I. Gebrochen-rationale Funktionen

1. Definitionslücken

DEFINITION

Funktionen der Form $f: x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ mit zwei ganzrationalen Funktionstermen $p(x)$ und $q(x)$ nennen wir gebrochen-rationale Funktionen.

Da die Funktion $q: x \longmapsto q(x)$ im Nenner ganzrational ist, kann sie Nullstellen x_0 enthalten für die gilt $q(x_0) = 0$, woraus folgen würde: $f(x_0) = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \frac{p(x_0)}{0}$ ↯

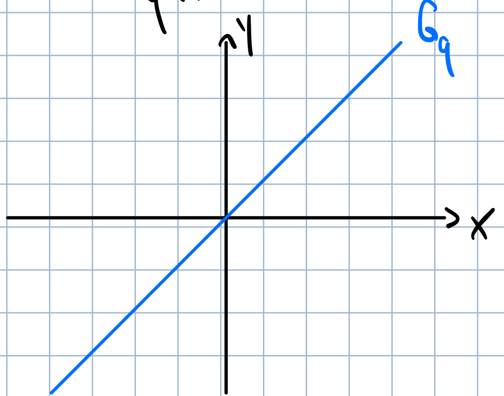
MERKE

Ist $f: x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ eine gebrochen-rationale Funktion und sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Nullstellen der Nennerfunktion q, so ist f definiert auf $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_1; x_2; \dots, x_n\}$

Die <u>Nullstellen der Nennerfunktion</u> q <u>sind</u> somit die <u>Definitionslücken von f</u>.

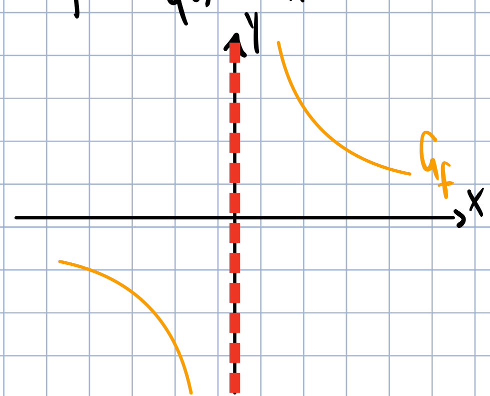
Um das Verhalten von f um die Definitionslücken herauszufinden, betrachten wir beispielhaft folgende Funktionen:

$q(x) = x$



=> Nullstelle mit VZW

$f(x) = \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{x}$



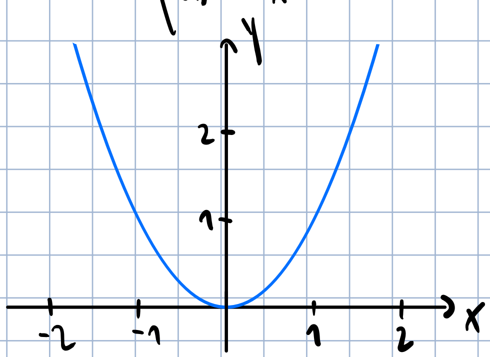
=> Polstelle mit VZW

Rechnerisch

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1^{\to 1}}{x_{\to 0^-}} = -\infty$$

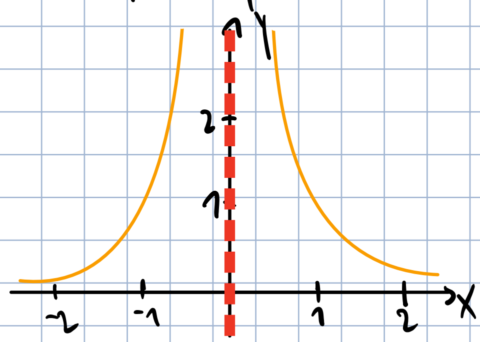
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1^{\to 1}}{x_{\to 0^+}} = +\infty$$

$g(x) = x^2$



$\Rightarrow$ Nullstelle ohne VZW

$f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2}$



$\Rightarrow$ Polstelle ohne VZW

Rechnerisch

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\underset{\to 0^+}{x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\underset{\to 0^+}{x^2}} = \infty$$

<u>Beispiel</u>: $f: x \longmapsto \frac{x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

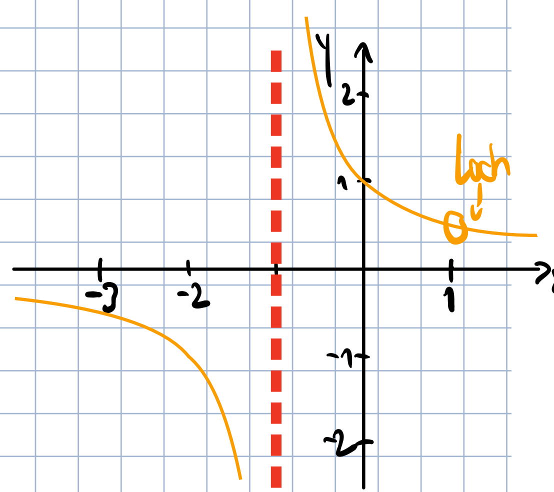
Wir vermuten bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ Polstellen mit VZW (da einfache Nennernullstellen)

<u>ABER</u>: $x_2 = 1$ ist auch Nullstelle des Zählers, weshalb folgt

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overset{\to 1}{1}}{\underset{\to 2}{x+1}} = \frac{1}{2} = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Der Graph der Funktion f sieht aus wie der Graph der gekürzten Funktion $g: x \longmapsto \frac{1}{x+1}$, besitzt jedoch am Punkt $(1 \mid \frac{1}{2})$ ein Loch.

Dies nennen wir eine <u>hebbare Definitionslücke</u>.



<u>MERKE</u>

Sei x_0 eine Nullstelle des Nenners einer gebrochen-rationalen Funktion f, so ist dort...

... eine hebbare Definitionslücke, wenn sie herauskürzbar ist.

... eine <u>Polstelle mit VZW</u>, wenn ihre <u>Vielfachheit</u> nach dem <u>vollständigen Kürzen</u> <u>ungerade</u> ist.

... eine <u>Polstelle ohne VZW</u>, wenn ihre <u>Vielfachheit</u> nach dem <u>vollständigen Kürzen</u> gerade ist.

[illegible]