SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Índice:

1. Introducción

En la mayoría de las ciencias e investigaciones científicas, surgen problemas que se deben resolver mediante un sistemas de ecuaciones lineales. Por ello, la resolución de los sistemas de ecuaciones es una importante herramienta matemática, necesaria en infinidad de problemas, tanto de carácter cotidiano, como de carácter complejo.

Para resolver problemas geométricos o de reparto, en las civilizaciones babilónicas o egipcia, se resolvieron sistemas de ecuaciones lineales sencillos, tal y como se recoge en algunas tablillas babilónicas y papiros egipcios.

También se sabe, que en la civilización griega se resolvieron algunos sistemas de ecuaciones, uti1izando métodos geométricos. Y que en la civilización china, se resolvieron algunos problemas de sistemas de ecuaciones de tres incógnitas.

*Sin embargo, el estudio mas riguroso de los sistemas de ecuaciones lineales fue iniciado por el matemático **Leibnitz** (1646-1716) y la solución de ecuaciones lineales utilizando determinantes fue estudiado por el matemático **MacLaurin** (1698-1746).*

*Otros matemáticos como **Cramer**, **Bezout** o **D'Alembert** estudiaron la relación entre los determinantes y las soluciones de los sistemas de ecuaciones.*

2. Ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal** con n incógnitas, es una expresión algebraica que se puede expresar de la forma

$$a_1 . x_1 + a_2 . x_2 + a_3 . x_3 + \ldots + a_n . x_n = b \qquad (1)$$

Donde

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ son números reales conocidos, que denominamos coeficientes,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales desconocidos, que denominamos variables,

Una solución de la ecuación lineal (1) es una n-tupla (*conjunto de n valores*), $(\alpha_{1,} \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ que cumplen la ecuación (1).

Cada una de las soluciones se denomina solución particular de la ecuación, mientras que el conjunto de todas las soluciones particulares, se denomina solución general de la ecuación.

La solución general de una ecuación de n incógnitas depende de (n-1) parámetros. El número (n-1) se denomina grado de indeterminación de la ecuación, que es el número de parámetros que aparece en la solución general.

 # Ejemplo.- La ecuación $x-3y+2z=2$ *es lineal, su grado de indeterminación es dos. Si despejamos la variable x, será:* $x=3y-2z+2$ *. Si denominamos,* $y=p, z=q$ *, la solución general, será de la forma*

$x=3p-2q+2$ *, con p y q números reales*

Para calcular una solución particular, basta con que demos dos valores particulares p y q, por ejemplo, si $p=0$ *,* $q=1$ *, será:*

$x=0, y=0, z=1$

3. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** es un conjunto de m ecuaciones de la forma

$$
\begin{aligned}
&a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+a_{13}.x_3+\ldots+a_{1n}.x_n=b_1\\
&a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+a_{23}.x_3+\ldots+a_{2n}.x_n=b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(2)}\\
&a_{m1}.x_1+a_{m2}.x_2+a_{m3}.x_3+\ldots+a_{mn}.x_n=b_m
\end{aligned}
$$

Donde,

$x_{1,}x_{2,}x_{3,}\ldots,x_n$ son las incógnitas o variables del sistema

Y para cada $i\in\{1,2,3,\ldots,m\}, j\in\{1,2,3,\ldots,n\}, a_{ij}, b_j\in\mathbb{R}$.

Los elementos a_{ij} se denomina coeficientes del sistema, y los elementos b_j , términos independientes.

Un conjunto ordenado de números reales $(r_{1,}r_{2,}r_{3,}\ldots,r_n)$ es una **solución del sistema** (2), si se cumple

$$
\begin{aligned}
&a_{11}.r_1+a_{12}.r_2+a_{13}.r_3+\ldots+a_{1n}.r_n=b_1\\
&a_{21}.r_1+a_{22}.r_2+a_{23}.r_3+\ldots+a_{2n}.r_n=b_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}.r_1+a_{m2}.r_2+a_{m3}.r_3+\ldots+a_{mn}.r_n=b_m
\end{aligned}
$$

La **solución general del sistema de ecuaciones** (2) es el conjunto de todas las soluciones particulares.

Si utilizamos matrices para representar un sistema de ecuaciones.

Denominando:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ **Matriz de coeficientes del sistema** de orden $m\,x\,n$

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ **Matriz de términos independientes**, de orden $m\,x\,1$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ **Matriz de variables o incógnitas**, de orden $n\,x\,1$

Podemos representar el sistema (2) mediante notación matricial como

$$A\,.\,X=B \qquad \textbf{(3)}$$

Si a la matriz A de coeficientes del sistema le añadimos como última columna la matriz B de términos independientes, obtenemos la matriz ampliada A* del sistema de ecuaciones

$$A^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

 # Ejemplo.- Si consideramos el sistema de ecuaciones lineales

$$2x-y+3z=1$$

$$5x+2y=3$$

$$4y-7z=0$$

La matriz asociada al sistema y su ampliada serán respectivamente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

También, podemos utilizar, matrices columnas

Denominando, $C_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, C_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, C_3=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \dots \\ a_{m3} \end{pmatrix}, \dots, C_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ a las columnas de la matriz A, el sistema (2), se puede también escribir como

$$C_1 . x_1 + C_2 . x_2 + C_3 . x_3 + \dots + C_n . x_n = B \qquad \textbf{(3)}$$

Esta relación expresa la columna B como combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes. Si tal combinación lineal es posible, dichos coeficientes, serán precisamente la solución del sistema (2)

 # Ejemplo: Dado el sistema de ecuaciones siguiente en notación por columnas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} . x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} . x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} . x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que es posible la combinación lineal, tomando

$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2)$,

dicho sistema es compatible determinado

4. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Cuando $b_j = 0$ para todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, decimos que el sistema (2), es un **sistema de ecuaciones homogéneo**

A todo sistema homogéneo cuyos coeficientes coincidan con los coeficientes del sistema (2), se le denomina **sistema de ecuaciones homogéneo asociado** al sistema de ecuaciones (2).

 # Ejemplo: El sistema lineal de ecuaciones

$$2x - y + z = 0$$

$$3x + 4z = 0$$

$$x + y = z$$

Es un sistema homogéneo

❑ Decimos que el sistema de ecuaciones lineales (2) es un **sistema incompatible** si no tiene ninguna solución.

- Decimos que el sistema de ecuaciones lineales (2) es un **sistema compatible** si admite solución. Además, si la solución admitida es única, decimos que es **compatible determinado**. Y en otro caso **compatible indeterminado**.

 # Ejemplo: Dados los sistemas de ecuaciones siguientes

(1)	*(2)*	*(3)*
$x+y+z=3$	$x+2y=3$	$x-y=1$
$2x-y+4z=10$	$-2x-4y=-6$	$-x+y=1$
$2y+5z=10$		

Tenemos que el sistema (1) es compatible determinado de solución (1,0,2).

El sistema (2) es compatible indeterminado de solución (3-2r , r) con r un número real,

El sistema (3) es incompatible.

5. Sistemas de ecaciones lineales equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando tiene las mismas soluciones.

Para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales, hallaremos mediante los criterios de equivalencia y la eliminación de ecuaciones, un sistema equivalente mas fácil de resolver.

Criterios de equivalencia

Criterio 1.- Producto por un número distinto de cero.

Si se multiplican los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número real distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.

# Ejemplo.- Los sistemas 1 y 2	S. Ecuaciones 1	S. Ecuaciones 2
	$2x+3y=4$	$k.(2x+3y)=k.4$
Son equivalentes	$5x+6y=7$	$5x+6y=7$

Criterio 2.- Suma de ecuaciones.

Si a una ecuación de un sistema se le suma otra ecuación del mismo, resulta un sistema equivalente al dado.

# Ejemplo.- Los sistemas 1 y 2	S. Ecuaciones 1	S. Ecuaciones 2
	$2x+3y=4$	$2x+3y=4$
Son equivalentes	$5x+6y=7$	$(2x+3y)+(5x+6y)=4+7$

Eliminación de ecuaciones en un sistema

Si en un sistema de ecuaciones lineales, una ecuación depende de otras, puede suprimirse, y el sistema resultante es equivalente al dado.

 # Ejemplo.- Los sistemas 1 y 2

S. Ecuaciones 1	S. Ecuaciones 2
$2x+3y=4$	$2x+3y=4$
$5x+6y=7$	$5x+6y=7$
$7x+9y=11$	

Son equivalentes, pues la tercera ecuación se obtiene sumando la primera y la segunda, luego puede suprimirse y resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas equivalente al dado.

Además, si cambiamos el orden de las ecuaciones, esto supone cambiar el orden de las filas correspondientes en la matriz ampliada.

6. Método de Gauss.

Dado un sistema de ecuaciones **(2)**

$$\begin{array}{l} a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+a_{13}.x_3+\ldots+a_{1n}.x_n=b_1 \\ a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+a_{23}.x_3+\ldots+a_{2n}.x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}.x_1+a_{m2}.x_2+a_{m3}.x_3+\ldots+a_{mn}.x_n=b_m \end{array}$$

Resolver el sistema por el método de Gauss consiste en hallar un sistema triangular equivalente

$$\begin{array}{lll} a^*_{11}.x_1+a^*_{12}.x_2+a^*_{13}.x_3+\ldots+a^*_{1n}.x_n=b^*_1 & & \\ 0.x_1+a^*_{22}.x_2+a^*_{23}.x_3+\ldots+a^*_{2n}.x_n=b^*_2 & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0.x_1+0.x_2+0.x_3+\ldots+a^*_{mm}.x_m+\ldots+a^*_{mn}.x_n=b^*_m & \text{si} \quad m<n & \text{(B)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0.x_1+0.x_2+0.x_3+\ldots+a^*_{nn}.x_n=b^*_n & \text{si} \quad m=n & \text{(A)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 0.x_1+0.x_2+0.x_3+\ldots+0.x_n=b^*_m & \text{si} \quad m>n & \end{array}$$

Y si $m\geq n$, despejamos de la ecuación (A), la incógnita x_n, y posteriormente sustituimos en la penúltima ecuación y despejar x_{n-1}, y así sucesivamente hasta despejar todas las variables.

Y si $m<n$, como será un sistema compatible indeterminado, se toman las variables

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ como parámetros, y se resuelve el sistema despejando de la ecuación (B), la incógnita x_m, y posteriormente sustituimos en la penúltima ecuación y despejar x_{m-1}, y así sucesivamente hasta despejar todas las variables $x_1, x_{2,} \dots, x_m$ en función de los parámetros. $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$

 # Ejemplo.- Para resolver el sistema de ecuaciones

$$x+y-2z=9$$

$$2x-y+4z=4$$

$$2x-y+6z=-1$$

por el método de Gauss.

Si lo transformamos en el siguiente sistema equivalente

	$x+y-2z=9$
$(2^{a}\,ecuación)-2.(1^{a}\,ecuación)$	$-3y+8z=-14$
$(3^{a}\,ecuación)-2.(1^{a}\,ecuación)$	$-3y+10z=-19$

Y después

	$x+y-2z=9$
	$-3y+8z=-14$
$(3^{a}\,ecuación)-(2^{a}\,ecuación)$	$2z=-5$

Que despejando, las respectivas variables será:

de la 3ª ecuación $\Rightarrow z=-\dfrac{5}{2}$,

sustituyendo z en la 2ª ecuación será:

de la 2ª ecuación $\Rightarrow 3y+8\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-14 \Rightarrow y=-2$

Y finalmente, sustituyendo x e y, en la 1ª ecuación, será

de la 1ª ecuación $\Rightarrow \quad x+(-2)-2.\left(-\dfrac{5}{2}\right)=9 \quad \Rightarrow \quad x=6$

Luego, la solución del sistema será

$$(x,y,z)=\left(6,-2,-\frac{5}{2}\right)$$

7. Discusión de sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.

Dado un sistema de ecuaciones A. X = B. Si denominamos por (A, B) a la matriz ampliada del sistema:

- Si al reducir (A,B) a la forma triangular aparece alguna fila en la que son nulos todos los elementos excepto el correspondiente al término independiente, el sistema es **incompatible**.
- En caso contrario el sistema es compatible y se distinguen dos casos:
  - Si el número de filas no nulas en la matriz triangular coincide con el número de incógnitas, el sistema es **determinado**.
  - Si el número de filas no nulas en la matriz triangular es menor con el número de incógnitas, el sistema es **indeterminado**.

 # Ejemplo.- Para discutir el siguiente sistema por el método de Gauss

$$x+y=5$$

$$2x-y=1$$

$$-3x+2y=0$$

Primero triangulamos la matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \rightarrow \\ F_2-2F_1 \\ F_3+3F_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rightarrow \\ 5F_2 \\ 3F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -45 \\ 0 & 15 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \rightarrow \\ . \\ F_3+F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -45 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa que el número de filas no nulas es dos, que coincide con el número de incógnitas; por tanto un sistema compatible determinado

 # Ejemplo.- Para discutir el siguiente sistema por el método de Gauss

$$x+y+z=4$$

$$-x+2y-z=0$$

$$2x-y+2z=0$$

Primero triangulamos la matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \rightarrow \\ F_2+F_1 \\ F_3-2F_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ . \\ F_3+F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Como se observa que la última fila tiene todos los elementos nulos, excepto el término independiente, que es – 4, se trata de un sistema incompatible.

 # Ejemplo.- Para discutir el siguiente sistema por el método de Gauss

$$3x-4y=2$$

$$12x=8+16y$$

Primero triangulamos la matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 12 & -16 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4F_1 \\ \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 16 & -8 \\ 12 & -16 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ F_2+F_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa que el número de filas no nulas es 1, que es menor que el número de incógnitas; por tanto un sistema compatible indeterminado, y la solución depende de un parámetro,

8. Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros

Es frecuente encontrar sistemas de ecuaciones lineales en los que algunos de los coeficientes o términos independientes, son valores desconocidos, y que denominamos parámetros. La discusión de este tipo de sucesos consiste en hallar los valores de dichos parámetros, para los cuales el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

 # Ejemplo.- Para discutir el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$$x-2y=4$$

$$3x+5y=1$$

$$8x-2y=a$$

podemos tomar la matriz ampliada del sistema de ecuaciones y hacer las transformaciones necesarias, hasta diagonalizar la matriz, es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -2 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ F_2-3F_1 \\ \cdot \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & -11 \\ 8 & -2 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \cdot \\ F_3-8F_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 14 & a-32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ -14F_2 \\ 11F_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -154 & 154 \\ 0 & 154 & 11a-352 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ \cdot \\ F_3+F_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -154 & 154 \\ 0 & 0 & 11a-198 \end{pmatrix}$$

Luego:

Si $11a-198=0 \Rightarrow a=18$ *, el sistema es compatible determinado*

Si $11a-198\neq 0 \Rightarrow a\neq 18$ *, el sistema es incompatible*

 # Ejemplo.- Para discutir el sistema de ecuaciones por el método de Gauss

$3x-y=2$

$2x+ay=b$

podemos tomar la matriz ampliada del sistema de ecuaciones y hacer las transformaciones necesarias, hasta diagonalizar la matriz, es decir

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2F_1 \\ -3F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -6 & -3a & -3b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \\ F_2+F_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & -3a-2 & 4-3b \end{pmatrix}$$

Luego:

Si $-3a-2\neq 0 \Rightarrow a\neq -\frac{2}{3}$ *, es compatible determinado para cualquier valor de b,*

Si $-3a-2=0 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$

Y si $4-3b=0 \Rightarrow b=\frac{4}{3}$ *, el sistema es compatible indeterminado*

Y si $4-3b=0 \Rightarrow b\neq \frac{4}{3}$ *, el sistema es incompatible*

9. Método de Gauss-Jordan

Utilizar el método de Gauss-Jordan, consiste en encontrar un sistema de ecuaciones diagonal, es decir de la forma

$$x_1+0.x_2+0.x_3+\ldots+0.x_n=b_1^*$$
$$0.x_1+x_2+0.x_3+\ldots+0.x_n=b_2^*$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0.x_1+0.x_2+0.x_3+\ldots+x_n=b_m^*$$

Y los valores de las variables serán $x_1=b_1^*$; $x_2=b_2^*$, ... , $x_n=b_n^*$.

 # Ejemplo.- Para resolver el sistema de ecuaciones en notación matricial

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$$

por el método de Gauss – Jordan, podemos tomar la matriz ampliada del sistema de ecuaciones y hacer las transformaciones necesarias, hasta diagonalizar la matriz, es decir

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 9\\ 2 & -1 & 4 & 4\\ 2 & -1 & 6 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \\ (2^a\ fila)-2.(1^a\ fila)\\ (3^a\ fila)-2.(1^a\ fila)\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 9\\ 0 & -3 & 8 & -14\\ 0 & -3 & 10 & -19\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \\ \\ (3^a\ fila)-(2^a\ fila)\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 9\\ 0 & -3 & 8 & -14\\ 0 & 0 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}(1^a\ fila)+(3^a\ fila)\\ (2^a\ fila)-4.(3^a\ fila)\\ \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 4\\ 0 & -3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)(2^a\ fila)\\ \left(\frac{1}{2}\right)(3^a\ fila)\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}(1^a\ fila)-(2^a\ fila)\\ \\ \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ -2\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

10. Eliminación de parámetros

En general, a partir de un sistema de ecuaciones lineales en las que aparecen parámetros, utilizando el método de Gauss y basándose en la compatibilidad del sistema, podremos obtener un sistema equivalente en el cual, ya no aparecerán los parámetros.

 # Ejemplo.- Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$x+2y-z=4$$

$$-x+y+2z=5$$

$$3y+z=9$$

Que es un sistema compatible indeterminado y su solución escrita en forma paramétrica es

$$\left.\begin{array}{l} x=-2+\dfrac{5\lambda}{3} \\ y=3-\dfrac{\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2+\dfrac{5z}{3} \\ y=3-\dfrac{z}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-5z=-6 \\ 3y+z=9 \end{array}\right\}$$

Donde, este último sistema, sin parámetros, es equivalente al sistema inicial y tiene la misma solución.

 # Ejemplo.- Vamos a eliminar los parámetros del sistema

$$\begin{array}{l} x=-p+3q \\ y=p-2q \\ z=p+q \\ t=2q \end{array}$$

Tomamos la matriz ampliada del sistema, considerando p y q variables, y x, y, z, t los términos independientes, y aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & x \\ 1 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 4 & x+z \\ 0 & 2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ \cdot \\ F_3-4F_2 \\ F_4-2F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -3x-4y+z \\ 0 & 0 & -2x-2y+t \end{pmatrix}$$

Luego, la compatibilidad del sistema obliga a que se cumpla

$$\begin{array}{l} -3x-4y+z=0 \\ -2x-2y+t=0 \end{array}$$

Que es un sistema equivalente al inicial.

1. Criterio de compatibilidad. Teorema de Rouché-Frobenius.

Dado un sistema de ecuaciones en notación matricial

$$A.X=B$$

y denominamos $A^*=(A,B)$ a la matriz ampliada.

Teorema de Rouchè-Frobeniues.- El sistema de ecuaciones lineales $A.X=B$ es compatible $\Leftrightarrow Rango\ A=Rango\ A^*$

 # Ejemplo.-

- *El sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ 3x+4y=3 \end{Bmatrix}$$

cuya notación matricial es

$$A.X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=B$$

es compatible, ya que

$$Rango\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=2=Rango\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

El Rango de la matriz A indica el número de ecuaciones independientes, que en el caso de que el sistema esté compuesto por n ecuaciones con n incógnitas, si $Rango\ A=n$ **el sistema es compatible determinado** y si $Rango\ A=r<n$ **el sistema es compatible indeterminado**, y podemos elegir $n-r$ ecuaciones independientes y se pasan al segundo miembro las $n-r$ incógnitas, designándolas nuevamente con t_1 , t_2 , t_3 , … , t_{n-r} y la solución dependerá de los $n-r$ parámetros reales.

 # Ejemplo.-

- *El sistema de ecuaciones* $\begin{Bmatrix} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{Bmatrix}$ *que en notación matricial es*

$$A.X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=B$$

es un sistema de ecuaciones compatible, ya que

$$Rango\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\3&3&3\end{pmatrix}=2=Rango\begin{pmatrix}1&2&1&1\\2&1&2&2\\3&3&3&3\end{pmatrix}$$ *(la fila 3 es suma de las filas 1 y 2)*

El sistema lo podemos reducir (eliminando la ecuación 3 o fila 3 de la matriz ampliada) a

$$\begin{Bmatrix}x+2y+z=1\\2x+y+2z=2\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{Bmatrix}x+2y=1-z\\2x+y=2-2z\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{Bmatrix}x+2y=1-t\\2x+y=2-2t\end{Bmatrix};t\in\mathbb{R}$$

o en notación matricial

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-z\\2-2z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-t\\2-2t\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}$$

Y el sistema de ecuaciones depende de un parámetro $t\in\mathbb{R}$.

También podemos utilizar el teorema de Rouchè-Frobenius, para discutir sistemas de ecuaciones lineales con parámetros.

 # Ejemplo.-

- *El sistema de ecuaciones*

$$\begin{Bmatrix}x+ky-z=1\\2x+y-kz=2\\x-y-z=k-1\end{Bmatrix}$$

que en notación matricial es

$$A.X=\begin{pmatrix}1&k&-1\\2&1&-k\\1&-1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\k-1\end{pmatrix}=B$$

tiene por parámetro k, y para cada valor real que toma k se obtiene un sistema distinto en particular, y teniendo en cuenta que

$$Rango\begin{pmatrix}1&k&-1\\2&1&-k\\1&-1&-1\end{pmatrix}=3=Rango\begin{pmatrix}1&k&-1&1\\2&1&-k&2\\1&-1&-1&k-1\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow k\neq\{-1,2\}$$

Para ello, basta comprobar:

$$\begin{vmatrix}1&k&-1\\2&1&-k\\1&-1&-1\end{vmatrix}=-k^2+k+2=0\Leftrightarrow k\in\{-1,2\}$$

Y por tanto, tendremos que:

Si $k\neq\{-1,2\}$ ***es un sistema compatible determinado.***

Si $k=2$ ***, como***

$$Rango\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=2=Rango\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}<3$$

es un sistema compatible indeterminado*, del cual se puede eliminar un ecuación, y la ecuación depende de un parámetro t, quedando como*

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\ 2+2t\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}$$

Si $k=-1$ **, como**

$$Rango\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=2\neq 3=Rango\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

es un sistema de ecuaciones incompatible *y no tiene solución.*

2. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Cramer.

Un sistema de ecuaciones lineales

$$a_{11}.x_1+a_{12}.x_2+a_{13}.x_3+\ldots+a_{1n}.x_n=b_1$$

$$a_{21}.x_1+a_{22}.x_2+a_{23}.x_3+\ldots+a_{2n}.x_n=b_2$$

....

$$a_{m1}.x_1+a_{m2}.x_2+a_{m3}.x_3+\ldots+a_{mn}.x_n=b_m$$

es un sistema de Cramer si cumple las siguientes condiciones:

a) Tiene n ecuaciones y n incógnitas, es decir si m = n.

b) El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

Un sistema de Cramer es por definición compatible, ya que

$$Rango(C_{1,}C_{2,}\ldots,C_n)=Rango(C_{1,}C_{2,}\ldots,C_n,B)$$

Donde

$$C_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \ldots\\ a_{n1}\end{pmatrix},C_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \ldots\\ a_{n2}\end{pmatrix},C_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ \ldots\\ a_{n3}\end{pmatrix},\ldots,C_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \ldots\\ a_{nn}\end{pmatrix}$$

 # Ejemplo.-

El sistema de ecuaciones en notación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es un sistema de Cramer, ya que tiene tres ecuaciones y tres incógnitas, y el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales de Cramer

$$a_{11} . x_1 + a_{12} . x_2 + a_{13} . x_3 + \ldots + a_{1n} . x_n = b_1$$

$$a_{21} . x_1 + a_{22} . x_2 + a_{23} . x_3 + \ldots + a_{2n} . x_n = b_2$$

....

$$a_{n1} . x_1 + a_{n2} . x_2 + a_{n3} . x_3 + \ldots + a_{nn} . x_n = b_n$$

Denominando

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \ldots \\ a_{n3} \end{pmatrix}, \ldots , C_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

obtendremos la solución

$$x_1 = \frac{det(B, C_2, C_3, \ldots , C_n)}{det(C_1, C_2, C_3, \ldots , C_n)}$$

$$x_2 = \frac{det(C_1, B, C_3, \ldots , C_n)}{det(C_1, C_2, C_3, \ldots , C_n)}$$

$$x_3 = \frac{det(C_1, C_2, B, \ldots , C_n)}{det(C_1, C_2, C_3, \ldots , C_n)}$$

. . . .

$$x_n = \frac{det(C_1, C_2, C_3, \ldots , B)}{det(C_1, C_2, C_3, \ldots , C_n)}$$

 # Ejemplo.-

La solución del sistema de Cramer $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 4\\ -1\end{pmatrix}$ *es*

$$x=\frac{\begin{vmatrix}9 & 1 & -2\\ 4 & -1 & 4\\ -1 & -1 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{vmatrix}}=6\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 9 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{vmatrix}}=-2\ ;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 4\\ 2 & -1 & 6\end{vmatrix}}=-\frac{5}{2}\ ;$$