Variable aleatoria discreta y distribución binomial

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach	Estadística 02	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Variables aleatoria discreta y continua. Función de probabilidad y función de distribución. Distribución binomial.

Vídeo asociado:

https://youtu.be/Ic9f8drN-S8

¿QUÉ ES UNA VARIABLE ALEATORIA?

Cuando el valor de una variable estudiada dentro de una muestra de una población no puede predecirse a priori, diremos que la variable es aleatoria. Suele reservarse la letra mayúscula X para hablar referirse a la variable aleatoria.

Por ejemplo: lanzar un dado 100 veces y anotar cuántas veces aparece el valor 4: ¡Es imposible saber a priori cuántas veces aparecerá el número 4!

Si hemos estudiado (en el bloque de "Probabilidad") que en un dado solo hay seis posibilidades, y podemos fijar al valor 4 una probabilidad 1/6 de aparecer debido a la regla de Laplace. Esta probabilidad a priori se puede calcular porque la variable toma un conjunto de valores discretos.

Pero si la variable toma un conjunto de valores continuo, el número de casos totales se hace tan grande que al aplicar la regla de Laplace la probabilidad de un caso favorable tiende a cero. Por ejemplo: probabilidad de que un alumno obtenga una nota de 6,325 en un examen de matemáticas realizado a 100 alumnos de una asignatura.

Que la probabilidad según la regla de Laplace tienda a 0 no significa que el suceso sea imposible. Significa que el total de casos posibles es muy, muy, muy grande en comparación con un único caso favorable.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD PARA VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Supongamos una variable aleatoria discreta X que puede tomar un conjunto de valores indicados por $x_1, x_2, x_3, \dots$ Cada valor x_i tendrá una probabilidad de éxito $P(X = x_i) = p_i$. Así definiremos una función de probabilidad asociada a cada valor x_i:

$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$

Esta **función de probabilidad** cumple:

- **Nunca es negativa**: $0 \leq p_i \leq 1$
- La **suma de las probabilidades** asociadas a todos los valores **da 1**: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Los valores de las probabilidades asociadas a cada valor x_i suelen indicarse en forma de tabla o bien en forma de diagrama de barras (en el eje vertical aparecen los valores de la variable aleatoria x_i y la altura de cada barra es proporcional al valor de la probabilidad p_i).

Si en vez de representar la probabilidad de que aparezca el valor x_i, consideramos la probabilidad acumulada de que la variable aleatoria X tome valores menores o iguales a x_i estaremos ante una **función de distribución**:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i)$$

Para una variable aleatoria discreta, la función de distribución es escalonada (constante en cada intervalo), creciente y acotada:

$$0 \leq F(x_i) \leq 1$$

Para una pareja de valores $x_i < x_j$ se cumple:

$$F(x_j) - F(x_i) = P(x_i < x < x_j)$$

El valor de la función de distribución para el último valor de la variable discreta será igual a 1, ya que acumula la suma de probabilidades de todos los casos posibles.

X	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	…	p_n
$F(x_i) = P(X \leq x_i)$	p_1	$p_1 + p_2$	…	$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

PARÁMETROS DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

A partir de los valores de la función de probabilidad $f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$ podemos definir unos parámetros estadísticos que nos recordarán mucho a los estudiados en estadística unidimensional.

Media o esperanza matemática:

$$\mu = x_1\,p_1 + x_1\,p_1 + \ldots + x_n\,p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i$$

Varianza:

$$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$$

Desviación típica: la raíz cuadrada de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i}$$

EL EXPERIMENTO BINOMIAL

Supongamos un experimentos donde se realizan n ensayos idénticos. Cada ensayo es independiente de los demás.

Cada ensayo tiene dos resultados posibles: éxito o fracaso. La probabilidad de éxito se denomina p y es constante durante todo el experimento. Por lo tanto, la probabilidad de fracaso será $1 - p$.

Por ejemplo: el 60% de las personas mayores de edad de una ciudad han votado a un candidato A para ser alcalde. El 40% no ha votado a ese candidato A. Elegimos una muestra de 1.000 personas pertenecientes a toda la población. Y preguntamos a cada persona si ha votado o no al candidato A. Suponiendo que son sinceros, podemos afirmar:

- El experimento consiste en 1.000 ensayos iguales.
- Cada ensayo tiene dos posibilidades: votar A, no votar A.
- Cada ensayo es independiente de la respuesta de los otros ensayos.

- Si el tamaño de la población es muy grande en comparación con el tamaño de la muestra, aunque no haya reemplazamiento los resultados son muy similares al caso en que hubiera reemplazamiento (es decir, que se pudiera preguntar más de una vez a la misma persona).
- Estamos ante un muestro aleatorio simple: todos los miembros de la población tienen la misma posibilidad de ser elegidos.
- El experimento cumple las condiciones para ser un experimento binomial.

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL O DE BERNOULLI PARA VARIABLE DISCRETA

Si X es una variable aleatoria discreta que indica el número de éxitos obtenidos en un experimento binomial, diremos que **X es una variable aleatoria binomial B(n,p)**.

El valor **n indica el número de ensayos realizados**.

El valor **p indica la probabilidad de éxito en cada ensayo**.

Ejemplo: lanzamos ocho veces un dado y consideramos como éxito "obtener un número par". En este experimento binomial n=8 y p=1/2 ya que de seis casos posibles que hay en el dado tres son valores pares (3/6 = 1/2). Estamos ante una variable aleatoria binomial B(8,1/2).

Nuestra variable aleatoria X puede ser 0, 1, 2, …, 8, ya que recoge el número de valores pares que pueden salir en los ocho lanzamientos. Por lo tanto, es una variable discreta.

La probabilidad de que en n ensayos encontremos k éxitos de la variable discreta binomial X se conoce como **función de probabilidad binomial o función de probabilidad de la distribución binomial**:

$$\boldsymbol{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

$$\boldsymbol{donde\ \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

En nuestro ejemplo, si deseamos saber la probabilidad de éxito de obtener cinco veces un valor par al lanzar ocho veces un dado, operaremos así:

$$P(X=5)=\binom{8}{5}(1/2)^5(1-1/2)^{8-5}=\binom{8}{5}(1/2)^5(1/2)^3=\binom{8}{5}(1/2)^8=\frac{8!}{5!\,(8-5)!}(1/2)^8$$

$$P(X=5)=\frac{8!}{5!\,(3)!}(1/2)^8=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}(1/2)^8=\frac{56}{256}=7/32=21{,}88\%$$

Es decir, hay una probabilidad de éxito del 21,88% de lanzar ocho veces un dado y obtener un valor par en cinco tiradas.

DIFERENCIA ENTRE FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Puede parecer un poco trabalenguas, pero una cosa es la función de probabilidad de la distribución binomial:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Y otra cosa es la función de distribución (la palabra "probabilidad no aparece"), donde se acumulan los valores de la probabilidad para valores iguales o inferiores a k:

$$F(k)=P(X\leq k)$$

Siguiendo con el ejemplo anterior, del lanzamiento de un dado ocho veces, la probabilidad de obtener 5 veces un valor par resultó:

$$P(X=5)=21{,}88\%$$

Pero si ahora queremos saber la probabilidad acumulada de obtener hasta un máximo de 5 veces un valor par, deberemos realizar la siguiente suma de probabilidades:

$$F(5)=P(X\leq 5)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)$$

$P(X=0)=\binom{8}{0}(1/2)^0(1-1/2)^{8-0}=0{,}39\%$

$P(X=1)=\binom{8}{1}(1/2)^1(1-1/2)^{8-1}=3{,}13\%$

$P(X=2)=\binom{8}{2}(1/2)^2(1-1/2)^{8-2}=10{,}94\%$

$P(X=3)=\binom{8}{3}(1/2)^3(1-1/2)^{8-3}=21{,}88\%$

$P(X=4)=\binom{8}{4}(1/2)^4(1-1/2)^{8-4}=27{,}34\%$

$P(X=5)=\binom{8}{5}(1/2)^5(1-1/2)^{8-5}=21{,}88\%$

Por lo que la función de distribución (probabilidad acumulada) para k=5 resulta:

$F(5)=P(X\leq 5)=95{,}56\%$

¿POR QUÉ NO USAR DIAGRAMA DE ÁRBOL PARA RESOLVER EJERCICIOS DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL?

Si el experimento aleatorio estudia solo el éxito o el fracaso de una variable X, es muy sencillo dibujar el diagrama de árbol. En cada ensayo del experimento tendremos dos ramas: una con probabilidad p (éxito de X) y otra con probabilidad 1- p (fracaso de X).

Por lo tanto, ¿por qué no responder dibujando diagramas de árbol, tal y como aprendimos en el bloque de "Probabilidad"?

La respuesta es muy sencilla: porque sería muy largo de dibujar. Si en el ejemplo anterior hemos lanzado ocho veces un dado, tendríamos que encadenar en el diagrama de árbol cada uno de los ocho lanzamientos.

Y si el número de ensayos fuese 50 o 100… dibujar el diagrama de árbol sería un proceso extremadamente largo.

La distribución binomial permite obtener, con unas pocas ecuaciones, la probabilidad de k éxitos de un variable aleatoria dentro de un ensayo de tamaño n.

OTRO EJEMPLO RESUELTO

El 10% de las bombillas de las farolas que iluminan un pueblo se funde antes de un año. Si el pueblo posee 100 bombillas, calcula la probabilidad de que se deban cambiar al cabo del año un máximo de 4 bombillas.

Estamos ante un experimento binomial. La variable X es "bombilla fundida al cabo del año". La probabilidad de éxito de X es de 0,1. El tamaño de los ensayos es n=100. Estamos ante un experimento aleatorio simple (con reemplazo: si una bombilla se funde, se cambia por otra).

La variable X sigue la función de probabilidad binomial B(n=100,p=0,1).

Para que se fundan como máximo 4 bombillas necesitamos considerar la función de distribución (probabilidad acumulada):

$F(4)=P(X\leq 4)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)$

$P(X=0)=\binom{100}{0}(0{,}1)^0(1-0{,}1)^{100-0}=0\%$

$P(X=1)=\binom{100}{1}(0{,}1)^1(1-0{,}1)^{100-1}=0{,}03\%$

$P(X=2)=\binom{100}{2}(0{,}1)^2(1-0{,}1)^{100-2}=0{,}16\%$

$P(X=3)=\binom{100}{3}(0{,}1)^3(1-0{,}1)^{100-3}=0{,}59\%$

$P(X=4)=\binom{100}{4}(0{,}1)^4(1-0{,}1)^{100-4}=1{,}59\%$

$F(4)=P(X\leq 4)=2{,}37\%$

Interpretemos el resultado: la probabilidad acumulada es tan baja (2,37%) porque lo más probable es que se fundan más de 4 bombillas al cabo de un año.

¿Cuál sería el valor más probable de bombillas fundidas dentro de las 100 que hay en el pueblo?

Es lo que se conoce como esperanza de la distribución, o lo que es lo mismo, valor medio esperado. Y es uno de los parámetros estadísticos que vamos a definir a continuación.

PARÁMETROS ESTADÍSTICOS DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

En toda distribución estadística tiene sentido hablar del valor esperado para la variable aleatoria (media) y del grado de desviación del experimento respecto del valor medio (varianza y su desviación típica asociada).

Media o esperanza matemática para B(n,p):

$\mu = n \cdot p$

Varianza:

$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = \mu \cdot (1 - p)$

Desviación típica:

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Un ejemplo:

La probabilidad de que un artículo fabricado sea defectuoso es 0,02. Se envía un cargamento de 10.000 artículos a unos grandes almacenes. ¿Cuál es el número esperado de artículos defectuosos, la varianza y la desviación típica?

La variable X "ser defectuoso" es una variable binomial en una distribución B(10.000,0,02).

Media: $\mu = n \cdot p = 10.000 \cdot 0{,}02 = 200$

Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 10.000 \cdot 0{,}02 \cdot (1 - 0{,}02) = 196$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{196} = 14$