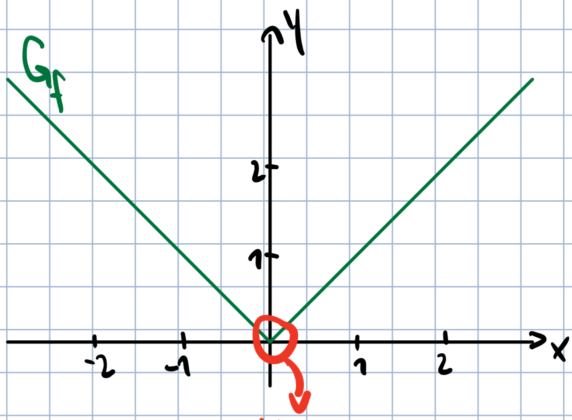
3. Differenzierbarkeit

Wir betrachten die sogenannte Betragsfunktion $f: x \longmapsto |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases}$



nicht differenzierbar

Für die Stelle $x=0$ ist die lokale Änderungsrate schwer bestimmbar, weshalb wir mit den einseitigen Differentialquotienten ansetzen:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

↯

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

Da linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0}$ nicht und wir sagen:

DEFINITION

Ist der Grenzwert $m_{x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ für eine Stelle x_0 einer Funktion f eindeutig definiert, so nennen wir f an dieser Stelle x_0 <u>differenzierbar</u> bzw. <u>ableitbar</u>.

Man nennt den Grenzwert m_{x_0} die <u>Ableitung von f an der Stelle x_0</u> und schreibt $\underline{f'(x_0)}$.

Ist die Funktion f für alle Werte aus einem Intervall I differenzierbar, so nennt man f eine <u>auf I differenzierbare Funktion</u>.