# Problemas – Tema 9

# Problemas resueltos - 8 - ejercicios para obtener la ecuación de la recta y del plano

**1. Consideremos los puntos** $A(2,6,-3)$ **y** $B(3,3,-2)$ **.**

**a) Halla la ecuación de la recta que contiene a ambos puntos.**

**b) Determina una ecuación para el plano equidistante de ambos puntos.**

a) Para escribir la ecuación de una recta necesitamos un vector director de la recta y un punto de la recta.

El vector $\vec{AB}=(1,-3,1)$ es paralelo a la recta, que además pasa por el punto $A(2,6,-3)$ . Por lo tanto, la ecuación paramétrica resulta:

$$r:\left\{\begin{matrix} x=2+a \\ y=6-3a \\ z=-3+a \end{matrix}\right\}$$

b) El plano equidistante de ambos puntos pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ . Ese punto medio será: $C=(\frac{2+3}{2},\frac{6+3}{2},\frac{-3-2}{2})=(\frac{5}{2},\frac{9}{2},-\frac{5}{2})$ .

El vector $\vec{AB}=(1,-3,1)$ es perpendicular al plano solución. Y con un vector perpendicular al plano y un punto del plano podemos escribir su ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$ .

$$\Pi: x-3y+z+D=0$$

El término independiente lo sacamos sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano.

$$\frac{5}{2}-3\cdot\frac{9}{2}-\frac{5}{2}+D=0 \quad \rightarrow \quad D=\frac{27}{2} \quad \rightarrow \quad \Pi: x-3y+z+\frac{27}{2}=0$$

**2. Dado el punto $P(1,1,1)$ y el plano $\Pi: x-y+z=5$ , calcular la ecuación paramétrica y la ecuación continua de la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto.**

De la ecuación general del plano podemos deducir su vector característico $\vec{u_\Pi}=(1,-1,1)$ , perpendicular al plano.

Y con un vector paralelo a la recta y un punto de la recta, tenemos su ecuación paramétrica.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{array} \right\}$$

Despejando el parámetro libre e igualando, tendremos la ecuación continua de la recta.

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

**3. a) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta** $r: x-2=\frac{y-1}{3}=z+1$ **y al punto** $A(2,5,1)$

**b) Obtener los puntos de corte del plano** $\Pi: x+2y+4z-4=0$ **con los ejes cartesianos del espacio tridimensional.**

a) Podemos expresar la ecuación del plano a partir de dos vectores linealmente independientes y un punto del plano.

El punto lo tenemos: $A(2,5,1)$ .

Un primer vector del plano sería uno de los vectores directores de la recta $r$ que contiene. Es decir: $\vec{u}=(1,3,1)$ .

Y si el punto $A$ no pertenece a la recta $r$ , podremos obtener un punto $B$ de la recta y trazar el vector $\vec{AB}$ , que será linealmente independiente respecto al vector $\vec{u}=(1,3,1)$ .

Comprobemos, entonces, que $A$ no pertenece a $r$ :

$2-2=\frac{5-1}{3}=1+1 \rightarrow 0=\frac{4}{3}=2$ → Absurdo matemático → El punto no pertenece a la recta.

Obtengamos ahora un punto de la recta. Viendo a ecuación continua, podemos tomar $B(2,1,-1)$ .

El vector $\vec{AB}$ será: $\vec{AB}=(0,-4,-2)$ . Por lo tanto ya tenemos todos los elementos para expresar la ecuación paramétrica del plano (como el enunciado no exige ninguna ecuación en concreto, planteo la paramétrica).

$$\Pi: \left\{ \begin{array}{c} x=2+\alpha \\ y=5+3\alpha-4\beta \\ z=1+\alpha-2\beta \end{array} \right\}$$

b) Sabemos que la ecuación segmentaria del plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ nos ofrece los puntos de corte con los ejes: $(a,0,0)$ , $(0,b,0)$ , $(0,0,c)$ . Por lo tanto:

$$\Pi: x+2y+4z-4=0 \rightarrow \Pi: x+2y+4z=4 \rightarrow \Pi: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+z=1$$

Siendo los puntos de corte: $(4,0,0)$ , $(0,2,0)$ , $(0,0,1)$ .

**4. a) Dada la recta** $r:\begin{Bmatrix} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{Bmatrix}$ **y los puntos** $P(1,-2,0)$ **y** $Q(0,1,3)$ **.**

**a) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta** $r$ **y es paralelo al vector** $\vec{PQ}$ **.**

**b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a** $r$ **, que pasa por** $Q$ **e intersecta a** $r$ **en un punto.**

a) Un plano queda determinado de manera única por un punto del plano y por dos vectores linealmente independientes del plano.

Si el plano contiene a la recta $r$ podemos tomar el vector director de la recta como uno de los vectores del plano, y un punto de la recta como punto del plano. Para ello pasamos la recta de implícita a paramétricas.

$$r:\begin{Bmatrix} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{Bmatrix} \rightarrow z=\lambda \rightarrow x=\lambda \;,\; y=\lambda \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$$

$$A(0,0,0)\in r \;,\; \vec{u}_r=(1,1,1)$$

Si el vector $\vec{PQ}$ es paralelo al plano, podría ser nuestro segundo vector, siempre y cuando sea linealmente independiente respecto de $\vec{u}_r$ .

$$\vec{PQ}=(-1,3,3)$$

Ambos vectores son linealmente independientes por no ser proporcionales, ya que $\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Por la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r,\vec{PQ},A):\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow \Pi: z-y=0$$

b) Tomamos un punto arbitrario de la recta $r$ , recordando que ese punto arbitrario tendrá como componentes la ecuación paramétrica de la recta: $A(\lambda,\lambda,\lambda)$ .

Creamos el vector $\vec{QA}=(\lambda,\lambda-1,\lambda-3)$ .

Si la recta solución corta a $r$ en un punto y lo hace de manera perpendicular, el vector $\vec{QA}$ debe ser ortogonal al vector director $\vec{u}_r=(1,1,1)$ → Producto escalar nulo:

$$\vec{QA}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow \lambda+\lambda-1+\lambda-3=0 \rightarrow \lambda=4/3$$

Con este valor del parámetro, sacamos el vector director de la recta solución:

$$\vec{QA}=(4/3,1/3,-5/3)$$

Y con el vector director de la recta solución y el punto $Q(0,1,3)$ podemos obtener su ecuación paramétrica → $s:\left\{\begin{matrix} x=\frac{4}{3}a \\ y=1+\frac{1}{3} \\ z=3-\frac{5}{3}a \end{matrix}\right\}$

**5. Sea el triángulo de vértices $A(-1,1,0)$ , $B(0,-2,3)$ y $C(2,1,-1)$ .**

**a) Halla la ecuación del plano que contiene al triángulo .**

**b) Halla la ecuación general de la recta que une el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el punto medio del segmento $\overline{AC}$ .**

a) La determinación lineal del plano $\Pi(\vec{u},\vec{v},A)$ nos permite calcular la ecuación general del plano a partir de un punto del plano y de dos vectores del plano que sean linealmente independientes. El punto puede ser, por ejemplo, $A(-1,1,0)$ . Y los vectores linealmente independientes podemos tomarlos de los vértices del triángulo.

$\vec{AB}=(1,-3,3)$ , $\vec{AC}=(3,0,-1)$

Los dos vectores no son proporcionales entre si, por lo tanto son linealmente independientes.

$$\Pi(\vec{u},\vec{v},A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ -3 & 0 & y-1 \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow 0+9(y-1)+3(x+1)-0+(y-1)+9z=0$$

$$10(y-1)+3(x+1)+9z=0$$

$$\Pi: 3x+10y+9z-7=0$$

b) Sea $D$ el punto medio del segmento $\overline{AB}$ . Lo calculamos con la semisuma de las componentes de los extremos del segmento → $D(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{3}{2})$ . Sea $E$ el punto medio del segmento $\overline{AC}$ , y sus coordenadas son → $E(\frac{1}{2},1,\frac{-1}{2})$

Obtenemos un vector director de la recta → $\vec{DE}=(1,\frac{3}{2},-2)$

Y podemos escribir la ecuación paramétrica de la recta: $r:\begin{Bmatrix} x=\frac{-1}{2}+\lambda \\ y=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}\lambda \\ z=\frac{3}{2}-2\lambda \end{Bmatrix}$

La ecuación general la obtenemos eliminando el parámetro $\lambda$ y expresando la recta como el corte de dos planos:

$$r:\begin{Bmatrix} y=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}(x+\frac{1}{2}) \\ z=\frac{3}{2}-2(x+\frac{1}{2}) \end{Bmatrix} \rightarrow r:\begin{Bmatrix} \frac{-3}{2}x+y-\frac{1}{4}=0 \\ 2x+z-\frac{1}{2}=0 \end{Bmatrix}$$

**6. Los puntos $A(1,3,-4)$ , $B(2,6,7)$ y $C(5,-1,2)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.**

**a) Halla el cuarto vértice $D$ .**

**b) Halla la ecuación de la recta que pasa por $A$ y $C$ .**

**c) Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.**

a) El punto medio del segmento que une $A$ y $C$ es:

$$M=(3,1,-1)$$

Y $M$ también es el punto medio del segmento que une $B$ y $D$ . Por lo tanto, si $D(x,y,z)$ :

$$(3,1,-1)=\left(\frac{2+x}{2},\frac{6+y}{2},\frac{7+z}{2}\right) \rightarrow x=4 \ , \ y=-4 \ , \ z=-9 \rightarrow D(4,-4,-9)$$

Otra forma de plantearlo es la siguiente. El vector $\vec{AB}$ tiene la misma dirección, sentido y módulo que el vector $\vec{DC}$ . Por lo que podemos igualas sus componentes.

$$\vec{AB}=(1,3,11) \ , \ \vec{DC}=(5-x,-1-y,2-z) \rightarrow \begin{Bmatrix} 1=5-x \\ 3=-1-y \\ 11=2-z \end{Bmatrix} \rightarrow x=4 \ , \ y=-4 \ , \ z=-9$$

b) Para la recta necesitamos un punto y un vector. El punto puede ser, por ejemplo, $A(1,3,-4)$ . Y el vector $\vec{AC}=(4,-4,6)$ . La ecuación continua de la recta será:

$$r: \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+4}{6}$$

c) Para el plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes. El punto puede ser, por ejemplo, $A(1,3,-4)$ . Uno de los vectores $\vec{AC}=(4,-4,6)$ . Y el segundo vector $\vec{AB}=(1,3,11)$ . Ambos vectores son linealmente independiente, al tener como extremos finales vértices distintos del paralelogramo.

Otra forma de ver que son independiente es comprobando que no son proporcionales. Es decir: $\frac{4}{1}\neq\frac{-4}{3}\neq\frac{6}{11}$ .

Y la ecuación paramétrica del plano resulta:

$$\Pi: \begin{Bmatrix} x=1+4\alpha+\beta \\ y=3-4\alpha+3\beta \\ z=-4+6\alpha+11\beta \end{Bmatrix}$$