Kochrezept zur Analyse gebrochen-rationaler Funktionen

Die Aufgabenstellung, zu einer gegebenen gebrochen-rationalen Funktion $f: x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ den zugehörigen Graphen G_f zu skizzieren, lässt sich durch die Anwendung eines „Kochrezeptes" bewältigen:

1.) Bestimme das Verhalten des Funktionsgraphen im Unendlichen. Wir unterscheiden dabei folgende Fälle:

   a) $z < n$: Waagrechte Asymptote bei $y = 0$.

   b) $z = n$: Waagrechte Asymptote bei $y = c$, wobei c der Quotient der Leitkoeffizienten ist.

   c) $z = n + 1$: Schräge Asymptote in Form einer linearen Funktion. Die schräge Asymptote kann aus der dargestellten Form <u>nicht bestimmt</u> werden, sondern entspricht in der Form $f(x) = g(x) + h(x)$ der Funktion h, wenn g dem Fall a entspricht.

   d) $z > n + 1$: Schiefe Asymptote in Form einer ganzrationalen Funktion von Grad $z - n$. Die Asymptote kann nur wie in Fall c bestimmt werden.

2.) Bestimme die Definitionslücken (also die Nullstellen der Funktion q) und schreibe damit $q(x)$ in der faktorisierten Form.

3.) Bestimme die Nullstellen von f (also die Nullstellen der Funktion p) und schreibe damit $p(x)$ in der faktorisierten Form.

4.) Kürze den Funktionsterm $f(x)$ vollständig. Nun gilt:

   i) Bei einer Nullstelle mit ungerade Vielfachheit ist ein VZW (Schnittpunkt!)

   ii) Bei einer Nullstelle mit gerade Vielfachheit ist kein VZW (Berührpunkt!)

   iii) Bei einer Nennernullstelle mit ungerader Vielfachheit ist eine Polstelle mit VZW.

   iv) Bei einer Nennernullstelle mit gerader Vielfachheit ist eine Polstelle ohne VZW.

   v) Bei allen Nennernullstellen, die sich vollständig herauskürzen lassen, befindet sich ein Loch im Graph (entspricht einer hebbaren Definitionslücke).

5.) Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse $SP_Y\ (0|f(0))$.

6.) Bestimme das Verhalten des Funktionsgraphen an der ersten Polstelle x_0 von links kommend:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

7.) Zeichne alle Asymptoten und Nullstellen sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse ein. Schließe anschließend von der ersten Polstelle (Schritt 6!) auf das Verhalten der Funktion unter Beachtung der Tatsache, dass nur an den Polstellen und Nullstellen sich das Vorzeichen ändern kann!

Fertig. ☺