Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 14 - nuevas indeterminaciones

1. Resuelve $\lim_{x\to\infty} x\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$

$\lim_{x\to\infty} x\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=(evaluar)=\infty\cdot 0$ → Indeterminación → recuerda: $x=\frac{1}{\frac{1}{x}}$

Expresamos el límite de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[arctg\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$$

Tenemos un cociente de funciones funciones continuas y derivables (salvo en $x=0$ para el denominador), que tienden a cero cada una de ellas al ser evaluadas en el infinito. Por lo tanto, podemos aplicar L'Hôpital.

Derivamos por separado numerador y denominador, y calculamos el nuevo límite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\frac{e^x}{1+e^{2x}}-0\right]}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[-x^2e^x\right]}{1+e^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Nuevamente aplicamos L'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[-2xe^x-x^2e^x\right]}{2e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(-2x-x^2\right)e^x\right]}{2e^x\cdot e^x}=(simplificar\ exponencial)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Podemos seguir aplicando L'Hôpital sucesivamente hasta quitar la indeterminación, o bien darnos cuenta que la función exponencial en el infinito es mucho “más potente” que un polinomio (por lo que podemos intuir que el límite tenderá a 0 al estar la exponencial en el denominador).

Si deseamos aplicar L'Hôpital dos veces más, de manera consecutiva:

$\lim_{x\to\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2e^x}=\frac{-1}{\infty}=0$$

2. Calcula $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{5+2x}\right)^{\frac{1}{x+2}}$

Al evaluar el límite, encontramos una indeterminación del tipo 1 elevado a infinito. Podemos aplicar logaritmo neperiano, resolver el nuevo límite y aplicar finalmente exponencial (este sería el método recomendado).

$$\lim_{x\to -2}\ln\left(\frac{x+3}{5+2x}\right)^{\frac{1}{x+2}} \to \lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}\ln\left(\frac{x+3}{5+2x}\right) \to \lim_{x\to -2}\frac{\ln\left(\dfrac{x+3}{5+2x}\right)}{x+2} \to \text{evaluar} \to \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\dfrac{\dfrac{1(5+2x)-(x+3)\cdot 2}{(5+2x)^2}}{\dfrac{x+3}{5+2x}}}{1}=\lim_{x\to -2}\frac{-1}{(x+3)(5+2x)}=(evaluar)=-1$$

Aplicamos exponencial para obtener el límite de partida.

$$L=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Una segunda forma de resolver la definición del número e y aprender un nuevo razonamiento matemático para estos límites (repito, lo mejor es resolverlo aplicando primero logaritmo neperiano).

$e=\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$ si $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a x_0 .

Buscamos un factor "1" en la base. Para ello operamos sumando y restando $(x+2)$ en el numerador de la base.

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+3+(x+2)-(x+2)}{5+2x}\right)^{\frac{1}{x+2}}$$

Forzamos que aparezca el factor $(5+2x)$ en el numerador (ya lo teníamos en el denominador).

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{5+2x-x-2}{5+2x}\right)^{\frac{1}{x+2}} \to \text{rompemos en dos fracciones} \to \lim_{x\to -2}\left(1+\frac{-x-2}{5+2x}\right)^{\frac{1}{x+2}}$$

El factor $(-x-2)$ puede pasar como denominador del denominador.

$$\lim_{x\to -2}\left(1+\frac{1}{\dfrac{5+2x}{-2-x}}\right)^{\frac{1}{x+2}}$$

En el exponente, multiplicamos y dividimos por el factor $\dfrac{5+2x}{-2-x}$.

$$\lim_{x\to -2} \boxed{f()} \left(1+\frac{1}{\frac{5+2x}{-2-x}}\right)^{\frac{1}{x+2}\cdot\frac{5+2x}{-2-x}\cdot\frac{-2-x}{5+2x}} \to \text{operamos} \to \lim_{x\to -2} \boxed{f()} \left(1+\frac{1}{\frac{5+2x}{-2-x}}\right)^{\frac{5+2x}{-2-x}\cdot\frac{-2-x}{(5+2x)(x+2)}}$$

$$\lim_{x\to -2} \boxed{f()} \left(1+\frac{1}{\frac{5+2x}{-2-x}}\right)^{\frac{5+2x}{-2-x}\cdot\frac{-(2+x)}{(5+2x)(x+2)}} \to \lim_{x\to -2} \boxed{f()} \left(1+\frac{1}{\frac{5+2x}{-2-x}}\right)^{\frac{5+2x}{-2-x}\cdot\frac{-1}{(5+2x)}}$$

Ya poseemos la definición del número de Euler, por lo que el límite queda:

$$e^{\lim_{x\to -2}\frac{-1}{(5+2x)}} \to e^{-1} \to \frac{1}{e}$$

3. Calcula $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+6}{3x-8}\right)^{2x}$

Es una indeterminación del tipo 1^{∞} . Nuevamente, el razonamiento recomendado es aplicar logaritmo, resolver el nuevo límite y aplicar exponencial. O bien, como ya hicimos en el ejercicio anterior, usar la definición del número de Euler.

$e=\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$ si $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a x_0 .

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+6-14+14}{3x-8}\right)^{2x} \to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-8+14}{3x-8}\right)^{2x} \to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-8}{3x-8}+\frac{14}{3x-8}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{14}{3x-8}\right)^{2x} \to \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-8}{14}}\right)^{2x}$$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-8}{14}}\right)^{\frac{3x-8}{14}}\right)^{\frac{14}{3x-8}\cdot 2x}$$

Lo que está en el interior del paréntesis principal es el número e, quedando el límite:

$$e^{\lim_{x\to\infty}\frac{28x}{3x-8}} \to e^{\frac{28}{3}}$$

4. Calcula $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\left(\frac{1}{sen(x)}\right)^2}$ **.**

Al evaluar comprobamos que estamos ante una indeterminación 1 elevado a infinito.

Aplicamos logaritmo → $\lim_{x\to 0} \frac{1}{sen^2(x)} \cdot \ln[\cos(x)] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln[\cos(x)]}{sen^2(x)} = \frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital → $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-sen(x)}{\cos(x)}}{2\,sen(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos^2(x)} = \frac{-1}{2}$

Aplicamos exponencial al resultado obtenido → $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\left(\frac{1}{sen(x)}\right)^2} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$

5. Resolver $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x)$

Evaluamos → $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0 \cdot (-\infty) \equiv indeterminación$

Recuerda que la gráfica del logaritmo tiene una asíntota vertical a la derecha de 0 .

Este tipo de indeterminaciones se resuelven **dando la vuelta a uno de los término del producto, para buscar una indeterminación donde podamos aplicar L'Hôpital**. Es común dar la vuelta al término más sencillo de los dos, en este caso $x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}}$.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Enunciaríamos las condiciones de la regla de L'Hôpital (no lo vayas a olvidar) y resolveríamos derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x}} \;\to \text{L'Hôpital} \to\; \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Donde hemos simplificado antes de evaluar finalmente. **No olvides simplificar, si es posible**, tras haber aplicado L'Hôpital.

6. Resolver $\lim_{x\to 0^+} x^x$

Evaluamos → $\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0 \equiv indeterminación$

Este tipo de indeterminaciones, y en las tipo ∞^0 y 1^∞ , pueden resolverse **aplicando primero función logaritmo y luego función exponencial, que es la inversa del logaritmo**. Es decir:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0\cdot(-\infty) \equiv indeterminación$$

Donde hemos aplicado la propiedad del logaritmo de una potencia, donde el exponente pasa a multiplicar al logaritmo de la base de la potencia.

Hemos llegado al mismo límite del ejemplo anterior. Repetiríamos todos los pasos allí indicados y resolveríamos.

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x) = 0$$

Este resultado es el logaritmo del límite de partida, por lo que aplicamos exponencial para que cancele con logaritmo. Así obtendremos el límite de partida.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

7. Calcula $\lim_{x\to 1}[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Evaluamos el límite y obtenemos indeterminación 1^{∞} .

Aplicamos logaritmo, resolvemos el nuevo límite y, al final, aplicamos exponencial.

$$\lim_{x\to 1}\ln[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{\ln(x)}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[\cos(\pi x)+2^x]}{\ln(x)}=\frac{0}{0} \quad \text{→ indeterminación → L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-sen(\pi x)\cdot\pi+2^x\ln(2)}{\cos(\pi x)+2^x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-x\,sen(\pi x)\pi+x2^x\ln(2)}{\cos(\pi x)+2^x}=\frac{0+2\ln(2)}{1}=2\ln(2)$$

Aplicamos exponencial.

$$L=e^{2\ln(2)}=e^{\ln(2^2)}=4$$