): // menentukan titik pusat lingkaran
```




```
>plotPoint(P,"P"): // menggambar titik pusat
```




```
>plotCircle(c,"Lingkaran c"):
```

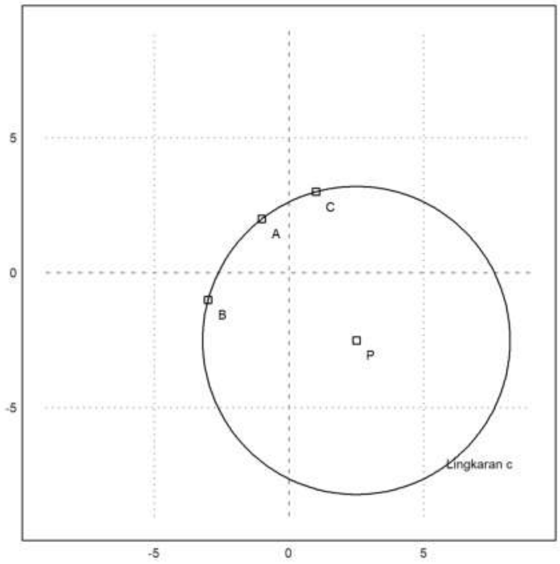


Oleh karena itu titik pusat lingkaran tersebut (c) yaitu (2.5, -2.5) dan berjari - jari 5.7008771255

```
>P, R, c
```

```
[2.5,  -2.5]
5.7008771255
[2.5,  -2.5,  5.70088]
```

```
>circleWithCenter(P,R):
```

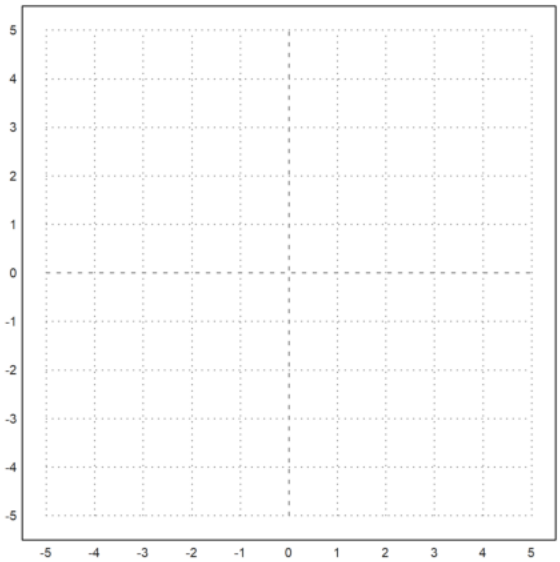



```
>reset
```

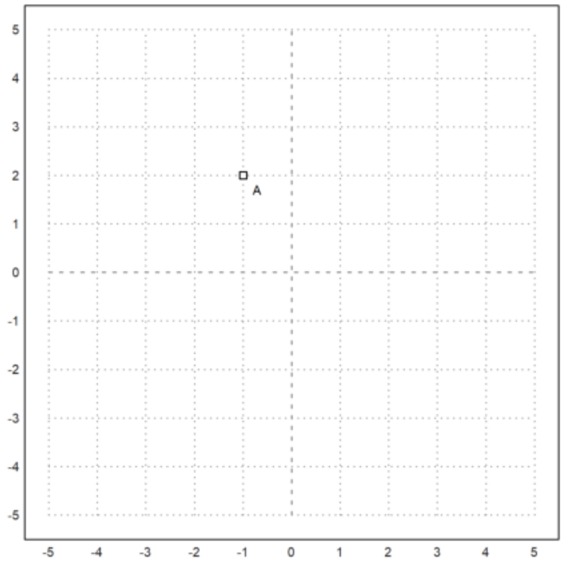
```
0
```

2. Gambarlah lingkaran yang melalui titik A(-1,2), B(-2,-1), C(1,2) dan tentukan titik pusat dan jari - jarinya

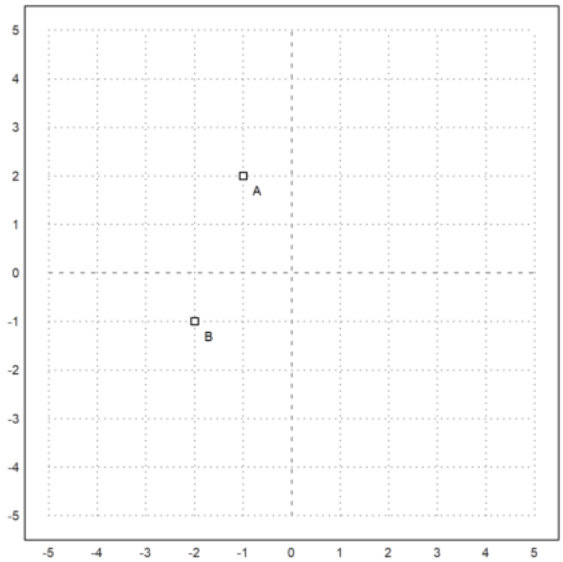
```
>setPlotRange(-5,5,-5,5):
```



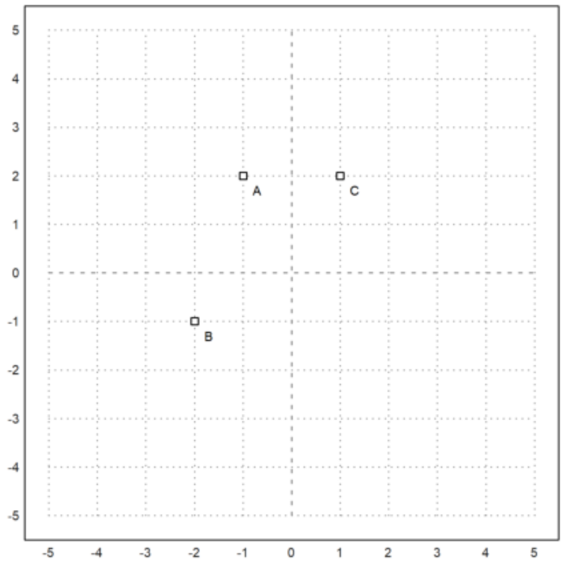

```
>A = [-1,2]; B = [-2,-1]; C = [1,2]; // definisikan titik - titiknya
>plotPoint(A,"A"): // menggambar titik A
```



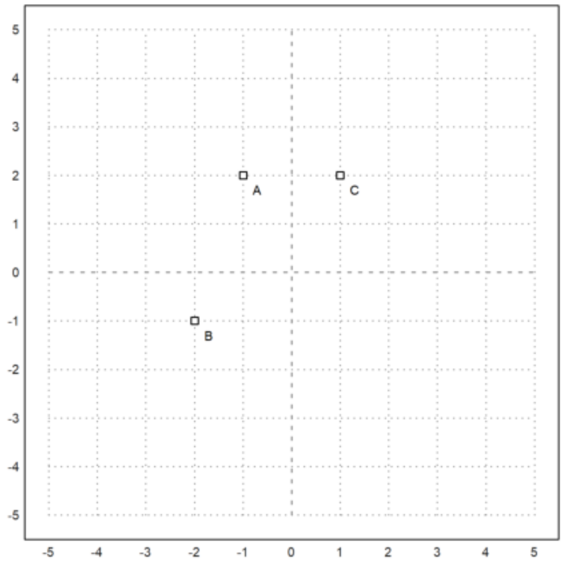

```
>plotPoint(B,"B"): // menggambar titik B
```



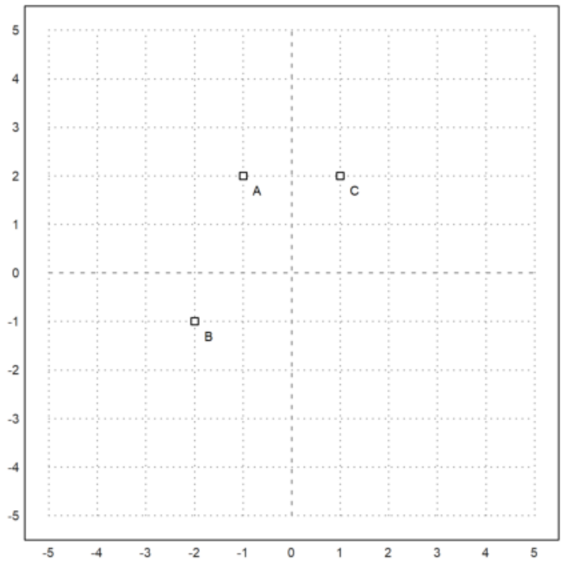

```
>plotPoint(C,"C"): // menggambar titik C
```



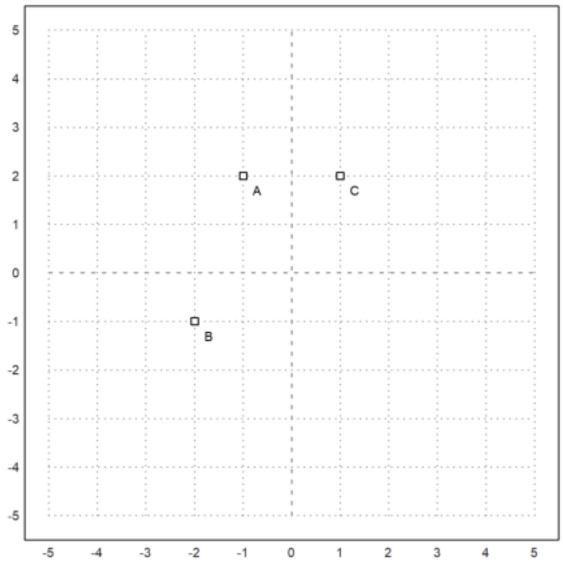

```
>d = circleThrough(A,B,C): // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
```



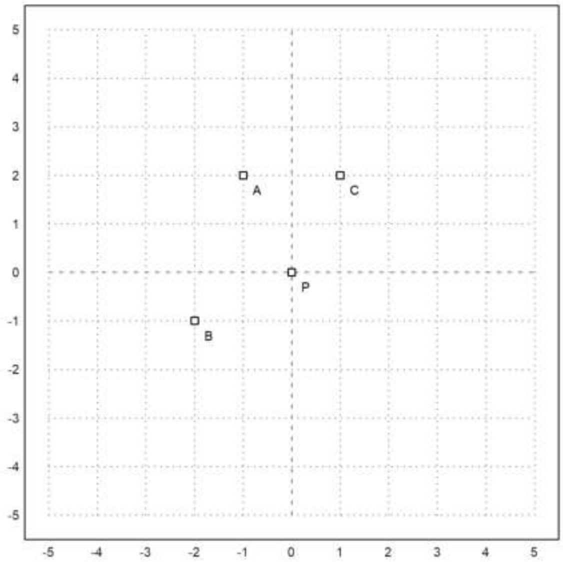

```
>R = getCircleRadius(d): // menentukan jari - jari lingkaran
```



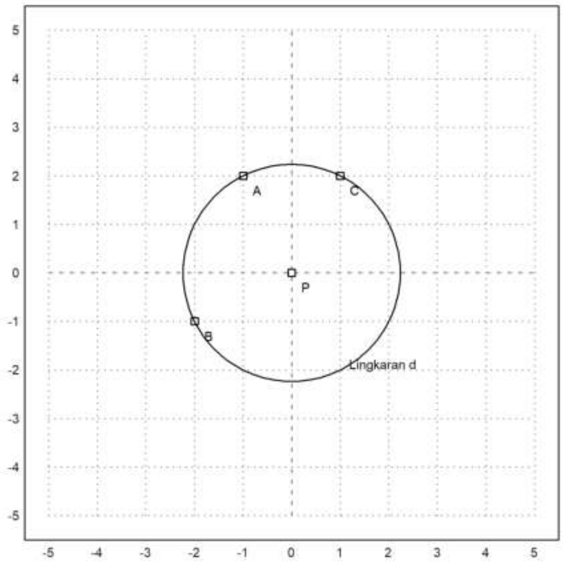

```
>P = getCircleCenter(d): // menentukan titik pusat lingkaran
```




```
>plotPoint(P,"P"): // menggambar titik pusat
```




```
>plotCircle(d,"Lingkaran d"):
```

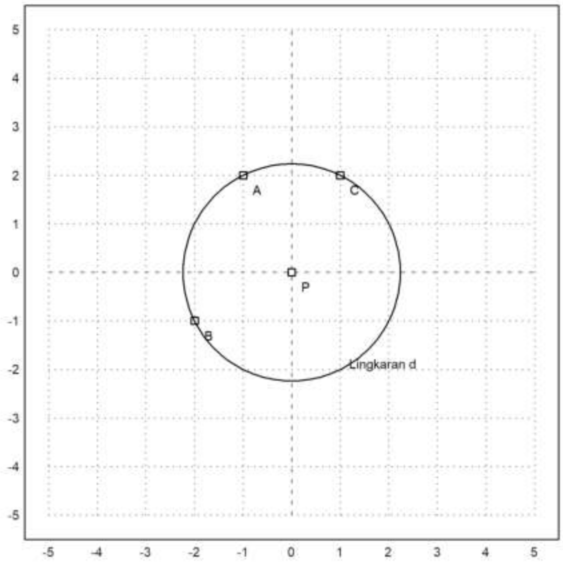


Oleh karena itu titik pusat lingkaran tersebut (d) yaitu (0,0) dan berjari - jari 2.2360679775

```
>P, R, d
```

```
[0,  0]
2.2360679775
[0,  0,  2.23607]
```

```
>circleWithCenter(P,R):
```

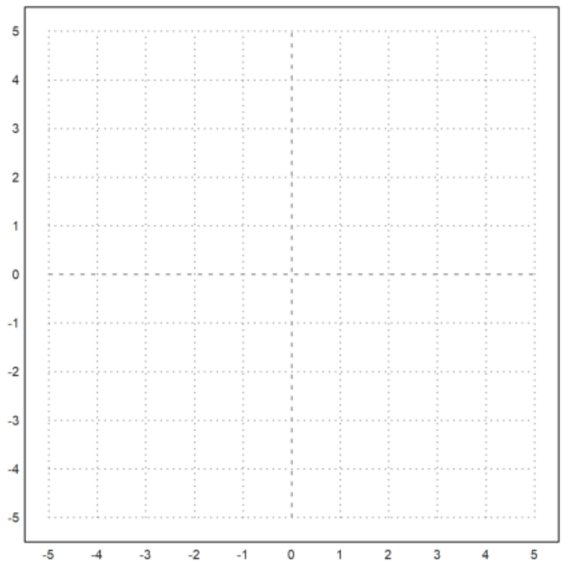



```
>reset
```

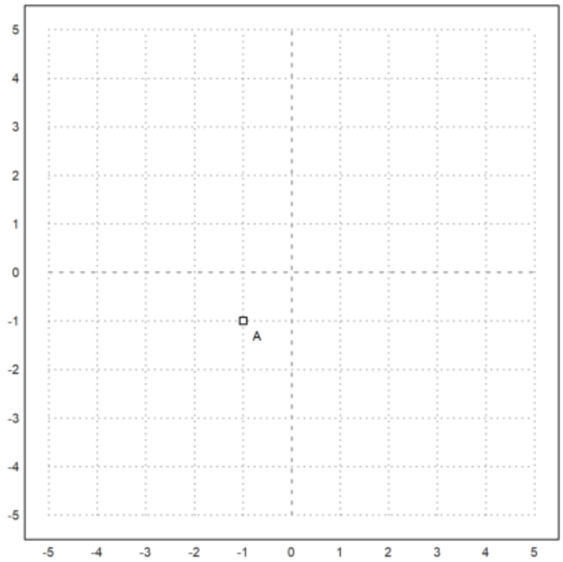
    0

3. Gambarlah lingkaran yang melalui titik A(-1,-1), B(-2,1), C(1,2) dan tentukan titik pusat dan jari - jarinya

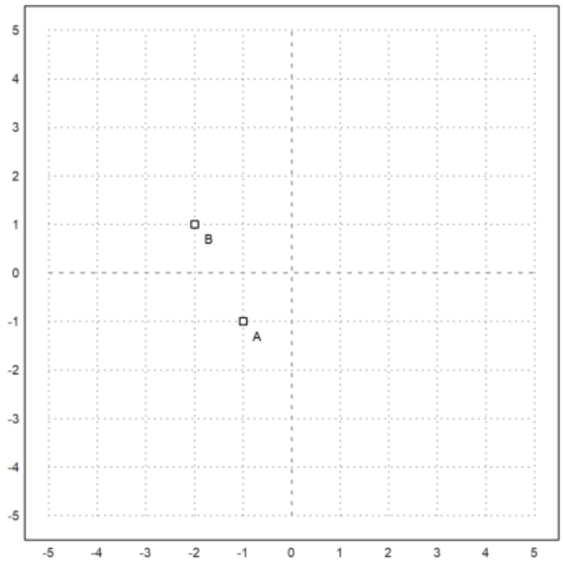
```
>setPlotRange(-5,5,-5,5):
```



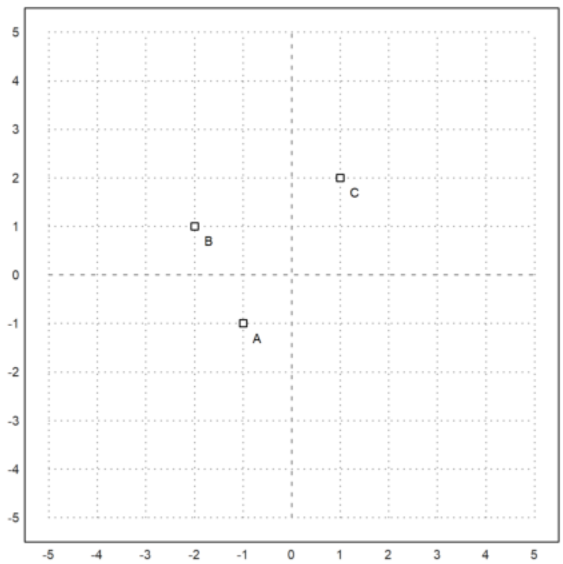
```
>A = [-1,-1]; B = [-2,1]; C = [1,2]; // definisikan titik - titiknya
>plotPoint(A,"A"): // menggambar titik A
```



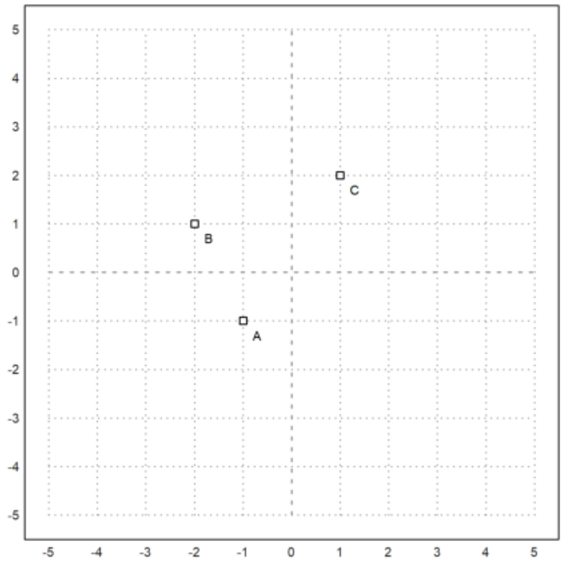

```
>plotPoint(B,"B"): // menggambar titik B
```



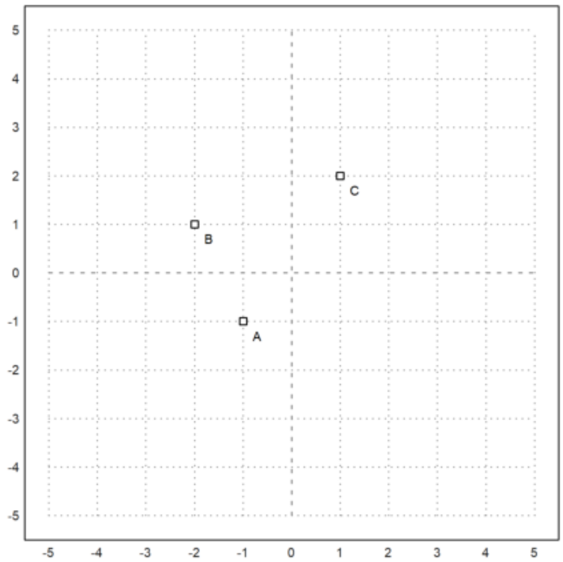

```
>plotPoint(C,"C"): // menggambar titik C
```



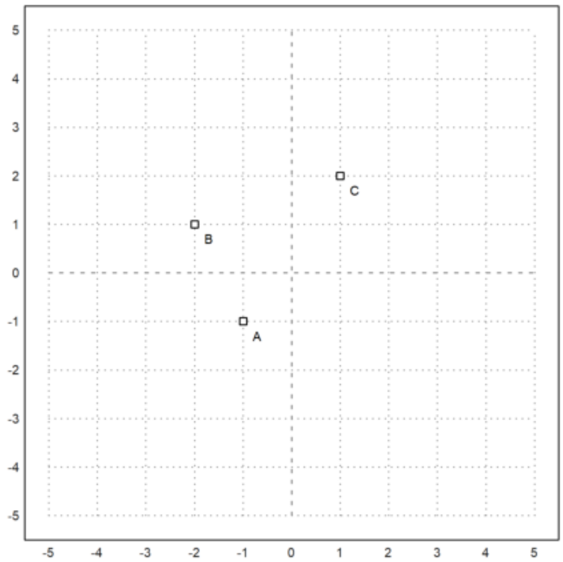

```
>e = circleThrough(A,B,C): // menentukan lingkaran yang melalui tiga titik
```



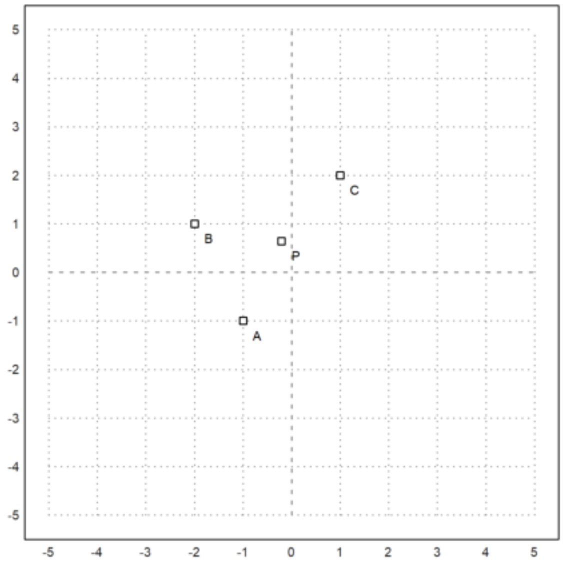

```
>R = getCircleRadius(e); // menentukan jari - jari lingkaran
```



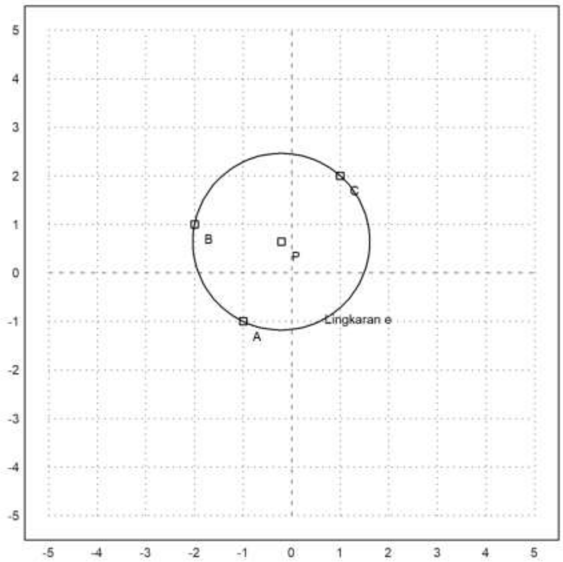

```
>P = getCircleCenter(e); // menentukan titik pusat lingkaran
```




```
>plotPoint(P,"P"); // menggambar titik pusat
```




```
>plotCircle(e,"Lingkaran e"):
```

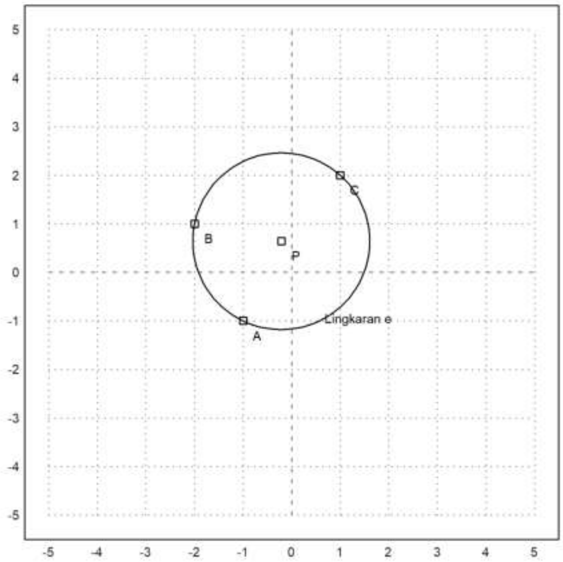


Oleh karena itu titik pusat lingkaran tersebut (e) yaitu (-0.214286, 0.642857) dan berjari - jari 1.82107839771

```
>P, R, e
```

```
[-0.214286,  0.642857]
1.82107839771
[-0.214286,  0.642857,  1.82108]
```

```
>circleWithCenter(P,R):
```




```
>reset
```

    0

Menentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik

Untuk menentukan persamaan lingkaran melalui tiga titik dapat menggunakan cara substitusi ketiga titik tersebut ke persamaan bentuk baku

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Setelah didapati tiga persamaan dari substitusi tersebut, kita dapat mengeliminasi masing - masing persamaan dengan persamaan yang lain, kemudian substitusikan nilai A, B, dan C nya kedalam persamaan bentuk baku.
Untuk lebih jelasnya, lihat contoh dibawah ini:

```
>load geometry
```

    Numerical and symbolic geometry.

contoh soal

1. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik A(-2,-2),B(-2,2),C(2,2)

```
>setPlotRange(4) //mendefinisikan batas bidang koordinat
```

    [-4, 4, -4, 4]

```
>A = [-2,-2]; B = [-2,2]; C = [2,2]; // definisikan titik - titiknya
>&powerdisp:true
```

    true

```
>$p1 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=-2,y=-2] //Titik A
```

$$8-2a-2b+c=0$$

```
>$p2 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=-2,y=2] //Titik B
```

$$8-2a+2b+c=0$$

```
>$p3 := x^2+y^2+a*x+b*y+c=0 with [x=2,y=2] //Titik C
```

$$8+2a+2b+c=0$$

```
>$p2 - p1
```

$$4b=0$$

```
>$p3 - p2
```

$$4a=0$$

```
>nilaic &= 8+2*a+2*b+c=0 with [a=0,b=0]
```

$$8 + c = 0$$

```
Dari perhitungan di atas didapat bahwa nilai a=0, b=0, c= -8
```

```
>$pb := x^2+y^2+A*x+B*y+C=0 with [A=0,B=0,C=-8]
```

$$[-4 - 2\,x + x^2 + 3\,y + y^2, -1 + 3\,x + x^2 - 2\,y + y^2] = 0$$

Jadi persamaan lingkaran yang melalui (-2,-2), (-2,2),(2,2) adalah:

$$x^2 + y^2 - 8 = 0$$

atau

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 8$$

SUBTOPIK 8 ** Menentukan Titik Pusat dan Jari-Jari lingkaran luar dan lingkaran dalam suatu segitiga

Titik pusat lingkaran luar segitiga

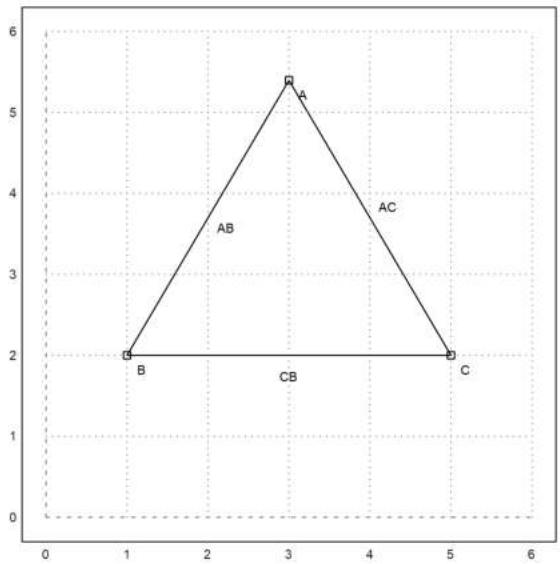
Titik pusat lingkaran luar segitiga, yang juga disebut "pusat lingkaran luar" atau "pusat sirkum," adalah titik tunggal di mana lingkaran luar yang melalui ketiga titik sudut segitiga tersebut bersentuhan. Ini adalah titik pusat lingkaran yang melingkupi seluruh segitiga, dan jaraknya sama dari ketiga sudut segitiga. Pusat lingkaran luar ini memiliki sifat penting dalam geometri segitiga.

Jari-jari lingkaran luar segitiga

Jari-jari lingkaran luar segitiga adalah garis lurus yang ditarik dari pusat lingkaran luar segitiga ke salah satu titik sudut segitiga tersebut. Dengan kata lain, jari-jari ini adalah jarak dari pusat lingkaran ke salah satu sudut segitiga yang sekaligus merupakan panjang garis lurus terpendek dari pusat lingkaran luar ke sisi segitiga yang bersangkutan. Jari-jari lingkaran luar segitiga memiliki peran penting dalam berbagai konsep matematika dan geometri, seperti dalam menghitung keliling segitiga, menggambar lingkaran luar segitiga, dan memahami sifat-sifat segitiga tertentu.

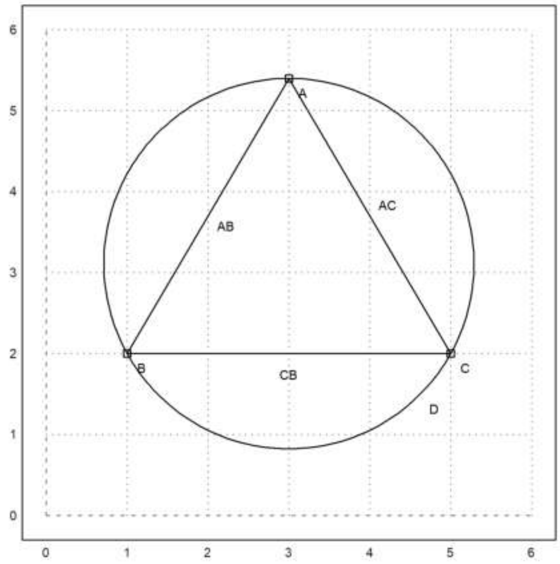
1. Menentukan Titik dan Simbol

```
>setPlotRange(0,6,0,6);
>A=[3,5.4]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,2]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A, B);
>plotSegment(A, C);
>plotSegment(C, B):
```

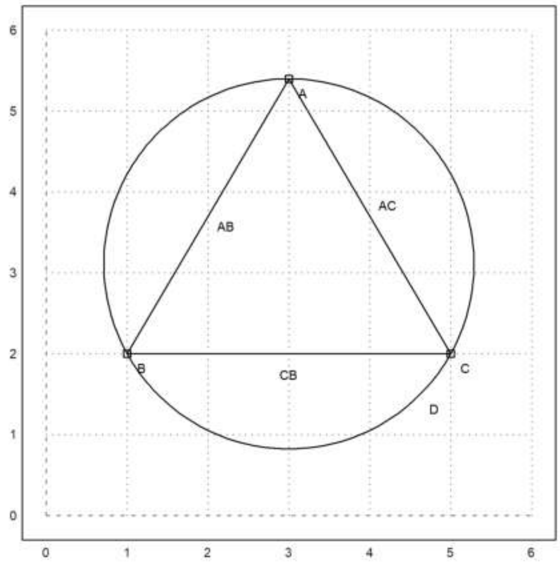


2. Menggambar Lingkaran luar suatu segitiga

```
>D=circleThrough(A,B,C); plotCircle(D,"D"):
```

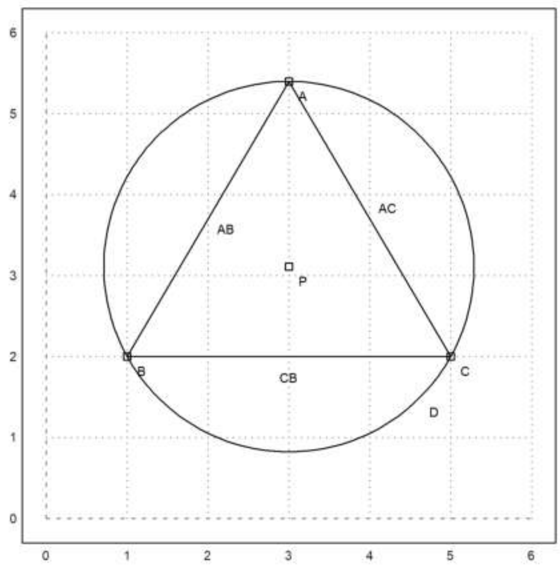



```
>getCircleCenter(D):
```



3. Menggambar titik pusat lingkaran

```
>P=getCircleCenter(D);
>plotPoint (P, "P"):
```



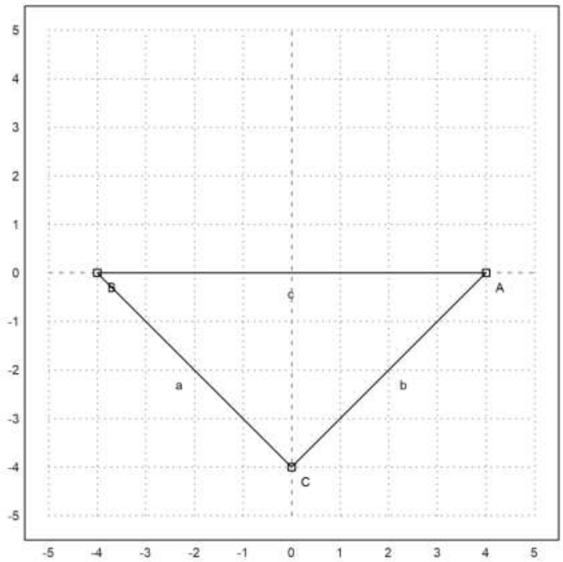

```
>reset
```

0

Latihan Soal

1.Diketahui suatu segitiga dengan koordinat titik sudutnya A(4,0), B(-4,0), C(0,-4) tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran luarnya!

```
>setPlotRange(5);
>A=[4,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[-4,0]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,-4]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(A,C,"b");
>plotSegment(C,B,"a"):
```



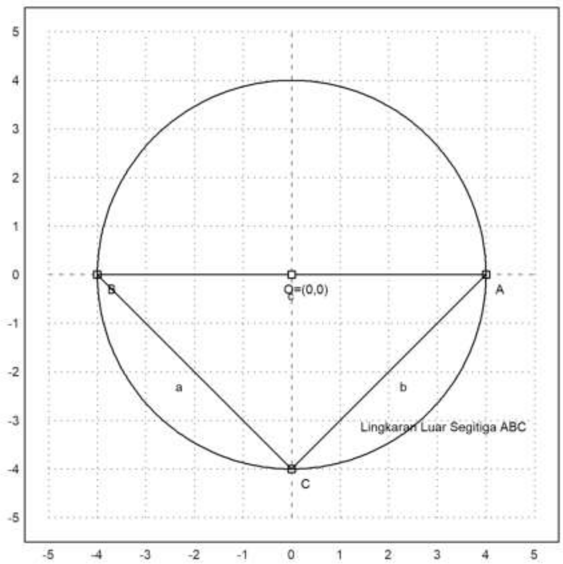

```
>d=circleThrough(A,B,C);
>R=getCircleRadius(d)
```

4

```
>O=getCircleCenter(d)
```

[0, 0]

```
>plotPoint(O,value=1);
>plotCircle(d,"Lingkaran Luar Segitiga ABC"):
```




```
>reset
```

0

Untuk membuktikan kita dapat menggunakan cara berikut

1. Substitusikan A(4,0), B(-4,0), C(0,-4) ke dalam persamaan baku, sehingga didapat 3 persamaan yaitu:

2. Eliminasi persamaan tersebut untuk mencari nilai a,b dan c

substitusikan nilai a=0 dan b=0 ke dalam p1 sehingga :

3. Substitusikan nilai a, b, c ke dalam persamaan baku

sehingga persamaan lingkaran tersebut adalah

atau

jadi diketahui bahwa lingkaran dalam tersebut berpusat pada

dan memiliki jari-jari

lingkaran dalam suatu segitiga

Titik pusat lingkaran dalam segitiga disebut "pusat lingkaran dalam" atau "insentro." Pusat lingkaran dalam adalah titik di dalam segitiga yang memiliki jarak yang sama dari ketiga sisi segitiga. Itu juga merupakan pertemuan dari tiga sudut-bagi segitiga yang menjadikannya titik pusat lingkaran dalam segitiga. Pusat lingkaran dalam ini memiliki banyak sifat geometri yang penting dalam memahami segitiga, seperti membagi sudut-bagi segitiga menjadi dua bagian yang sama panjang.

Jari-jari lingkaran dalam segitiga adalah garis yang ditarik dari pusat lingkaran ke titik-titik pada sisi segitiga yang bersinggungan dengan lingkaran. Ini biasanya digunakan dalam berbagai konteks geometri untuk menghitung panjang atau hubungan antara jari-jari lingkaran dan sisi segitiga. Salah satu hubungan yang penting adalah bahwa jari-jari lingkaran dalam segitiga selalu tegak lurus terhadap sisi segitiga yang bersentuhan dengannya. Dalam konteks trigonometri, hal ini dapat digunakan untuk menghitung sudut dan panjang sisi dalam segitiga.

Latihan

Diketahui suatu segitiga dengan koordinat titik sudutnya D(4,0),E(-4,0),F(0,-4) tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran dalamnya!

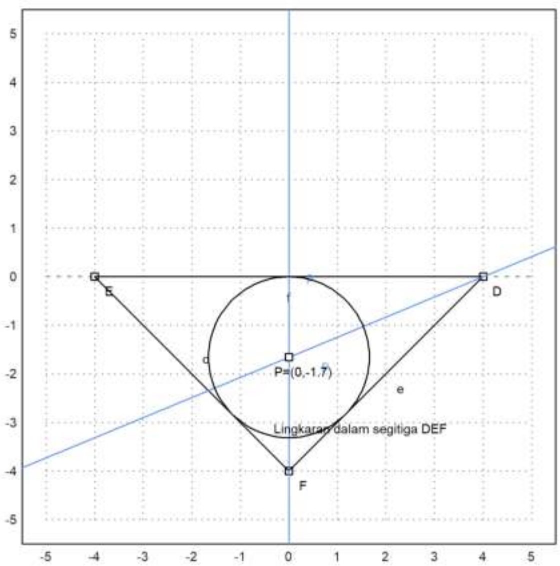
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
>D=[4,0]; plotPoint(D,"D");
>E=[-4,0]; plotPoint(E,"E");
>F=[0,-4]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(D,E,"f");
>plotSegment(E,F,"d");
>plotSegment(D,F,"e");
>l=angleBisector(D,F,E); // garis bagi <DFE
>g=angleBisector(F,D,E); // garis bagi <FDE
>P=lineIntersection(l,g); // titik potong kedua garis bagi sudut
>color(12); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,value=1);
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(D,E))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
1.65685424949
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga DEF"): // gambar lingkaran dalamg=angleBisector(I,
```



```
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0,  -1.65685]
```

```
>reset
```

```
0
```

Menentukan persamaan dan menggambar parabola

Parabola adalah tempat kedudukan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu dan suatu garis tertentu. Selanjutnya, titik tersebut dikenal sebagai titik fokus parabola, sedangkan garis tersebut dikenal sebagai garis arah (direktris).

Akan diilustrasikan gambar dari kurva parabola. Misalkan titik fokus F(p,0), titik puncak O(0,0), garis arah (direktris) yaitu garis g dan kita pilih R (-p,y) pada garis g, kita pilih sembarang titik P(x,y) yang ada pada parabola. Berikut ilustrasi gambar dari kurva parabolanya

Jika P(x,y) adalah sembarang titik pada parabola, maka dari definisi kurva parabola diperoleh hubungan

$$|PF| = |PR|$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p+(0)^2}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 2px + 2px$$

$$y^2 = 4px$$

Persamaan parabola y^2 = 4px dengan titik puncak O (0,0) dengan titik fokus F(p,0) akan mepresentasikan parabola terbuka ke kanan (arah sumbu x positif).

Dengan cara perhitungan yang mirip dengan cara di atas, maka kita akan dapat menentukan representasi dari tiga persamaan parabola lainnya yang menghadap ke arah yang berbeda

```
>
```

Contoh Soal

1. Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (-1,-1), B (2,0), C(1,2) dan gambarkan parabolanya.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Langkah awal adalah dengan menyalakan perintah awal pada materi geometri. Perintah di atas merupakan perintah Euler untuk memplot geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>A &=[-1,-1]; B &=[2,0]; C &=[1,2];
>c &=(lineThrough(A,B)); $c //  melalui garis A dan B
```

$$[-1, 3, -2]$$

```
>$ getLineEquation(c,x,y); $solve(%,y)  // Persamaan garis c,x,y
```

$$\left[y = \frac{-2+x}{3}\right]$$

Rumus umum persamaan garis

$$ax + by + c = 0$$

Mancari gradien garis

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{0-(-1)}{2-(-1)}$$

$$m = \frac{1}{3}$$

Persamaan Garis (Bentuk Slope-Intercept)

$$y = mx + b$$

Gunakan titik A untuk mencari b:

$$y = \frac{1}{3}x + b$$

Substitusi A(-1,-1):

$$-1 = \frac{1}{3}(-1) + b$$

$$-1 = -\frac{1}{3} + b$$

$$b = -1 + \frac{1}{3}(-1)$$

$$b = -\frac{2}{3}$$

Jadi,persamaan garis dalam bentuk slope-intercept adalah:

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

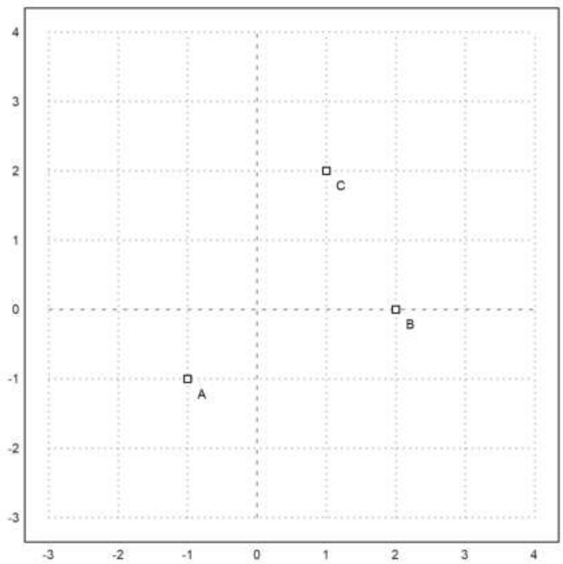
$$-\sqrt{(1-x)^2+(2-y)^2}+\frac{2-x+3\,y}{\sqrt{10}}=0$$

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)

              [y = 26 - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) - 3 x,
                                     y = 26 + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) - 3 x]
```

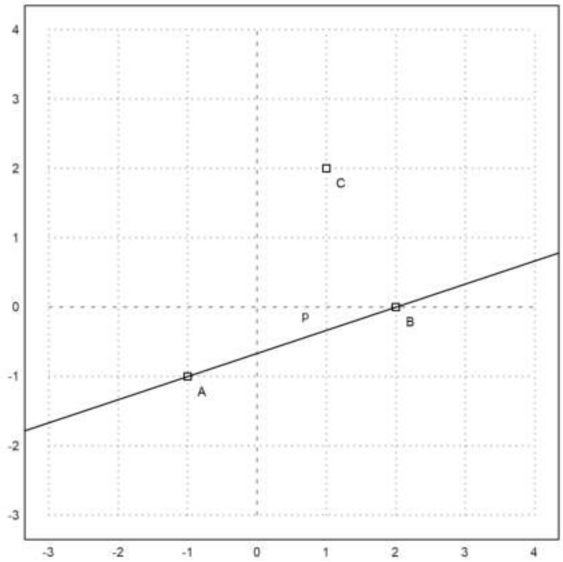
Solusinya adalah:

$$-3x-\sqrt{70}\sqrt{9-2x}+26$$

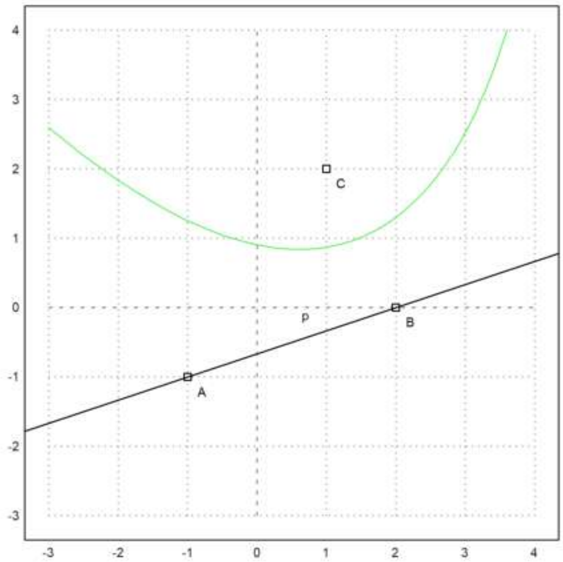
```
>A=[-1,-1]; B=[2,0]; C=[1,2];
>setPlotRange (-3,4,-3,4); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"):
```




```
>plotLine(lineThrough(A,B)):
```




```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=11):
```



Latihan

1. Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,2), B (2,1), C(2,2) dan gambarkan parabolanya.

2. Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,1), B (1,-1), C(3,-2) dan gambarkan parabolanya.

3. Tentukanlan persamaan dari parabola yang melalui 3 titik A (3,3), B (1,-2), C(5,3) dan gambarkan parabolanya.

Jawab:

Soal 1

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>A &=[3,2]; B &=[2,1]; C &=[2,2];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$$[1, -1, 1]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

$$[y = -1 + x]$$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(2-x)^2 + (2-y)^2} - \frac{-1 + x - y}{\sqrt{2}} = 0$$

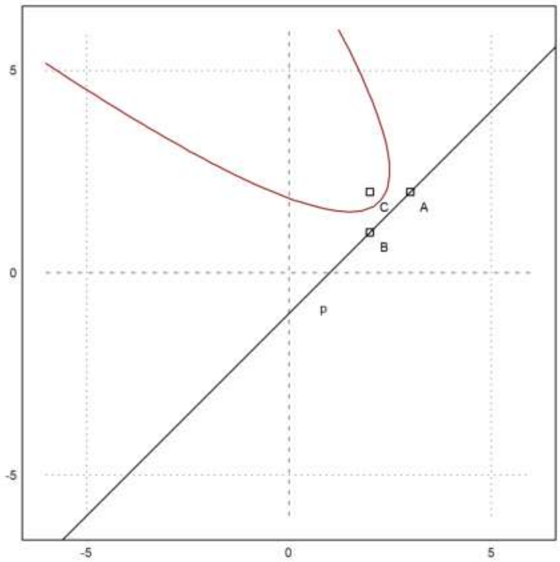
```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
[y = 5 - sqrt(2) sqrt(5 - 2 x) - x,
                              y = 5 + sqrt(2) sqrt(5 - 2 x) - x]
```

Solusinya adalah:

$$y = -x + \sqrt{(2)}\sqrt{(5-2x)} + 5$$

```
>A=[3,2]; B=[2,1]; C=[2,2];
>setPlotRange (6); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=2):
```




```
>reset;
```

Soal 2

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>A &=[3,1]; B &=[1,-1]; C &=[3,-2];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$$[2, -2, 4]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

$$[y = -2 + x]$$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(3-x)^2 + (-2-y)^2} + \frac{-4+2x-2y}{2^{\frac{3}{2}}} = 0$$

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
[y = - 2 - x - sqrt(6) sqrt(- 3 + 2 x),
                         y = - 2 - x + sqrt(6) sqrt(- 3 + 2 x)]
```

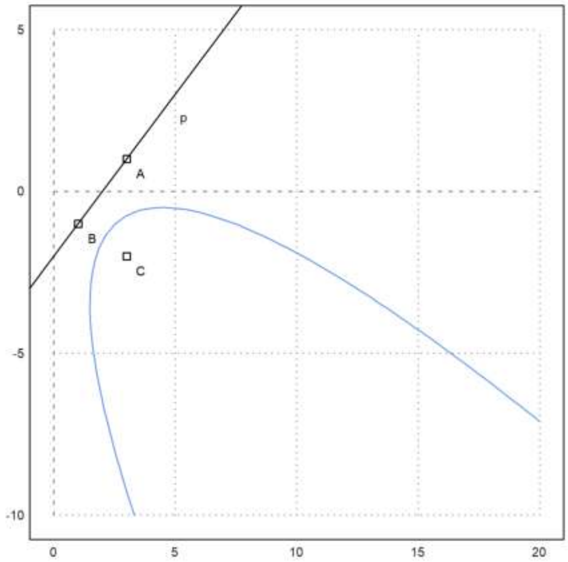
Solusinya adalah:

$$y = \sqrt{6}\sqrt{2x-3} - x - 2$$

```
>A=[3,1]; B=[1,-1]; C=[3,-2]
```

```
[3,  -2]
```

```
>setPlotRange (0,20,-10,5); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C")
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=12):
```



Soal 3

```
>load geometry
```

```
    Numerical and symbolic geometry.
```

```
>A &=[-3,3]; B &=[1,-2]; C &=[5,3];
>r&=(lineThrough(A,B)); $r
```

$$[5, 4, -3]$$

```
>$getLineEquation(r,x,y); $solve(%,y)
```

$$\left[y = \frac{-3-5\,x}{4}\right]$$

```
>p &=getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$-\sqrt{(5-x)^2+(3-y)^2}+\frac{3+5\,x+4\,y}{\sqrt{41}}=0$$

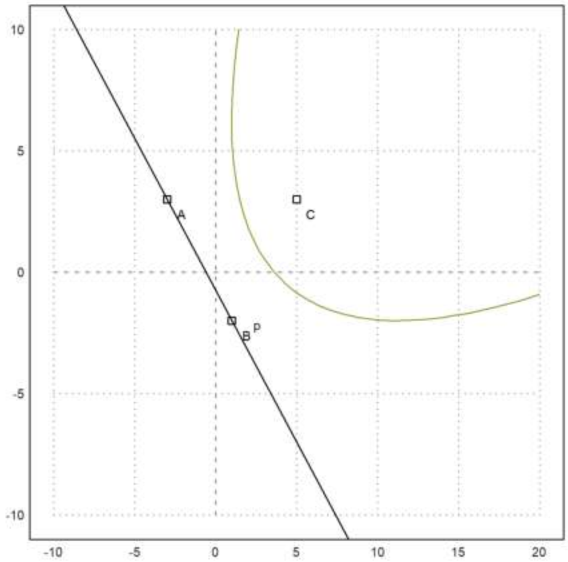
```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
          27 - 4 sqrt(41) sqrt(- 1 + x) + 4 x
    [y = -----------------------------------,
                          5
                              27 + 4 sqrt(41) sqrt(- 1 + x) + 4 x
                          y = -----------------------------------]
                                               5
```

Solusinya adalah:

$$y = \frac{4x+4\sqrt{41}\sqrt{x-1}+27}{5}$$

```
>A=[-3,3]; B=[1,-2]; C=[5,3];
>setPlotRange (-10,20,-10,10); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
>plotLine(lineThrough(A,B));
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```




```
>reset;
```

Menentukan persamaan dan menggambar ellips

* yang diketahui kedua titik fokusnya

Menentukan persamaan ellips yang diketahui kedua titik fokusnya

Ellips adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang memenuhi jumlahan jaraknya ke dua titik tertentu tetap. Pertama kita akan mencari persamaan ellips.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Untuk mencari persamaan ellips, hitung luas segitiga dengan panjang sisi a, b, dan c, pertama meletakkan titik-titik pada (0,0), (a,0), dan (x,y).

$$x^2+y^2=b^2, \quad (x-a)^2+y^2=c$$

untuk x dan y

Pertama, menyelesaikan persamaan di atas terlebih dahulu

```
>Hasil &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

```
[]
```

Lalu menjabarkan hasil y

```
>Hasily &= y with Hasil[2][2]
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
Hasily &= y with Hasil[2][2] ...
                            ^
```

Kita mendapatkan Rumus Heron

```
>function F(a,b,c) &= sqrt(factor((Hasily*a/2)^2))
```

```
a mabs(Hasily)
--------------
      2
```

```
>$solve(diff(F(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [-1,3,-2]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
```

```
$solve(diff(F(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
                                  ^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk suatu konstanta d. Ini sama saja sebuah ellips

```
>p1 &= subst(d-c,b,Hasil[2])
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
p1 &= subst(d-c,b,Hasil[2]) ...
                             ^
```

Sekarang kita buat fungsi ini

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(p1[1])
```

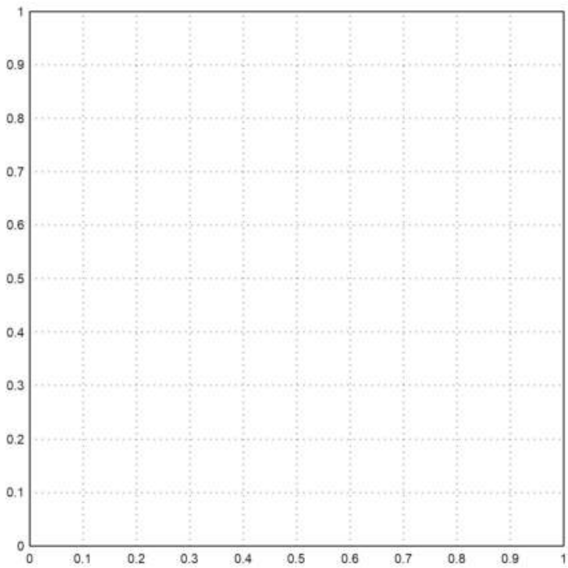
$$0$$

```
>function fy(a,c,d) &= rhs(p1[2])
```

$$0$$

Sekarang kita dapat menggambar himpunan tersebut. Di sini kita akan mendapatkan sebuah ellips

```
>plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```




```
>$((fx(a,c,d)-a/2)^2/a^2+fy(a,c,d)^2/b^2 with [a=d/2,b=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{1}{4}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\frac{1}{4}$$

Sekarang kita bisa membuat persamaan umum untuk ellips ini, yaitu

$$\frac{(x-x_p)^2}{a^2}+\frac{(y-y_p)}{b^2}=1,$$

Di mana (xp, yp) adalah titik pusat, dan a dan b adalah setengah dari sumbu-sumbunya.

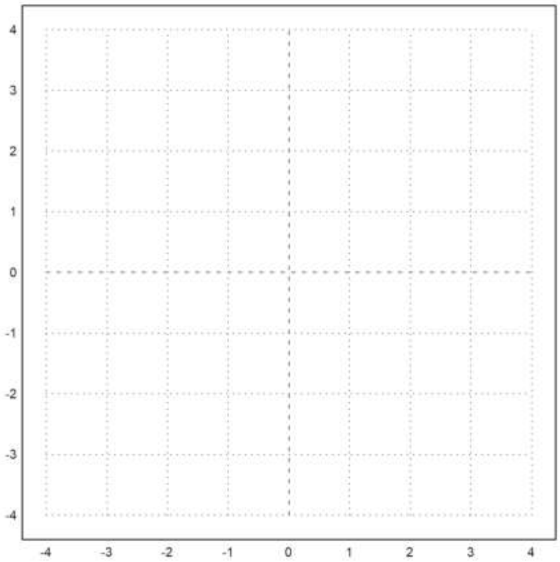
```
>reset();
```

Mencari persamaan ellips dengan cara manual.

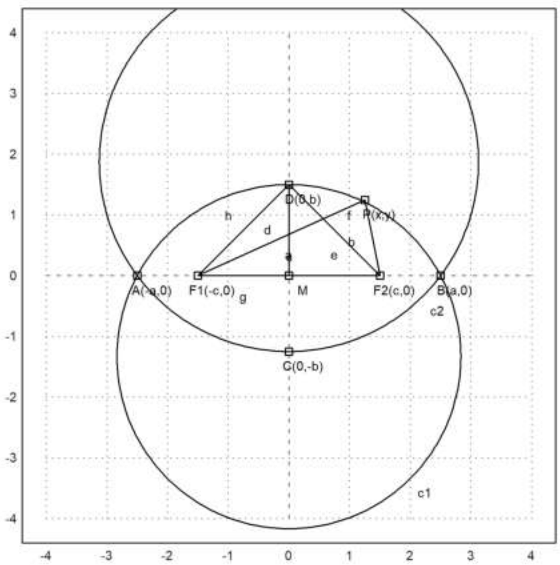
Akan dicari persamaan ellips dengan menggunakan definisi.

Pertama kita gambarkan ellips terlebih dahulu.

```
>setPlotRange(-4,4,-4,4): // mendefinisikan bidang koordinat
```



```
>A=[-1.5,0]; plotPoint(A,"F1(-c,0)"); // definisi dan gambar titik
>B=[1.5,0]; plotPoint(B,"F2(c,0)");
>C=[1.25,1.25]; plotPoint(C,"P(x,y)");
>plotSegment(A,B,"a"); // a=AB
>plotSegment(B,C,"b"); // b=BC
>plotSegment(C,A,"c"); // c=CA
>D=[0,0]; plotPoint(D,"M"); // definisi dan gambar titik
>E=[0,1.5]; plotPoint(E,"D(0,b)");
>plotSegment(D,E,"d"); // d=DE
>plotSegment(D,B,"e"); // e=DB
>plotSegment(E,B,"f"); // f=EB
>plotSegment(D,A,"g"); // g=DA
>plotSegment(A,E,"h"); // h=AE
>F=[-2.5,0]; plotPoint(F,"A(-a,0)"); // definisi dan gambar titik
>G=[2.5,0]; plotPoint(G,"B(a,0)");
>H=[0,-1.25]; plotPoint(H,"C(0,-b)");
>c1=circleThrough(E,F,G); // lingkaran titik EFG
>c2=circleThrough(F,G,H); // lingkaran titik FGH
>plotCircle(c1); plotCircle(c2): // plot lingkaran c1 dan c2
```



Misal kedua titik tetap tersebut F1(-c,0) dan F2(c,0) dan jumlah jarak yang tetap tersebut 2a. Maka untuk sembarang titik P(x,y) pada tepat kedudukan memenuhi:

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = (\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + ((x-c)^2 + y^2) = (x+c)^2 + y^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx = 2cx$$

$$4a^2-4cx=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

$$(a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(a^2-cx)^2$$

$$a^2((x-c)^2+y^2)=a^4-2ca^2x+c^2x^2$$

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2ca^2x+c^2x^2$$

$$a^2x^2-2ca^2x+c^2a^2+a^2y^2=a^4-2ca^2x+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-c^2a^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Dengan memisalkan

$$b^2=a^2-c^2$$

Diperoleh:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Menggambar ellips yang diketahui kedua titik fokusnya

Untuk menggambar ellips dengan mudah, langkah pertama yaitu dengan menggunakan "load(draw)"

```
>$load(draw):
```

"Draw" adalah sistem antarmuka dari Maxima-Gnuplot.

Ada tiga fungsi utama yang digunakan pada tingkat Maxima, yaitu: "draw2d", "draw3d", dan "draw".

Perintah "ellipse (<xp>, <yp>, <a>, <b>, <ang1>, <ang2>)" menggambar sebuah elips yang berpusat di "[<xp>, <yp>]" dengan sumbu semi horizontal dan vertikal sebesar <a> dan <b>, berturut-turut, dimulai dari sudut <ang1> sejauh sudut <ang2>.

Contoh Soal

1. Sebuah elips memiliki fokus di (-1, 0) dan (7, 0) serta melalui titik (0, 12/5). Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Penyelesaian

Titik Fokus
F_1 = (-c, 0) = (-1, 0)
F_2 = (c, 0) = (7, 0)

Melalui titik (0, 12/5)

Langkah-langkah:
1. Menentukan jarak d1 dan d2

$$d_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$d_1=\sqrt{(0+(-1))^2+(\frac{12}{5}-0)^2}$$

$$d_1=\sqrt{1+\frac{144}{25}}$$

$$d_1=\sqrt{\frac{169}{25}}$$

$$d_1=\frac{13}{5}$$

$$d_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$d_2=\sqrt{(0-7)^2+(\frac{12}{5}-0)^2}$$

$$d_2=\sqrt{49+\frac{144}{25}}$$

$$d_2=\sqrt{\frac{1369}{25}}$$

$$d_2=\frac{37}{5}$$

2. Menentukan nilai a,b, dan c

$$2a=d_1+d_2$$

$$2a = \frac{13}{5} + \frac{37}{5}$$

$$2a = \frac{50}{5}$$

$$a = 5$$

$$c = \frac{d(F_1, F_2)}{2}$$

$$c = \frac{7 - (-1)}{2}$$

$$c = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 5^2 - 4^2$$

$$b^2 = 9$$

$$b = 3$$

3. Menentukan titik pusat ellips xp dan yp

$$x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_p = \frac{-1 + 7}{2}$$

$$x_p = 3$$

$$y_p = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_p = \frac{0 + 0}{2}$$

$$y_p = 0$$

4. Menentukan persamaan ellips

$$\frac{(x - x_p)^2}{a^2} + \frac{(y - y_p)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - 3)^2}{5^2} + \frac{(y - 0)^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

```
>$load(draw):
```

$$d_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

```
>d1 &= sqrt((0+(-1))^2+(12/5)^2) // d1 = jarak F1 ke titik (0,12/5)

                                  13
                                  --
                                  5
```

$$d_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

```
>d2 &= sqrt((0-7)^2+(12/5)^2) // d2 = jarak F2 ke titik (0,12/5)

                                  37
                                  --
                                  5
```

Diketahui

$$d_1 + d_2 = 2a$$

sesuai definisi elips sehingga diperoleh

```
>a &= (d1+d2)/2 // menentukan nilai a

                                  5

>xp &= (-1+7)/2 // titik pusat ellips xp

                                  3

>yp &= (0-0)/2 // titik pusat ellips yp
```

0

Titik pusat ellips (xp, yp) = (3, 0)

```
>c &= (7-(-1))/2 // jarak fokus ke pusat
```

4

```
>b &= sqrt(a^2-c^2) // menentukan nilai b
```

3

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{(-3+x)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Selanjutnya, kita akan menggambar ellips menggunakan fungsi "draw2d"

```
>$draw2d(ellipse(3, 0, 5, 4, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset();
```

2. Sebuah elips memiliki fokus di (-10, 0) dan (10, 0) serta panjang sumbu mayor 24. Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Penyelesaian

Titik Fokus
F1 = (-c, 0) = (-10, 0)
F2 = (c, 0) = (10, 0)

Panjang sumbu mayor = 24

Langkah-langkah:
1. Menentukan nilai a,b, dan c

$$2a = panjangsumbumayor$$

$$2a = 24$$

$$a = 12$$

$$c = \frac{d(F_1, F_2)}{2}$$

$$c = \frac{10-(-10)}{2}$$

$$c = 10$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 12^2 - 10^2$$

$$b^2 = 44$$

$$b = 2\sqrt{11}$$

2. Menentukan titik pusat ellips xp dan yp

$$x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_p = \frac{-10+10}{2}$$

$$x_p = 0$$

$$y_p = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_p = \frac{0+0}{2}$$

$$y_p = 0$$

3. Menentukan persamaan ellips

$$\frac{(x-x_p)^2}{a^2}+\frac{(y-y_p)}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-0)^2}{12^2}+\frac{(y-0)^2}{(2\sqrt{11})^2}=1$$

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{44}=1$$

```
>$load(draw):
>a &= 24/2 // panjang sumbu mayor = 2a
```

12

```
>c &= (10-(-10))/2 // jarak fokus ke pusat
```

10

Sehingga

```
>b &= sqrt(a^2-c^2)
```

2 sqrt(11)

```
>xp &= (-10+10)/2 // titik pusat ellips xp
```

0

```
>yp &= (0+0)/2 // titik pusat ellips yp
```

0

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{44}=1$$

```
>$draw2d(ellipse(0, 0, 12, (2*(sqrt(11)))/2, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset();
```

Latihan Soal

---

1. Sebuah elips memiliki fokus di (-3, 0) dan (10, 0) serta melalui titik (0, 9/4). Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

2. Sebuah elips memiliki fokus di (-8, 0) dan (6, 0) serta panjang sumbu mayor 20. Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

3. Sebuah elips memiliki fokus di (-7, 0) dan (7, 0) serta melalui titik (3, 3). Tentukan persamaan elips tersebut dan gambarkan.

Jawab:

Soal 1

Titik Fokus
F1 = (-c, 0) = (-3, 0)
F2 = (c, 0) = (10, 0)

Melalui titik (0, 9/4)

```
>$load(draw):
```

$$d_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

```
>d1 &= sqrt((0+(-3))^2+(9/4)^2) // d1 = jarak F1 ke titik (0,9/4)
```

```
15
--
4
```

$$d_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

```
>d2 &= sqrt((0-10)^2+(9/4)^2) // d2 = jarak F2 ke titik (0,9/4)
```

```
41
--
4
```

Diketahui

$$d_1+d_2=2a$$

sesuai definisi elips sehingga diperoleh

```
>a &= (d1+d2)/2 // menentukan nilai a
```

```
                                    7
```

```
>xp &= (-3+10)/2 // titik pusat ellips xp
```

```
                                    7
                                    -
                                    2
```

```
>yp &= (0-0)/2 // titik pusat ellips yp
```

```
                                    0
```

Titik pusat ellips (xp, yp) = (7/2, 0)

```
>c &= (-3+10)/2 // jarak fokus ke pusat
```

```
                                    7
                                    -
                                    2
```

```
>b &= sqrt(a^2-c^2) // menentukan nilai b
```

```
                                7 sqrt(3)
                                ---------
                                    2
```

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{\left(-\frac{7}{2}+x\right)^2}{49}+\frac{4\,y^2}{147}=1$$

Selanjutnya, kita akan menggambar ellips menggunakan fungsi "draw2d"

```
>$draw2d(ellipse(7/2, 0, 7, (7*(sqrt(3)))/2, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset();
```

Soal 2

Titik Fokus
F1 = (-c, 0) = (-8, 0)
F2 = (c, 0) = (6, 0)

Panjang sumbu mayor = 20

```
>$load(draw):
>a &= 20/2 // panjang sumbu mayor = 2a c &= (6-(-8))/2 // jarak fokus ke pusat
```

```
                                    10
```

```
>c &= (6-(-8))/2 // jarak fokus ke pusat
```

```
                                    7
```

Sehingga

```
>b &= sqrt(a^2-c^2)
```

```
                                 sqrt(51)
```

```
>xp &= (-8+6)/2 // titik pusat ellips xp
```

```
                                   - 1
```

```
>yp &= (0+0)/2 // titik pusat ellips yp
```

```
                                    0
```

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{(1+x)^2}{100}+\frac{y^2}{51}=1$$

```
>$draw2d(ellipse(-1, 0, 10, sqrt(51), 360, -360)): // menggambar ellips
>reset();
```

Soal 3

Titik Fokus
F1 = (-c, 0) = (-7, 0)
F2 = (c, 0) = (7, 0)

Melalui titik (3, 3)

```
>$load(draw):
```

$$d_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

```
>d1 &= sqrt((3+(-7))^2+(3)^2) // d1 = jarak F1 ke titik (3,3)
```

```
5
```

$$d_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

```
>d2 &= sqrt((3-7)^2+(3)^2) // d2 = jarak F2 ke titik (3,3)
```

```
5
```

Diketahui

$$d_1+d_2=2a$$

sesuai definisi elips sehingga diperoleh

```
>a &= (d1+d2)/2 // menentukan nilai a
```

```
5
```

```
>xp &= (-7+7)/2 // titik pusat ellips xp
```

```
0
```

```
>yp &= (0-0)/2 // titik pusat ellips yp
```

```
0
```

Titik pusat ellips (xp, yp) = (0, 0)

```
>c &= (-7+7)/2 // jarak fokus ke pusat
```

```
0
```

```
>b &= sqrt(a^2-c^2) // menentukan nilai b
```

```
5
```

```
>$(x-xp)^2/a^2+(y-yp)^2/b^2=1 // persamaan ellips
```

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}=1$$

```
>$draw2d(ellipse(0, 0, 5, 5, 360, -360)): // menggambar ellips
>reset();
```

Untuk membuktikan kita dapat menggunakan cara berikut

1. Menghitung panjang ruas garis

$$DE=\sqrt{(-4-4)^2+(0-0)^2}=8...a$$

$$EF=\sqrt{(-4-0)^2+(0-(-4))^2}=4\sqrt{2}...b$$

$$DF = \sqrt{(0-4)^2 + (-4-0)^2} = 4\sqrt{2}...c$$

2. Mencari nilai s

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$s = \frac{8+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} = 4+4\sqrt{2}$$

3. Mencari Luas segitiga

$$L = \frac{DF.EF}{2}$$

$$L = \frac{4\sqrt{2}.4\sqrt{2}}{2} = 16$$

4. Jari-jari dalam

$$\frac{L}{s} = \frac{16}{4+4\sqrt{2}} = 1.65685424949238$$

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Jarak dua titik

Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis yang menghubungkan kedua titik tersebut.
Jika diketahui dua titik pada koordinat kartesius, misal A(x1,y1) dan B(x2,y2), maka jarak antara titik A dan B adalah

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

sebagai contoh digambar suatu bidang koordinat

```
>setPlotRange(-1,5,-1,5);
```

kemudian tentukan dua titik yang akan dihitung jaraknya

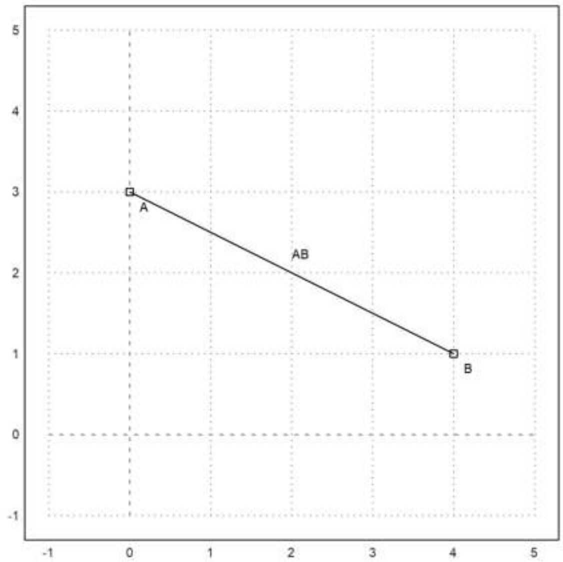
```
>A=[0,3]; plotPoint(A,"A");
>B=[4,1]; plotPoint(B,"B");
```

hitung jarak antara titik A dan titik B

```
>distance(A, B)
```

```
4.472135955
```

```
>plotSegment(A,B):
```



Menghitung jarak antara titik A(0,3) dan titik B(4,1)

$$\text{Diketahui titik } A(0,3) \text{ dan } B(4,1).$$

$$\text{Rumus jarak antara dua titik } A(x_1,y_1) \text{ dan } B(x_2,y_2) \text{ adalah:}$$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

$$\text{Substitusi nilai titik } A \text{ dan } B:$$

$$d = \sqrt{(4-0)^2 + (1-3)^2}$$

$$d = \sqrt{4^2 + (-2)^2}$$

$$d = \sqrt{16+4}$$

$$d = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Jadi, jarak antara titik $A(0,3)$ dan $B(4,1)$ adalah:

$$d = 2\sqrt{5} \approx 4.472$$

Latihan

1. Diketahui dua buah titik P(4,6) dan Q(1,2). Tentukanlah panjang garis PQ.

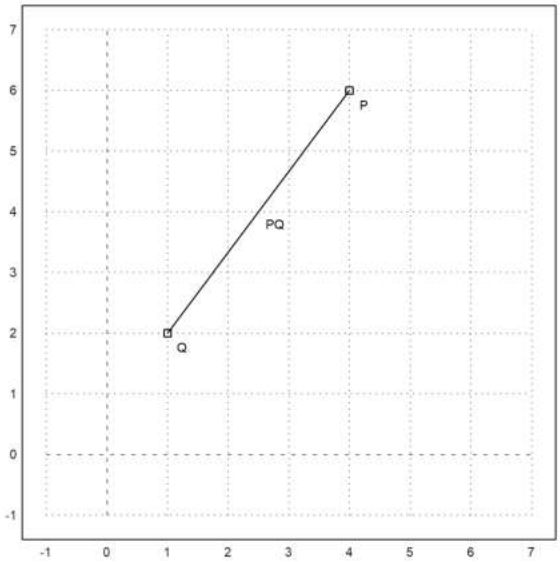
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>P=[4,6]; plotPoint(P,"P");
>Q=[1,2]; plotPoint(Q,"Q");
>distance(P, Q)
```

```
5
```

```
>plotSegment(P,Q):
```



Menghitung jarak antara titik P(4,6) dan Q(1,2)

Diketahui titik $P(4,6)$ dan $Q(1,2)$.

Rumus jarak antara dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Substitusi nilai titik P dan Q :

$$d = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2}$$

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{9+16}$$

$$d = \sqrt{25} = 5$$

Jadi, jarak antara titik $P(4,6)$ dan $Q(1,2)$ adalah:

$$d = 5$$

2. Diketahui dua buah titik R(5,2) dan S(0,4). Tentukanlah panjang garis RS.

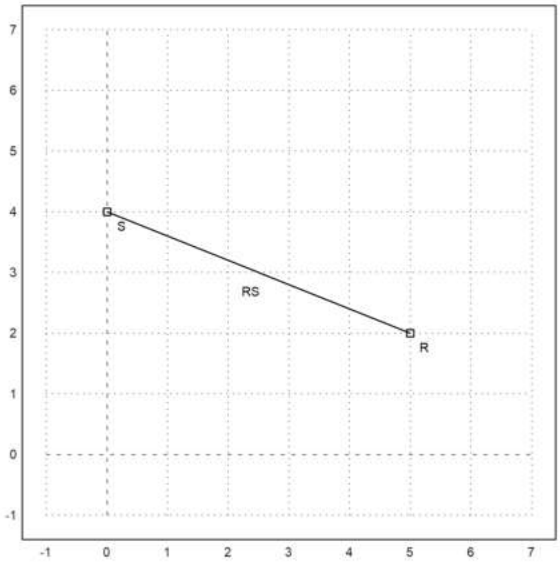
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>R=[5,2]; plotPoint(R,"R");
>S=[0,4]; plotPoint(S,"S");
>distance(R, S)
```

```
5.38516480713
```

```
>plotSegment(R,S):
```



Menghitung panjang RS

$$\text{Diketahui titik } R(5,2) \text{ dan } S(0,4).$$

$$\text{Rumus jarak antara dua titik } R(x_1,y_1) \text{ dan } S(x_2,y_2) \text{ adalah:}$$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\text{Substitusi nilai titik } R \text{ dan } S:$$

$$d = \sqrt{(0-5)^2+(4-2)^2}$$

$$d = \sqrt{(-5)^2+2^2}$$

$$d = \sqrt{25+4}$$

$$d = \sqrt{29}$$

$$\approx 5.385$$

$$\text{Jadi, jarak antara titik } R(5,2) \text{ dan } S(0,4) \text{ adalah:}$$

$$d = \sqrt{29} \approx 5.385$$

Luas dan Keliling Segitiga

```
Terdapat cukup banyak bangun datar yang bisa dihitung luasnya namun
```

pada kesempatan kali ini kita akan mempelajari luas dari bangun datar sedderhana yaitu segitiga. Segitiga dipilih menjadi topik kali ini bukan tanpa alasan namun karena bangun datar dengan sisi-n teratur paling tidak terbentuk dari segitiga sama sisi.
Selanjutnya sebelum kita ke rumus dari kedua bangun datar tersebut kita akan mencari tahu dulu apa itu luas. Luas adalah sebuah ukuran yang digunakan untuk mengukur seberapa besar atau seberapa banyak ruang atau wilayah yang ditempati oleh suatu objek atau bentuk dalam ruang dua atau tiga dimensi dan kali ini akan berfokus pada ruang dua dimensi terlebih dahulu. Maka dari itu ketika disediakan sebuah persegi atau segiempat kita bisa mengukur luasnya dengan:

Segitiga memiliki beberapa jenis, ada segitiga siku-siku, segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, dan segitiga sembarang.
Untuk menghitung luas dari segitiga siku-siku, segitiga sama sisi dan segitiga sama kaki menggunakan rumus :

$$L_{\triangle} = \frac{1}{2} alas.tinggi$$

Sedangkan untuk mencari luas dari segitiga sembarang dapat menggunakan rumus :

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = \frac{(a+b+c)}{2}$$

Sebagai contoh digambar sebuah segitiga sembarang.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
```

dipilih tiga titik sembarang.

```
>A=[4,6]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,2]; plotPoint(B,"B");
>C=[5,2]; plotPoint(C,"C");
```

kemudian menentukan tiga segmen garis.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

menentukan masing-masing panjang dari a, b, dan c.

```
>distance (B, C)
```

```
4
```

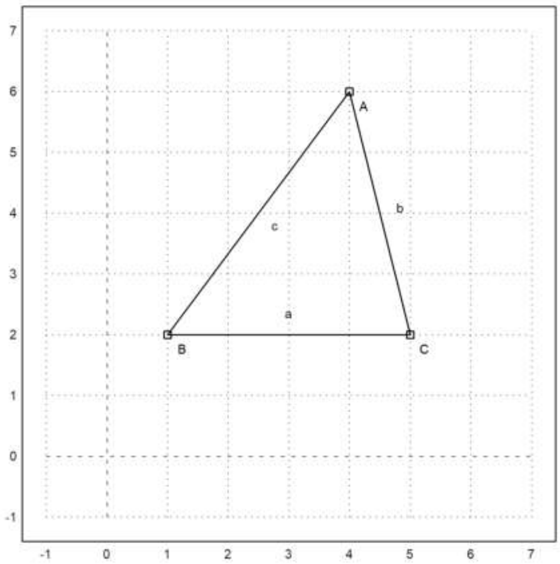
```
>distance (A, C)
```

```
4.12310562562
```

```
>distance (A, B)
```

```
5
```

```
>areaTriangle(A,B,C):
```




```
>areaTriangle(A,B,C)
```

```
8
```

Menghitung luas segitiga ABC

Diketahui titik-titik: A(4,6), B(1,2), C(5,2)

Langkah 1: Hitung panjang setiap sisi.

$$a = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

$$b = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \sqrt{(5-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Langkah 2: Hitung setengah keliling s.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+\sqrt{17}+5}{2} = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

Langkah 3: Hitung luas segitiga

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$L = \sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2} - 4\right)\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2} - \sqrt{17}\right)\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2} - 5\right)}$$

Hasil akhir:

$$L \approx 8$$

Keliling segitiga ABC

```
>K := 4+4.12310562562+5
```

```
13.1231056256
```

Menghitung keliling segitiga ABC

Diketahui panjang sisi-sisi segitiga sebagai berikut:

$$a = 4, \quad b = \sqrt{17}, \quad c = 5$$

Rumus keliling segitiga (K segitiga ABC) adalah:

$$K = a + b + c$$

Substitusi nilai-nilai tersebut:

$$K = 4 + \sqrt{17} + 5$$

$$K \approx 4 + 4.123 + 5 = 13.123$$

Jadi, keliling segitiga ABC adalah:

$$K \approx 13.123$$

Segitiga Siku-Siku

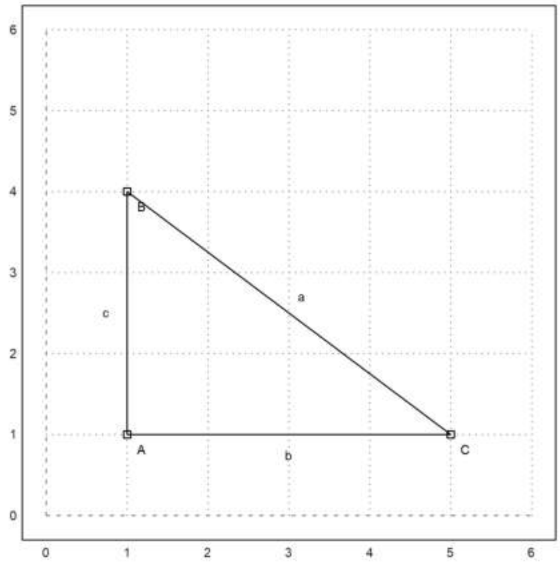
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(0,6,0,6) // mendefinisikan bidang koordinat
```

```
[0,  6,  0,  6]
```

```
>A=[1,1]; plotPoint (A,"A");
>B=[1,4]; plotPoint (B,"B");
>C=[5,1]; plotPoint (C,"C");
>plotSegment (A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment (B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment (C,A,"b"): // b=CD
```




```
>distance (A, C)
```

```
4
```

```
>distance (A, B)
```

```
3
```

```
>distance (C, B)
```

```
5
```

```
>Luas:=(distance (A, C)*distance (A, B))/2
```

6

```
>areaTriangle (A,B,C)
```

6

Menghitung luas segitiga ABC

Diketahui titik-titik: A(1,1), B(1,4), C(5,1)

Karena segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku, kita dapat menghitung luasnya menggunakan rumus:

Tentukan panjang alas dan tinggi:

Hitung luas segitiga ABC:

Keliling segitiga ABC

```
>K := 4+3+5
```

12

Menghitung kelilingn segitiga ABC (K ABC)

Diketahui titik-titik:
(1,1), B(1,4), C(5,1)

Langkah 1: Hitung panjang setiap sisi.

$$AB = |y_2 - y_1| = |4 - 1| = 3$$

$$AC = |x_3 - x_1| = |5 - 1| = 4$$

$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Langkah 2: Hitung keliling segitiga (K).

$$K = AB + AC + BC$$

Substitusi nilai-nilai tersebut:

$$K = 3 + 4 + 5 = 12$$

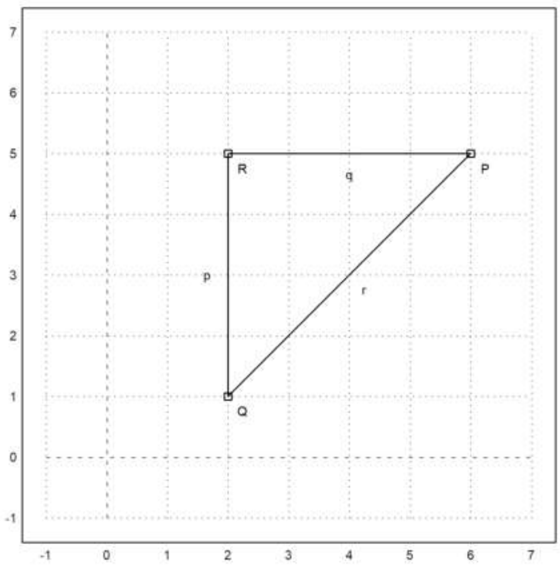
$$\text{Jadi, keliling segitiga } ABC \text{ adalah:}$$

$$K = 12$$

Latihan

1. Diketahui sebuah segitiga PQR dengan titik P(6,5), Q(2,1), dan R(2,5)
Hitunglah luas dari segitiga PQR tersebut.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>P=[6,5]; plotPoint(P,"P");
>Q=[2,1]; plotPoint(Q,"Q");
>R=[2,5]; plotPoint(R,"R");
>plotSegment(P,Q,"r"); // r=PQ
>plotSegment(Q,R,"p"); // p=QR
>plotSegment(P,R,"q"): // q=PR
```




```
>distance (Q, R)
```

4

```
>distance (P, Q)
```

5.65685424949

```
>distance (R, P)
```

4

```
>areaTriangle(R,Q,P)
```

8

```
>Luas:=(distance (R, P)*distance(Q, R))/2
```

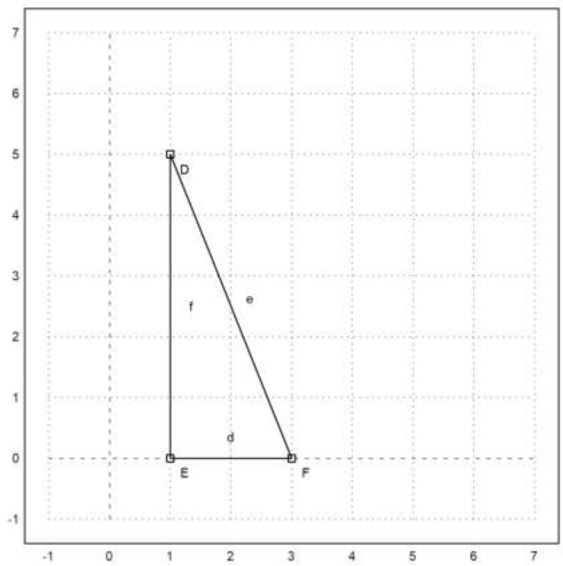
8

```
>K := 4+5.65685424949+4 // Keliling segitiga PQR
```

13.6568542495

2. Diketahui sebuah segitiga DEF dengan titik D(1,5), E(1,0), dan F(3,0)
Hitunglah luas dari segitiga DEF tersebut.

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>D=[1,5]; plotPoint(D,"D");
>E=[1,0]; plotPoint(E,"E");
>F=[3,0]; plotPoint(F,"F");
>plotSegment(D,E,"f"); // f=DE
>plotSegment(E,F,"d"); // d=EF
>plotSegment(D,F,"e"): // e=DF
```




```
>distance (D, E)
```

5

```
>distance (E, F)
```

2

```
>distance (D, F)
```

5.38516480713

```
>areaTriangle(D,E,F)
```

5

```
>K := 5+2+5.38516480713 // Keliling segitiga DEF
```

```
12.3851648071
```

Luas dan keliling lingkaran

Luas lingkaran adalah luasan daerah pada lingkaran tersebut.
Luas pada sebuah lingkaran memiliki rumus :

$$L = \pi.r^2$$

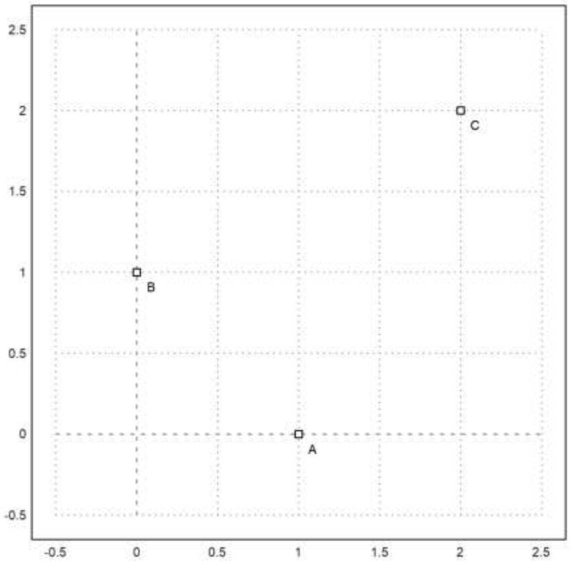
sedangkan untuk keliling lingkaran memiliki rumus :

$$K = 2.\pi.r$$

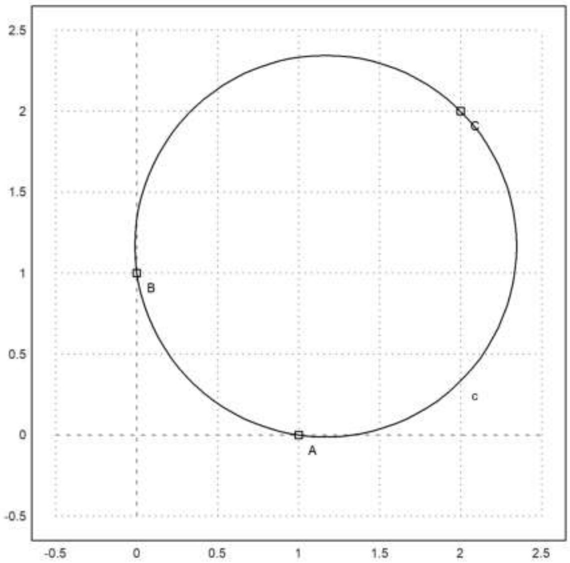
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5);
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A");
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
>c=circleThrough(A,B,C):
```




```
>plotCircle(c):
```




```
>r=getCircleRadius(c)
```

```
1.17851130198
```

```
>LuasLingkaran:=pi*r^2
```

```
4.36332312999
```

Menghitung luas lingkaran

Diketahui titik-titik:
(1,0), B(0,1), C(2,2)

Langkah 1: Hitung panjang setiap sisi.

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$AC = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2} = \sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

$$BC = \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

Langkah 2: Hitung luas segitiga ABC menggunakan rumus determinan.

$$L = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

$$L = \frac{1}{2} \times 3 = 1.5$$

Langkah 3: Hitung jari-jari lingkaran yang mengelilingi segitiga ABC.

$$R = \frac{abc}{4K} \approx \frac{1.41 \times 2.24 \times 2.24}{4 \times 1.5} \approx 1.18$$

Langkah 4: Hitung luas lingkaran yang mengelilingi segitiga ABC.

$$\text{Luas} = \pi R^2 \approx \pi \times (1.18)^2 \approx 4.36$$

```
>KelilingLingkaran:=2*pi*r
```

```
7.40480489693
```

Menghitung keliling lingkaran

$$\text{Diketahui jari-jari lingkaran } R \approx 1.18$$

Keliling lingkaran yang mengelilingi segitiga ABC adalah:

$$\text{Keliling} = 2\pi R \approx 2\pi \times 1.18 \approx 7.4$$

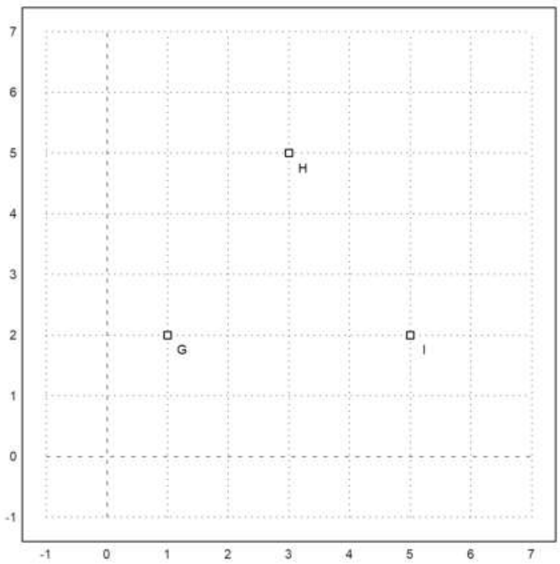
Latihan

Diketahui sebuah lingkaran yang melalui titik G(1,2), H(3,5), dan I(5,2). Hitunglah luas dan keliling lingkaran tersebut.

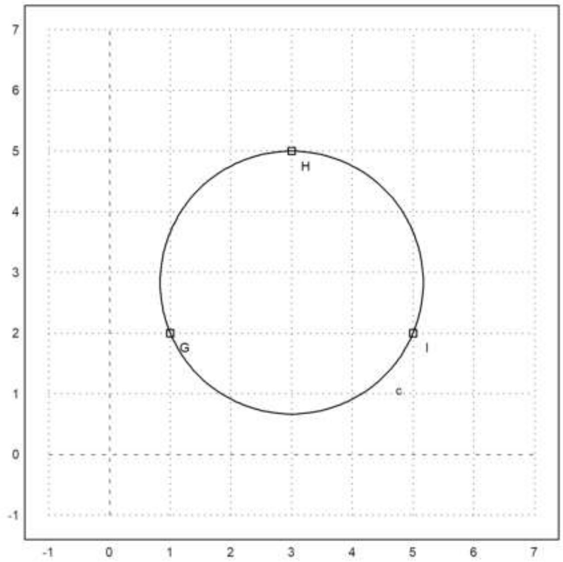
```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-1,7,-1,7);
>G=[1,2]; plotPoint(G,"G");
>H=[3,5]; plotPoint(H,"H");
>I=[5,2]; plotPoint(I,"I");
>c=circleThrough(G,H,I):
```




```
>plotCircle(c):
```




```
>r=getCircleRadius(c)
```

    2.16666666667

```
>LuasLingkaran:=pi*r^2
```

    14.7480321794

```
>KelilingLingkaran:=2*pi*r
```

    13.6135681656

Perhitungan sudut pada segitiga

    Sudut diukur dalam derajat (°) atau radian (rad) tergantung pada

preferensi dan konteks pengukuran yang digunakan. Dan dalam kesempatan kali ini kita akan menggunakan sudut derajat (°). Contoh:

dimana S adalah sudut yang akan ditentukan dalam derajat (°)
n adalah jumlah sudut yang ada pada bangun datar tersebut
dan k adalah jumlah sudut segitiga yang diketahui
contoh:
Andi ingin membuat segitiga menggunakan kawat dan dia ingin membuat segitiga siku-siku dan dia telah menentukan bahwa salah satu sudut selain siku-sikunya adalah 30° maka berapakah sudut yang belum diketahuinya?

```
>n:= 3;
>k:= 90+30;
>S:= ((n-2)*180)-k
```

    60