Lösungsvorschlag zum Selbsttest: Komplexe Polarform und Exponentialfunktion Die Drehung um einen beliebigen Punkt

Jannis Zeller

Aufgabe 1 (AFB I) (3+1 Pkt.)

(a) Wir schreiben $z = a + b\text{i}$. Dann ist $z = \cos(\varphi) + \text{i}\sin(\varphi)$ (**1 Pkt.**), mit

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \;\; (\mathbf{1\ Pkt.}) \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$\text{und/oder} \quad \varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \quad \text{und/oder} \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

1 Pkt. für eine korrekte Gleichung für den Winkel.

(b) Die allgemeine Exponentialform einer komplexen Zahl lautet (mit denselben Gleichungen für r und φ):

$$z = r \cdot e^{\text{i}\varphi} \;\; (\mathbf{1\ Pkt.})\,.$$

Aufgabe 2 (AFB II) (2+2+2+2 Pkt.)

(a) Polarform: $z = \cos\varphi + \text{i}\sin\varphi$ (**1 Pkt.**), Exponentialform $z = e^{\text{i}\varphi}$ (**1 Pkt.**).

(b) Wir nutzen die Polarform:

$$\begin{aligned}
z_{\pi/4} &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\text{i}) \;\; (\mathbf{0{,}5\ Pkt.})\\
z_{\pi/2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \text{i}\cdot 1 = \text{i} \;\; (\mathbf{0{,}5\ Pkt.})\\
z_{3\pi/4} &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{i}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\text{i}) \;\; (\mathbf{0.5\ Pkt.})\\
z_{\pi} &= \cos(\pi) + \text{i}\sin(\pi) = -1 + \text{i}\cdot 0 = -1 \;\; (\mathbf{0{,}5\ Pkt.})
\end{aligned}$$

(c) Wir erinnern uns an das Material, Kapitel 2.3: Für $b = 0$ beschreibt D eine Drehung von w um den Winkel $\varphi = \arg(z)$ (**1 Pkt.**). Das heißt für eine Rotation um den Winkel $\pi/5$ muss für z gelten:

$$z_{\pi/5} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad (\mathbf{1\ Pkt.})$$

(d) Die Schreibweise bedeutet: Wir müssen D für die gegebenen Parameter b und z berechnen und zwar für $w = 2e^{1+\text{i}\pi}$:

$$\begin{aligned}
D(2e^{1+\text{i}\pi}) &= e^{1+\text{i}\pi} + e^{-\text{i}\pi}\left(2e^{1+\text{i}\pi} - e^{1+\text{i}\pi}\right) = e^{1+\text{i}\pi} + e^{-\text{i}\pi}\cdot e^{1+\text{i}\pi} = e^{1+\text{i}\pi} + e^{-\text{i}\pi+1+\text{i}\pi}\\
&= e^{1+\text{i}\pi} + e = e\cdot(\cos\pi + i\sin\pi) + e = e\cdot(-1) + e = 0 \;\; (\mathbf{2\ Pkt.})
\end{aligned}$$

Dieser Rechenweg ist nicht eindeutig. Hier eine Alternative:

Zuerst stellen wir fest: $e^{1+\text{i}\pi} = e\cdot(\cos\pi + \text{i}\sin\pi) = -e$ und $e^{-\text{i}\pi} = \cos(-\pi) + \text{i}\sin(-\pi) = -1$

$$\Rightarrow \quad D(2e^{1+\text{i}\pi}) = D(-2e) = -e + (-1)\cdot(-2e - (-e)) = -e - (-2e + e) = -e - (-e) = -e + e = 0$$

Aufgabe 3 (AFB III) (4 Pkt.)

1 Möglichkeit 1: Beweis durch „Rechnen“

Wir zeigen 2 Tatsachen:

(a) $D(w)$ hat denselben Abstand zu b hat, wie w zu b, d. h. $D(w)$ und w liegen immer auf einem Kreis um b (**1 Pkt.** für diesen Ansatz).

(b) Der Winkel zwischen der Verbindung $b \to w$ und $b \to D(w)$ ist gerade gleich $\arg(z)$ ist (**1 Pkt.** für diesen Ansatz).

Wir nennen diesen Gesuchten Winkel (Schwarzer Winkel bei b in der Skizze) α. Außerdem entnehmen wir der Skizze, dass der schwarze Winkel und der Blaue gleich sind.

(a) $|D(w) - b| = |b - (b + z(w - b))| = |b - b - z(w - b)| = |z(w - b)| = |z| \cdot |w - b| = |w - b|$ (**1 Pkt.**)

(b) $\alpha = \arg\big(z(w - b)\big) - \arg(w - b) \overset{(I)}{=} \arg(z) + \arg(w - b) - \arg(w - b) = \arg(z)$ (**1 Pkt.**)

Dabei wurde in (I) genutzt, dass für den Winkel eines Produktes gleich der Summe der Winkel der Faktoren ist.

2 Möglichkeit 2: Begründung durch „Argumentation“

Im ersten Schritt findet eine Translation von w um $-b$ statt (**1 Pkt.**). Dann wird $w - b$ um den Ursprung gedreht (**1 Pkt.**). Anschließend wird der gedrehte Punkt $z(w - b)$ um $+b$ zurück verschoben (**1 Pkt.**). Dadurch wird $z(w - b)$ zurück auf den entsprechenden Kreis um b verschoben. Da die Verschiebung von w um $-b$ und die Verschiebung von $z(w - b)$ um $+b$ parallel sind (wichtig!) ist der Winkel der Rotation gerade gleich $\varphi = \arg(z)$ (**1 Pkt.**).