Quadratwurzeln

1. Ergänze die Tabelle!

x	0	1	2		4						
x^2				9	16	25	36	49	64	81	100

$4 \cdot 4$

Das **Wurzelziehen** (der Quadratwurzel) ist die Umkehrung des Quadrierens.

$\sqrt{144} = 12$ weil $12^2 = 144$

$\sqrt{x} = x_1$ wenn $x_1^2 = x$

Die (Quadrat)Wurzel einer Zahl x ist jene positive Zahl x_1, deren Quadrat x ergibt.

Beim Quadrieren einer reellen Zahl kann man niemals ein negatives Ergebnis erhalten. Deshalb kann man aus einer negativen Zahl nicht die Quadratwurzel ziehen.

2. Überprüfe durch Quadrieren, ob die Wurzeln richtig berechnet wurden!

$\sqrt{50} = 7$ stimmt nicht, weil $7^2 = 49$

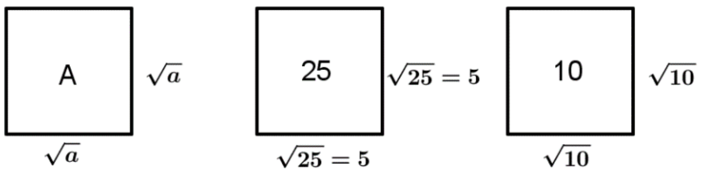
$\sqrt{81} = 9$

$\sqrt{121} = 11$

$\sqrt{0{,}2} = 0{,}1$

$\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

Hat ein Quadrat Flächeninhalt A, so gilt für die Seitenlänge $a = \sqrt{A}$.

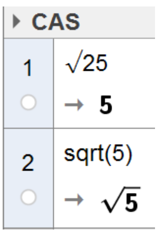


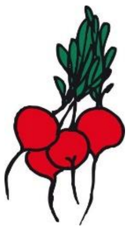
3. Gib die Seitenlängen der Quadrate an! Rechne im Kopf!

a.	b.	c.	d.	e.
A = 25 m²	A = 4 cm²	A = 400 cm²	A = 100 m²	A = 49 cm²
a =	a =	a =	a =	a =

Wurzelziehen mit GeoGebra CAS:

Das Wurzelzeichen erhält man:
mit der Tastenkombination *Alt+r*
mit dem Befehl *sqrt*
squareroot





lat. radix = Wurzel
Radieschen

4. Berechne die Seitenlängen der Quadrate! Verwende einen Taschenrechner oder CAS!

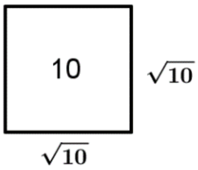
a. A = 33124 cm²
a = __________ cm
a = __________ dm

b. A = 20 m² 25 dm²
a = __________ m
a = __________ dm

c. A = 13,69 m²
a = ___________ m
a = ___________ dm

Bei allen Aufgaben auf dieser Seite erhältst du ganze Zahlen oder endliche Dezimalzahlen als Ergebnis. Das ist nicht immer so. Viele Wurzeln ergeben unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

Irrationale Zahlen



Wie groß ist $\sqrt{10}$?

größer als 3, denn $3^2 = 9$
kleiner als 4, denn $4^2 = 16$

$3 < \sqrt{10} < 4$

Das kann man schrittweise für beliebig viele Dezimalstellen machen.

$3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$ weil $3{,}1^2 = 9{,}61 < 10 < 10{,}24$

$3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$ weil $3{,}16^2 = 9{,}9856 < 10 < 3{,}17^2 = 10{,}0489$

So erhält man immer um eine Dezimalstelle mehr, aber niemals die ganz genaue Zahl.

$\sqrt{10}$ = 3.162277660168…. Diese Zahl ist unendlich, wird aber nie periodisch.

irrationale Zahlen

- unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen
- lassen sich nicht als Bruch schreiben

weitere irrationale Zahlen:
Quadratwurzeln: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$, ...
höhere Wurzeln: $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{100}$, ...
Kreiszahl π = 3.14159265359…

1. Gib an, zwischen welchen natürlichen Zahlen die Wurzeln liegen!

_______ < $\sqrt{50}$ < _______   _______ < $\sqrt{20}$ < _______

_______ < $\sqrt{8}$ < _______   _______ < $\sqrt{75}$ < _______

2. Berechne mit Taschenrechner oder CAS! Runde das Ergebnis auf 3 Dezimalstellen.

$\sqrt{2} \approx$ $\sqrt{8} \approx$ $\sqrt{30{,}5} \approx$

3. Schätze die Ergebnisse im Kopf ab und ordne zu!

$\sqrt{30}$	
$\sqrt{40}$	
$\sqrt{5}$	
$\sqrt{90}$	

A	≈ 2,24
B	≈ 3,29
C	≈ 5,48
D	≈ 6,32
E	≈ 8,83
F	≈ 9,49

4. Schreib bei den folgende Rechnungen die CAS-Eingabe auf! Kontrolliere durch Berechnung!

$\sqrt{9+16} = 5$

$\sqrt{8{,}1 - 3{,}7} \approx 2{,}10$

$\sqrt{9 \cdot 16} = 12$

$\sqrt{8{,}1 : 3{,}7} \approx 1{,}48$

5. Ein Rechteck ist 13,5 cm lang und 8,2 cm breit. Berechne die Seitenlänge eines Quadrats mit gleich großem Flächeninhalt! Kontrollwert: 10,5 cm

Rechnen mit Quadratwurzeln

$$3 \underset{\sqrt{x}}{\overset{x^2}{\rightleftarrows}} 9$$

Das Wurzelziehen ist die Umkehrung des Quadrierens.

1. Ergänze die fehlenden Zahlen!

$8 \underset{\sqrt{x}}{\overset{x^2}{\rightleftarrows}} \square$	$\square \underset{\sqrt{x}}{\overset{x^2}{\rightleftarrows}} 25$	$\square \underset{\sqrt{x}}{\overset{x^2}{\rightleftarrows}} 100$
$0{,}5 \underset{\sqrt{x}}{\overset{x^2}{\rightleftarrows}} \square$	$\square \underset{\sqrt{x}}{\overset{x^2}{\rightleftarrows}} 0{,}36$	$0{,}1 \underset{\sqrt{x}}{\overset{x^2}{\rightleftarrows}} \square$

Bei positiven Zahlen heben sich Quadrieren und Wurzelziehen gegenseitig auf:
Bei negativen Zahlen funktioniert das nicht.

$$\boxed{\sqrt{\boldsymbol{a}^2} = \boldsymbol{a}}$$

a = 3: $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ Man erhält die Ausgangszahl.
a = – 3: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ Man erhält nicht die Ausgangszahl.

2. Berechne! Achtung: Nicht alle Berechnungen sind möglich.

$\sqrt{21^2} =$ $\sqrt{(-21)^2} =$ $\sqrt{-21^2} =$ $(\sqrt{21})^2 =$

$\sqrt{7{,}3^2} =$ $\sqrt{-7{,}3^2} =$ $(\sqrt{7{,}3})^2 =$ $(\sqrt{-7{,}3})^2 =$

Rechenregeln für positive Zahlen:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}} = \sqrt{\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}} \\ &\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{aligned}}$$

Bei Additionen und Subtraktionen ist das Zerlegen in 2 Wurzeln nicht möglich!

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

3. Unterteile vor der Berechnung! $\sqrt{25x^2} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{x^2} = 5x$

$\sqrt{9z^2} =$ $\sqrt{x^2y^2} =$ $\sqrt{4\cdot 49} =$

$\sqrt{81s^2} =$ $\sqrt{64k^2} =$ $\sqrt{4p^2q^2} =$

4. Unterteile geschickt, so dass man aus den Faktoren die Wurzel ziehen kann!

$\sqrt{1600} = \sqrt{16\cdot 100} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{100} = 4\cdot 10 = 40$

$\sqrt{4900} =$ $\sqrt{900} =$

$\sqrt{400} =$ $\sqrt{2500} =$

5. Ziehe aus Zähler und Nenner getrennt die Wurzel! $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

$\sqrt{\frac{64}{9}} =$ $\sqrt{\frac{s^2}{25}} =$ $\sqrt{\frac{x^2}{y^2}} =$

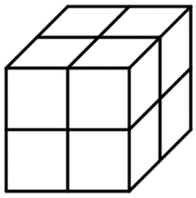
$\sqrt{\frac{81}{p^2}} =$ $\sqrt{\frac{u^2}{v^2}} =$ $\sqrt{\frac{9z^2}{4}} =$

Kubikwurzeln

Ein Würfel hat ein Volumen von 8 cm³.
Er besteht aus 8 Einheitswürfeln.
Jede Kante ist 2 cm lang.

$V = a^3$ $\qquad a = \sqrt[3]{V}$

$V = 2^3 = 8$ $\qquad a = \sqrt[3]{8} = 2$



$\sqrt[n]{x}$

n ... Wurzelexponent
x ... Radikand

Die 3. Wurzel einer Zahl x ist jene Zahl x1, deren 3. Potenz x ist.

$\sqrt[3]{x} = x_1$ wenn $x_1^3 = x$

1. Ein Würfel hat Kantenlänge 3 E. Ergänze:

   Rauminhalt: V = $\qquad a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{} =$

2. Berechne die 3. Wurzeln und begründe!

   $\sqrt[3]{64} = 4$ weil $4^3 = 64$

   $\sqrt[3]{27} =$

   $\sqrt[3]{125} =$

   $\sqrt[3]{1000} =$

   $\sqrt[3]{0{,}001} =$

Eingabe der Kubikwurzel (cubicroot) — Taschenrechner z.B.: 2nd + y³
GeoGebra: cbrt (x)

3. Berechne die Kantenlängen der Würfel! Runde auf Ganze!

a.	b.	c.	d.	e.
V = 21952 m³	V = 8000 m³	V = 16000 m³	V = 50 m³	V = 55000 m³
a =	a =	a ≈	a ≈	a ≈

Rechenregeln: $\boxed{\sqrt[3]{a^3} = a \qquad \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}}$

4. Berechne!

   $\sqrt[3]{7{,}1^3} =$ $\qquad \left(\sqrt[3]{4{,}2}\right)^3 =$ $\qquad \sqrt[3]{1} =$ $\qquad \sqrt[3]{p^3} =$

5. Ziehe die Wurzel!

   $\sqrt[3]{27k^3} =$ $\qquad \sqrt[3]{8x^3y^3} =$ $\qquad \sqrt[3]{1000k^3} =$

6. Ziehe die Wurzel!

   $\sqrt[3]{\frac{p^3}{q^3}} =$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{8}{1000}} =$ $\qquad \sqrt[3]{\frac{27x^3}{125}} =$

Höhere Wurzeln funktionieren nach dem selben Prinzip:

$2^5 = 32 \quad \rightarrow \quad \sqrt[5]{32} = 2$

gerhard.egger@ph-noe.ac.at

Die reellen Zahlen

<table>
<tr><td colspan="2">reelle Zahlen = Menge $\mathbb{R}$
alle rationalen und irrationalen Zahlen = alle Zahlen auf der Zahlengeraden</td></tr>
<tr><td>rationale Zahlen = Menge $\mathbb{Q}$

endliche oder periodische Dezimalzahlen
lassen sich als Bruch schreiben</td><td>irrationale Zahlen

unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen
lassen sich nicht als Bruch schreiben</td></tr>
<tr><td>$\frac{13}{100} = 0{,}13$
$\frac{35}{11} = 3{,}181818\ldots = 3{,}\overline{18}$</td><td>$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$
$\pi = 3{,}1415926535\ldots$</td></tr>
</table>

Die Menge $\mathbb{N}$ ist ein Teil der Menge $\mathbb{Z}$.
Die Menge $\mathbb{Z}$ ist ein Teil der Menge $\mathbb{Q}$.
Die Menge $\mathbb{Q}$ ist ein Teil der Menge $\mathbb{R}$.

1. Kreuze an, ob die Aussagen richtig oder falsch sind!

	richtig	falsch
Jede natürliche Zahl ist eine rationale Zahl.	☐	☐
Jede natürliche Zahl ist eine irrationale Zahl.	☐	☐
Jede natürliche Zahl ist eine reelle Zahl.	☐	☐
Jede reelle Zahl ist eine rationale Zahl.	☐	☐
Jede irrationale Zahl ist eine reelle Zahl.	☐	☐

2. Kreuze alle richtigen Aussagen an!

$-\sqrt{7} \in \mathbb{Z}$	$-\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$	$-\sqrt{7} \in \mathbb{R}$	$-\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$	$-\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$	$-\sqrt{9} \in \mathbb{R}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

3. Kreuze alle irrationalen Zahlen an!

$\sqrt{0{,}25}$	$\sqrt{0{,}1}$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

4. Kreuze alle irrationalen Zahlen an!

$\sqrt[3]{1}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt[3]{9}$	π	$\sqrt{\pi}$	$0{,}\overline{83}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

5. Schreibe als Bruchzahl! Kürze wenn möglich!

$0{,}6 =$ $\quad$ $0{,}\dot{6} =$ $\quad$ $1{,}25 =$ $\quad$ $0{,}04 =$

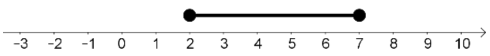
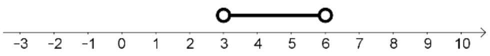
6. Schreibe als Dezimalzahl!

$\frac{1}{8} =$ $\quad$ $\frac{5}{11} =$ $\quad$ $\frac{5}{12} =$ $\quad$ $-\frac{3}{1000} =$

$-\frac{3}{8} =$ $\quad$ $\frac{27}{5} =$ $\quad$ $\frac{1}{20} =$ $\quad$ $-\frac{45}{1000} =$

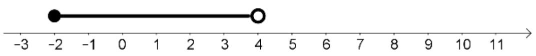
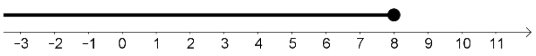
Zahlenbereiche, Ungleichungen

Ein **Intervall** ist ein Ausschnitt der Zahlengeraden. Es enthält alle reellen Zahlen im angegebenen Bereich.

$2 \leq x \leq 7$	$3 < x < 6$
alle reellen Zahlen von 2 bis 7	alle reellen Zahlen zwischen 3 und 6
Die Ränder 2 und 7 sind im Intervall enthalten = **geschlossenes Intervall** **[2 ; 7]**	Die Ränder 3 und 6 sind im Intervall nicht enthalten = **offenes Intervall** **(3 ; 6) =] 3 ; 6 [**
	
Darstellung mit gefülltem Punkt als Rand	Darstellung mit Ring als Rand

Ist das Intervall nur in eine Richtung begrenzt, ist die zweite Grenze + ∞ oder – ∞. („unendlich“)

1. Schreibe als Ungleichung bzw. Ungleichungskette und als Intervall!

	Ungleichung(skette)	Intervall
alle reellen Zahlen zwischen – 5 und 3		
alle reellen Zahlen von 2 bis 10		
alle reellen Zahlen größer als 3		
		
		

2. Stelle die folgenden Intervalle auf einer Zahlengeraden grafisch dar!

a. [– 1 ; 6] b. (2 ; 8] c. (3 ; ∞)

3.a. Gegeben ist das Intervall (4 ; 6]. Kreuze an, ob die Aussagen richtig oder falsch sind!

	richtig	falsch
In dem Intervall liegen genau 2 natürliche Zahlen.	☐	☐
In dem Intervall liegen unendlich viele rationale Zahlen.	☐	☐
In dem Intervall liegen unendlich viele irrationale Zahlen.	☐	☐
$\sqrt{10}$ liegt in dem Intervall.	☐	☐
$\sqrt{30}$ liegt in dem Intervall.	☐	☐

b.

	richtig	falsch
4 liegt in dem Intervall.	☐	☐
4,01 liegt in dem Intervall.	☐	☐
4,01 ist die kleinste Zahl in dem Intervall.	☐	☐
Es gibt keine kleinste Zahl in dem Intervall.	☐	☐
6 ist die größte Zahl in dem Intervall.	☐	☐

 gerhard.egger@ph-noe.ac.at