VARIABLE ALEATORIA.

En ocasiones, por comodidad para el estudio de fenómenos aleatorios, cuando trabajamos con espacios probabilizables $(\Omega, \mathcal{A})$ *nos interesa transformar las características de las poblaciones (*de tipo cualitativo o cuantitativo*) en valores numéricos. Para lo cual utilizamos las variables aleatorias.*

Una VARIABLE ALEATORIA k-dimensional, de un espacio probabilizable $(\Omega, \mathcal{A})$ de dimensión k, es una función:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

tal que para cada región $\{(-\infty, a_1], (-\infty, a_2], \ldots, (-\infty, a_k]\} \in \mathbb{R}^k$. Se cumple

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

Además, si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un espacio probabilizable, la variable aleatoria X, induce el espacio de probabilidad $(\mathrm{X}, \mathrm{B}(\mathbb{R}^k), P_X)$, donde

$\mathrm{X}=\mathrm{X}(\Omega)$

$\mathrm{B}=\mathrm{B}(\mathbb{R}^k)$ es $\sigma-$*álgebra* de Borel multidimensional

$P_X : X \rightarrow \mathbb{R} : \forall B = X(A) \in \mathbb{R}^k$ se cumple $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(A)$

Ejemplo.- Si consideramos los resultados que obtenemos al lanzar una moneda supuestamente equilibrada. Definiendo:

$$\Omega = \{\{cara\}, \{reverso\}\}$$

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, \{cara\}, \{reverso\}, \Omega\}$$

P es la función de probabilidad tal que

P es la función de probabilidad tal que $P(\{cara\}) = P(\{reverso\}) = \frac{1}{2}$

Podemos definir la variable aleatoria

$$X : \begin{Bmatrix} X(\{reverso\}) = 0 \\ X(\{cara\}) = 1 \end{Bmatrix}$$

Ya que cumple:

$$X^{-1}((-\infty, a]) : \begin{Bmatrix} \phi & \text{si } a < 0 \\ \{\phi\{reverso\}\} & \text{si a } 0 \leq a < 1 \\ \Omega & \text{si } 1 < a \end{Bmatrix}$$

Además, podemos definir el espacio de probabilidad $(X, B(\mathbb{R}), P_X)$ *asociado a la variable aleatoria X, donde:*

$$P_X(X=x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{2} & si\ x=0 \\ \frac{1}{2} & si\ x=1 \\ 0 & si\ x\notin\{0,1\} \end{cases}$$

Abusando de notación, solemos utilizar $P(X=t)$ en vez de $P_X(X=t)$

Hay que observar, que con el uso de las variables aleatorias se puede convertir cualquier población en un conjunto numérico, y en ocasiones nos puede ayudar a simplificar ciertos problemas. Además, a partir de estos valores se pueden estimar algunos valores que nos ayudan a estudiar el comportamiento de la población.

Una v. a. u. X (*variable aleatoria unidimensional*) decimos que es

- V. A. DISCRETA.- cuando existe un conjunto (*no nulo*) finito o infinito numerable $D\subset X$ tal que $P_X(X=x)>0, \forall x\in D$ (*conjunto soporte de la v. a.*)

  Además, por las propiedades de la función de probabilidad (*función de masa*) se cumple:

  $$\sum_{x\in D} P_X(X=x)=1$$

- V. A. CONTINUA.- cuando existe un una función real (*denominada función de densidad*)

  $$f_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

  Tal que cumple

  1. $f_X(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$
  2. f_X admite a lo sumo un número finito de discontinuidades sobre cada intervalo de $\mathbb{R}$, es decir f_X es integrable de Riemann.
  3. $\int_{X(\Omega)} f_X(x)\cdot dx=1$

  Y existe un conjunto no numerable $C=\{x\in\mathbb{R}: f_X(x)>0\}$ (*soporte de la v.a.*).

☞ Con carácter general, en los espacio de probabilidad $\left(X, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), P_X\right)$, existen dos conjuntos disjuntos $X_1, X_2 \subset X$, X_1 numerable y X_2 no numerable tales que $X = X_1 \cup X_2$, y $\exists\ t \in [0,1]$, una función de probabilidad p_X definida en X_1 y una función de densidad f_X definida en X_2, tal que para cada $B \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ se cumple:

$$P\{B\} = (1-t) \sum_{\{B \cap X_1\}} p_X\{x\} + (t) \cdot \int_{\{B \cap X_2\}} f_X(x) \cdot d^n x$$

Además, si t =0, X es una V. A. DISCRETA y si t = 1 X es una V. A. CONTINUA.

☞*En realidad (por teorema de descomposición de Lebesgue), X es descomposición de tres funciones de probabilidad, una absolutamente continua, otra discreta y otra singular. Sin embargo, debido a que las medidas singulares, carecen de interés práctico, se suele representar tan solo, como descomposición de las dos primeras).*