Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 13 - raíces en forma polar

1. Resuelve $x^4+16=0$

$$x^4=-16 \quad \rightarrow \quad x=\sqrt[4]{-16}$$

Expresamos -16 como complejo en forma polar → $-16+0i \rightarrow 16_{180^o+360^o k,\, k\in\mathbb{R}}$

$$x=\sqrt[4]{16_{180^o}} \quad \rightarrow \quad x=2_{\frac{180^o+360^o k}{4}},\, k=0,1,2,3$$

Las cuatro soluciones son de igual módulo y con fases diferenciadas en 90º.

$$x=2_{45^o} \quad , \quad x=2_{135^o} \quad , \quad x=2_{225^o} \quad , \quad x=2_{315^o}$$

A cada solución podemos sumarle todas las vueltas de 360º que deseemos aplicar.

Con notación unificada la solución queda → $2_{45^o+90^o k},\, k\in\mathbb{Z}$

2. Opera y simplifica.

$$\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}+i)^2}}$$

Expresamos cada número complejo en forma polar.

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i \quad \rightarrow \quad \text{módulo}=\sqrt{2+2}=2 \quad , \quad fase=arcotg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)=45º \quad \rightarrow \quad 2_{45º}$$

$$\sqrt{3}+i \quad \rightarrow \quad \text{módulo}=\sqrt{3+1}=2 \quad , \quad fase=arcotg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30º \quad \rightarrow \quad 2_{30º}$$

Elevamos el numerador al cubo → $(2_{45º})^3=8_{135º}$

Elevamos el denominador al cuadrado → $(2_{30º})^2=4_{60º}$

Dividimos numerador entre denominador → $\dfrac{8_{135º}}{4_{60º}}=2_{75º}$

Aplicamos raíz cuarta al resultado del cociente → $\sqrt[4]{2_{75º}}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{75º+360º k}{4}}\ , k=0,1,2,3$

Las cuatro soluciones resultan:

$$(\sqrt[4]{2})_{18,75º} \quad , \quad (\sqrt[4]{2})_{108,75º} \quad , \quad (\sqrt[4]{2})_{198,75º} \quad , \quad (\sqrt[4]{2})_{288,75º}$$

Cada fase con todas la vueltas de 360º que deseemos aplicar.

3. Una de las soluciones de la raíz quinta de un número complejo es el afijo $A(1,\sqrt{3})$. Calcula las restantes soluciones de esa raíz quinta, en forma trigonométrica.

Sabemos que las soluciones de una raíz quinta comporten el mismo módulo (en forma polar) y las fases se diferencian en 72º, ya que $\frac{360º}{5}=72º$.

$$A(1,\sqrt{3}) \rightarrow 1+\sqrt{3} \rightarrow módulo=\sqrt{1+3}=2 \quad , \quad fase=arcotg(\frac{\sqrt{3}}{1})=60º$$

$$(2)_{60º} \rightarrow 2\cdot\cos(60º)+2\cdot sen(60º)i$$

El resto de soluciones son:

$$(2)_{60º+72º}=(2)_{132º} \rightarrow 2\cdot\cos(132º)+2\cdot sen(132º)i$$

$$(2)_{132º+72º}=(2)_{204º} \rightarrow 2\cdot\cos(204º)+2\cdot sen(204º)i$$

$$(2)_{204º+72º}=(2)_{276º} \rightarrow 2\cdot\cos(276º)+2\cdot sen(276º)i$$

$$(2)_{276º+72º}=(2)_{348º} \rightarrow 2\cdot\cos(348º)+2\cdot sen(348º)i$$

4. Calcular todas las raíces de la ecuación $x^6+32=0$ **.**

$$x^6+32=0 \ \rightarrow \ x^6=-32 \ \rightarrow \ x^6=32_{180º}$$

Donde hemos utilizado que un número real negativo se encuentra sobre el semieje negativo real, por lo que su fase (en forma polar) es 180º.

$$x=(\sqrt[6]{32})_{\frac{180º+360º k}{6}, \ k=0,1,2,3,4,5}$$

$$x=(\sqrt[6]{32})_{30º} \ , \ x=(\sqrt[6]{32})_{90º} \ , \ x=(\sqrt[6]{32})_{150º} \ , \ x=(\sqrt[6]{32})_{210º} \ , \ x=(\sqrt[6]{32})_{270º} \ , \ x=(\sqrt[6]{32})_{330º}$$

Donde podemos aplicar cualquier número de vueltas de 360º a las fases.

5. Demuestra que para el complejo $z=\cos x-i\cdot sen\,x$ se verifica $\frac{1}{z}=\cos x+i\cdot sen\,x$. Si $x=45^{o}$, halla las raíces cúbicas del complejo z .

$z=\cos x-i\cdot sen\,x$

$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos x-i\cdot sen\,x}$ → Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador.

$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos x-i\cdot sen\,x}\cdot\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos x+i\cdot sen\,x}$ → $\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos^2 x-i^2\cdot sen^2 x}$ → $\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{\cos^2 x+sen^2 x}$

$\frac{1}{z}=\frac{\cos x+i\cdot sen\,x}{1}$ → $\frac{1}{z}=\cos x+i\cdot sen\,x$ → Como queríamos demostrar.

Donde hemos utilizado la relación fundamental de trigonometría → $\cos^2 x+sen^2 x=1$

Si $x=45^{o}$ → $z=\cos 45^{o}-i\cdot sen\,45^{o}$ → $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

En formato polar → $z=1_{315^{o}}$

Calculamos la raíz cúbica de este complejo, obteniendo tres soluciones de igual módulo, pero con fases diferenciándose en 120º.

$\sqrt[3]{z}=1_{\frac{315^{o}+360^{o}k}{3},\,k=0,1,2}$ → $\sqrt[3]{z}=1_{105^{o}}$, $\sqrt[3]{z}=1_{225^{o}}$, $\sqrt[3]{z}=1_{345^{o}}$

Recordando que, en cada fase, podemos sumar el número de vueltas completas de 360º que deseemos.