

Auf diesem Arbeitsblatt sollen Sie sich mit dem Thema Populationsdynamik befassen. Am Ende soll Ihnen zum einen klar werden, was **stochastische Matrizen** und **Vektoren** sind, zum anderen wie man diese zum **Modellieren** von Problemen einsetzen kann, insbesondere speziell in Bezug auf Populationsdynamiken bei Fischottern.

Aufgabe 1

Lesen Sie den folgenden Text durch und markieren oder notieren Sie Angaben, die Ihnen wichtig erscheinen.

2.2.2 Sozialverhalten und Fortpflanzung

Mit zwei Jahren erreichen die Fähen der Fischotter die Geschlechtsreife, die Rüden später erst nach zwei bis drei Jahren. Den überwiegenden Teil des Jahres leben Fähe und Rüde einzeltägerisch in ihrem markierten Revier und bleiben auch in der Paarungszeit nur kurz zusammen. Die Paarungsbereitschaft signalisieren beide Geschlechter über Duftmarken, locken sich gegenseitig zusätzlich auch durch lautes und dauerhaftes Pfeifen an. Da mehrere Fähen gemeinsame Streifgebiete haben, nutzen die Rüden sich jede Gelegenheit zur Paarung. Die Kopulation findet sowohl an Land als auch im Wasser statt, wobei der Rüde mardertypisch die Fähe durch einen Nackenbiss festhält.

Die Ranzzeit ist an keine bestimmte Jahreszeit gebunden, so dass gleichmäßig über das ganze Jahr verteilt nach einer zweimonatigen Trächtigkeit des Weibchens (Gefangenschaftsbeobachtungen geben Werte von 59 bis 66 Tagen an) zwei bis drei Junge (im Schnitt 2,3 Junge/Wurf) mit einem Geburtsgewicht von je 100 g geworfen werden können. Diese kommen als typische Nesthocker in einem ausgepolsterten Bau, immer mit einem Ausgang zum Wasser und zum Land, oder in einem Schilfnest blind und zahnlos zur Welt. Der erste Zahn bricht in einem Alter von zwei bis drei Wochen durch, und erst danach in der vierten bis fünften Lebenswoche öffnen sich die Augen. Die Fähe säugt ihre Jungen mit ihren drei Paar Zitzen ca. sechs Monate lang; hierbei äußern die Kleinen ein Fiepen, das eher einem Vogelgezwitscher ähnelt. Im Alter von drei Monaten können die Jungotter schon feste Nahrung zu sich nehmen. Der Otterrüde beteiligt sich nicht an der Aufzucht der Jungen. Nach rund acht Wochen führt die Fähe sie zum ersten Mal aus dem Bau raus. Während der Aufzucht ihrer Jungen reagiert die Fähe aggressiv gegen Artgenossen und duldet weder das Männchen noch andere Otter in der Nähe des Baus. Die natürliche Sterblichkeit der Jungtiere (Abb. 3) liegt bei 50%, und nur 15% der Jungtiere werden älter als drei Jahre. Nach einem Jahr verlassen die Jungtiere das Muttertier, um ein eigenes Revier zu suchen. In freier Wildbahn haben Fischotter eine Lebenserwartung von acht bis zwölf Jahren; das Höchstalter liegt bei achtzehn Jahren und wird praktisch nur in Gefangenschaft erreicht.



Abb. 3: Fischotterjungtier im
Otterzentrum Hankensbüttel

Aufgabe 2

- a) Es bezeichne X das erreichte Lebensalter der Fischotter. Argumentieren Sie, basierend auf dem Text, wie groß, Ihrer Meinung nach, der Erwartungswert $E(X)$ ist.
- b) Wir betrachten 4 Fähen die trächtig geworden sind. Wie viele Otterjunge werden diese zusammen insgesamt, im Schnitt, zur Welt bringen?
- c) Fähen ziehen ihre Jungen etwa 1 Jahr auf. Unter der Annahme, dass diese erst nach der Aufzucht erneut trächtig werden und dass etwa 50% der Fähen innerhalb eines Jahres trächtig werden: Wie viele Otterjunge werden dann erwartungsgemäß in einem Jahr geboren, wenn wir eine Grundpopulation von 12 Fähen zugrunde legen?
- d) Wie ändert sich die Zahl der Geburten in Aufgabenteil c) wenn wir 4 Jahre betrachten und gleich viele männliche wie weibliche Junge geboren werden? Falls es Ihnen nicht möglich ist, die genaue Zahl zu bestimmen, erläutern Sie das Vorgehen und worauf zu achten ist. Gehen Sie zur einfacheren Berechnung in dieser Aufgabe außerdem davon aus, dass in dieser Zeit keine Fähen versterben.

Von der linearen Algebra zu stochastischen Matrizen

Wie im letzten Teil der Aufgabe 2 vielleicht schon deutlich wurde, ändert sich bei Geburten die Grundgesamtheit dynamisch. Wir haben irgendwann nicht mehr nur 12 Fähen, die Junge kriegen, sondern mehr und mehr Fähen kommen hinzu, die wiederum Junge kriegen. Um dieses Problem zu modellieren bedienen wir uns der linearen Algebra.

Aus der linearen Algebra sollte Ihnen das Konzept eines Vektors schon bekannt sein. Aus zwei Punkten in einem Koordinatensystem, die bei Dimensionen größer 1, nicht mehr nur eine x-Koordinate, sondern noch eine y- oder sogar eine z-Koordinate haben, erstellen wir Vektoren:

$$P_1 = (x_1, y_1) P_2 = (x_2, y_2) \quad \vec{v}_1 = P_1 \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Auf diesen Vektoren können wir gewisse Rechenoperationen durchführen wie z.B. Addition und skalare Multiplikation:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} \quad n \cdot \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} n \cdot c \\ n \cdot d \end{pmatrix}$$

Was wir nun machen werden ist folgendes: Wir interpretieren die Einträge unserer Vektoren nicht mehr im Zusammenhang eines Koordinatensystems, sondern die Einträge stehen für unterschiedliche Teile der Fischotter Population.

Beispiel

Nehmen wir einmal an, wir beobachten 12 Fähen und 3 Junge in der Fischotterpopulation, dann bezeichnen wir mit v unseren Vektor für die Fischotterpopulation und dieser hat folgende Gestalt: $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$, wobei der erste Eintrag die Anzahl Junge und der zweite Eintrag die Anzahl Fähen enthält.

Der Vektor ist also gewissermaßen absteigend nach Alter geordnet und außerdem lassen wir den Pfeil weg, da wir keine Interpretation der „Richtung“ mehr haben.

Aufgabe 3

- Erstellen Sie zwei Vektoren zur Otterpopulation mit einmal 4 Jungen und 15 Fähen und einmal 2 Jungen und 10 Fähen.
- Führen Sie die Vektoraddition bei den beiden in a) erstellten Vektoren durch. Wie ist der resultierende neue Vektor zu interpretieren?
- Führen Sie die skalare Multiplikation des Vektors v aus dem Beispiel mit dem Skalar $n = 2$ durch. Was bedeutet die skalare Multiplikation mit 2 im Sachzusammenhang zur Fischotterpopulation?
- Betrachten wir erneut Aufgabe 2d). Erstellen sie für jeden Jahresabschnitt der 4 Jahre einen entsprechenden Vektor, der den jeweils aktuellen Populationsbestand repräsentiert.

Populationsdynamiken und stochastische Matrizen

Matrix

Ein Problem mit unseren bisherigen Operationen ist, dass wir verschiedene Einträge eines Vektors nicht unterschiedlich multiplizieren können. Bei der skalaren Multiplikation wird immer der gesamte Vektor erweitert. Eine Möglichkeit unterschiedliche Einträge verschieden-fach zu multiplizieren wäre Folgendes:

Angenommen wir gehen wieder von unserem Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ aus und wollen den 1. Eintrag mit 4 und den 2. Eintrag mit 2 multiplizieren. Dann gilt:

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_r + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}}_s,$$

wir spalten also v zuerst in zwei Einzelvektoren.

$$4 \cdot r + 2 \cdot s = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix},$$

und dann multiplizieren wir diese einzeln und fügen sie wieder zusammen.

In der Mathematik verwenden wir zur Beschreibung dieser Rechenoperation(en) Matrizen. Dies sieht dann in unserem Beispiel so aus:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 0 \cdot 12 \\ 0 \cdot 3 + 2 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Wir sagen der (schwarze) Vektor wird an jede Zeile (einmal die Rote und einmal die Blaue) der Matrix multipliziert.

Populationsmatrix

Im Kontext der Fischotterpopulation hat unsere Matrix eine klare Interpretation. Wir wollten erreichen, dass die Anzahl Junge vervierfacht und die Anzahl Fähen verdoppelt wird.

Die Population der Fischotter ging also vom Zustand $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ über zum Zustand

$\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = t$. Die Vektoren v und t , die den jeweils aktuellen Zustand beschreiben, nennen wir

Zustandsvektoren. Die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, die den Übergang zwischen den Zustandsvektoren beschreibt, nennen wir Populationsmatrix.

Allgemein hat eine Matrix folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ wobei } a_{ij} \text{ den Eintrag der } i\text{-ten Zeile und } j\text{-ten Spalte}$$

bezeichnet. Es wird auch A_{ij} verwendet, da so klar ist, um welche Matrix es sich handelt.

Die Matrix-Vektor Multiplikation von einer Matrix A mit einem Vektor v resultiert in einem Vektor r und wird formal berechnet durch:

$$A \cdot v = r, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot v_1 + \dots + A_{1n} \cdot v_n \\ \vdots \\ A_{m1} \cdot v_1 + \dots + A_{mn} \cdot v_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

- a) Es sei $M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ eine Matrix und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Vektor. Führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation $M \cdot w$ durch.
- b) Es sei $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Vektor. Führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation $M \cdot w$ durch.
- c) Die Matrix in Aufgabenteil b) nennen wir Einheitsmatrix. Erläutern Sie was diese Matrix auszeichnet, insbesondere im Hinblick auf das Matrix-Vektor Produkt mit einem beliebigen Vektor.

Bonusfrage: Was ist, wenn mehr Einträge im Vektor v sind, als Spalten in der Matrix A ? Was ist im umgekehrten Fall? Überlegen Sie sich was also für Einschränkungen für die Matrix-Vektor Multiplikation gelten muss.

Stochastische Matrizen und Vektoren Eine stochastische Matrix, auch (stochastische) Übergangsmatrix, ist ein Spezialfall einer Matrix. Diese modelliert stochastische Prozesse und zeichnet sich dadurch aus, dass entweder die Spaltensummen der Matrix, die Zeilensummen der Matrix oder Beides 1 ergeben und jeder Eintrag zwischen 0 und 1 liegt. Außerdem ist die Matrix stets quadratisch, was bedeutet, dass immer die gleiche Anzahl Spalten wie Zeilen existieren. Wir verwenden hier die Definition einer spaltenstochastischen Matrix, sodass jede Spalte der Matrix aus einem stochastischen Vektor besteht und damit die Spaltensumme 1 ergeben muss.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Matrizen gelten als (spalten-) stochastisch?

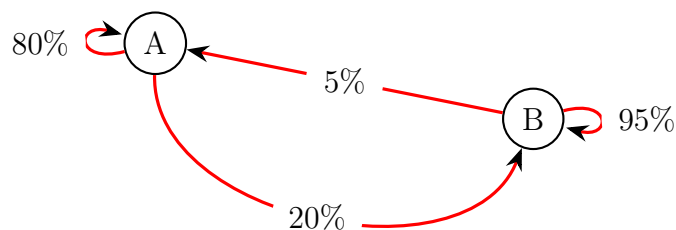
$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad
 \text{b) } \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \quad
 \text{c) } \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \quad
 \text{d) } \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Modellieren von Populationsdynamiken mit stochastischen Matrizen

Ausgerüstet mit dem mathematischen Fundament beschäftigen wir uns nun mit dem Kernanliegen: Dem **Modellieren**.

Als ersten Schritt beim Modellieren, wollen wir Sachverhalte graphisch veranschaulichen, damit wir einen besseren Überblick erhalten. Wir verwenden dazu ein **Übergangendiagramm**. Dieses besteht aus Kreisen, die die Einträge in den Zustandsvektoren repräsentieren und Pfeilen, die die Übergänge darstellen. Anschließend erstellen wir daraus eine **Übergangstabelle**. Als letzten Schritt erstellen wir daraus die Matrix. Dabei beginnt nun der Begriff Zustand knifflig zu werden. Dazu soll schauen wir uns 2 Beispiele an.

Beispiel 1 Wir haben 2 Zustände A und B. Zum Beispiel könnten wir sagen, dass wir Wasser kochen und Zustand A steht für flüssig und Zustand B für gasförmig. Wir vereinfachen sehr stark und sagen: Pro Zeitschritt bleibt 80% des Wassers flüssig und 20% wird gasförmig. Gasförmiges Wasser hingegen bleibt zu 95% gasförmig und nur 5% kondensiert an einer Oberfläche und wird wieder flüssig. Das zugehörige Übergangendiagramm sähe dann so aus:



Daraus können wir zuerst eine **Übergangstabelle** erstellen, indem wir die ausgehenden Pfeile von jedem Zustand betrachten:

	von A	von B
nach A	0,8	0,05
nach B	0,2	0,95

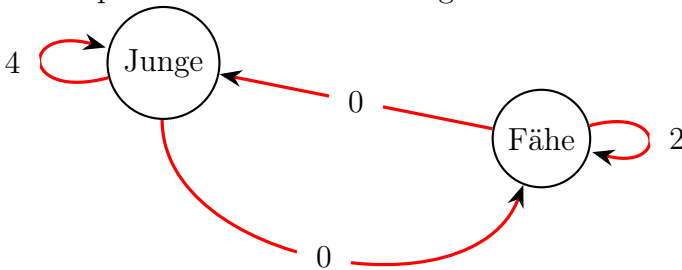
und daraus liest man dann die entsprechende **Übergangsmatrix** ab: $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 \\ 0,2 & 0,95 \end{pmatrix}$

Populationsdynamiken und stochastische Matrizen

Beispiel 2 Erinnern wir uns an das Otterpopulationsbeispiel: Der Zustandsvektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ beschrieb den aktuellen Zustand der Otterpopulation mit 3 Junge und 12 Fähen.

Unsere Populationsmatrix lautete: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ein entsprechendes ähnliches Diagramm dazu sähe folgendermaßen aus:



Die 0 Pfeile sind optional und dienen hier nur der Vergleichbarkeit mit Beispiel 1. Hierbei sind nun 2 Dinge zu beachten:

- 1.) Das Diagramm aus Beispiel 2 ist KEIN Übergangendiagramm. Ein Übergangendiagramm ist nur für (spalten-) stochastische Matrizen bzw. entsprechende stochastische Prozesse definiert. Das bedeutet: Summieren wir von einem Zustand die Zahlen (man sagt auch Kantengewichte) an den ausgehenden Pfeilen, so muss diese Summe stets 1 ergeben. (Erinnerung: Spaltensumme = 1 in stochast. Matrizen)
- 2.) Die Zahlen an den Kanten sind in beiden Diagrammen Faktoren, d.h. die Anzahl der Fähen erhöht sich nicht in jedem Schritt um 2, sondern sie wird verdoppelt.

Das manchmal verwirrende an den beiden Matrizenarten (stochastische Matrix und Populationsmatrix) ist, dass beide versuchen die Veränderung eines Zustandsvektors in gleichmässigen (zeitdiskreten) Zeitabständen zu modellieren.

Aufgabe 6

Überlegen Sie sich einen Startvektor zu Beispiel 1, der die Startbedingungen darstellt von flüssigem und gasförmigen Wasser. Führen Sie anschließend die Matrix-Vektor Multiplikation mit diesem Vektor und der Matrix aus Beispiel 1 durch.

Beschreiben Sie, was sie bei mehrmaligem durchführen der Matrix-Vektor Multiplikation beobachten können (Multiplizieren sie stets den jeweils neu resultierenden Vektor an die Matrix!). Spielt es eine Rolle, ob Sie einen stochastischen Vektor (mit relativen Zahlen) verwenden oder einen, der beispielsweise die Literangaben darstellt(absoluten Zahlen)?

Modellierung der Populationsentwicklung und Habitatsverteilung von Fischottern

Aufgabe 7

Sie wollen die Populationsentwicklungen der Fischotter nun im Ganzen modellieren. Aus dem Eingangstext lassen sich unterschiedliche Modelle für den Zustandsvektor ableiten. Sie könnten zum Beispiel die Fischotter klassifizieren (wie wir das auch schon in Kapiteln zuvor gemacht haben) in Junge, Fähe und zusätzlich nun Rüde. Sie könnten aber auch eine Einteilung nach Jahren vornehmen, indem sie Neugeborene, 1 Jährige, 2 Jährige, etc. Fischotter betrachten. Sie könnten aber auch versuchen die beiden Konzepte zusammenzuführen und somit ein Mischmodell erzeugen. Die Modelle haben jeweils unterschiedliche Vor- und Nachteile.

Kreativaufgabe Wählen Sie bzw. überlegen Sie sich ein ihrer Meinung nach geeignetes Modell zur Beschreibung der Fischotterpopulation. Versuchen Sie dabei auf den Einleitungstext Bezug zu nehmen, wo es möglich ist, und vereinfachen sie an geeigneten Stellen.

- Beschreiben Sie ihr Modell, indem Sie erläutern, was die Einträge in ihren Zustandsvektoren und Populationsmatrizen bedeuten.
- Überlegen Sie sich eine Grundpopulation und stellen Sie diese in einem, ihrem Modell entsprechenden, Zustandsvektor v dar.
- Erstellen Sie ein Diagramm, was die Veränderungen in ihrer Population darstellt. (Hinweis: Betrachten Sie Beispiel 2)
- Leiten Sie aus ihrem Diagramm eine Populationsmatrix P ab und führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation $P \cdot v$ durch.
- Führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation mehrmals durch, indem Sie den resultierenden Vektor stets an P multiplizieren. Was beobachten Sie? Wie interpretieren Sie Ihr Ergebnis, im Zusammenhang zu Ihrem Modell?

Rechenaufgabe Sie wollen die Fischotterpopulation modellieren, indem Sie diese einteilen in Junge, Fähe und Rüde. Diese Einteilung sollen Sie verwenden, um darauf basierend Zustandsvektoren und Populationsmatrizen zu erstellen.

- In der beobachteten Population existieren 12 Junge, 9 Fähen und 8 Rüden. Erstellen Sie einen Zustandsvektor, der dies beschreibt.
- Aus dem Eingangstext wissen wir, dass von den Jungtieren nur 15% älter als 3 Jahre werden und damit die Geschlechtsreife erreichen. Wir interpretieren daher eine Matrix-Vektor Multiplikation, also einen Zeitschritt, so, dass dabei 3 Jahre vergehen. Fähen erreichen die geschlechtsreife jedoch früher.

Populationsdynamiken und stochastische Matrizen

Wenn durchschnittlich Fähen nach 2 Jahren, Rüden nach 3 Jahren geschlechtsreif werden, wie viele von den 12 Jungtieren sind dann nach einem Schritt (3 Jahre) Rüden, und wie viele Fähen?

- c) Um die Modellierung zu vereinfachen gehen wir nun davon aus, dass etwa 50% der Fähen alle 1,5 Jahre einen Wurf Jungtiere bekommt. Unter Hinzunahme der durchschnittlichen Anzahl Junge, die bei einem Wurf neu geboren werden: Wie viele Junge werden dann von Fähen pro Zeitschritt (bezogen auf unser Modell) geboren? Wenn wir den Pfeil im Populationsdiagramm von Fähe zu Junge beschriften wollten, was müssten wir dort dranschreiben?
- d) Als letzte Bedingung wollen wir annehmen, dass pro Zeitschritt etwa $\frac{1}{5}$ der ausgewachsenen Tiere verstirbt (Wie viele bleiben also übrig?). Zeichnen Sie nun basierend auf den bisherigen Informationen ein Populations-Diagramm, das die Gesamtveränderungen in der Population darstellt (unabhängig vom Start). (Hinweis: vergleichen Sie Beispiel 2).
- e) Leiten Sie aus ihrem Diagramm eine Populationsmatrix P ab und führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation $P \cdot v$ durch.
- f) Beschreiben Sie Ihr Ergebnis, indem Sie jeden Eintrag erläutern. Gibt es Auffälligkeiten? Wie sind diese zu erklären?
- g) Führen Sie die Matrix-Vektor Multiplikation mehrmals durch, indem sie den resultierenden Vektor stets an P multiplizieren. Was beobachten Sie? Wie interpretieren Sie Ihr Ergebnis? Beziehen Sie dabei das Modell mit ein.

Umwelteinfluss (Inversionsaufgabe): Der Klimawandel und Ausbau der Wohnsiedlungen führt zu einem Rückgang der Flüsse und Teiche. Dies sind die natürlichen Lebensräume des Fischotters. Außerdem fallen durch den Ausbau der Straßen mehr und mehr Tiere Autos zum Opfer und auch die Jagd auf Fischotter dezimiert den Bestand. Diese Einflussfaktoren führten (und teilweise führen) zu einer sinkenden Populationszahl.

- a) Ausgehend von der Rechenaufgabe und einem Start wie in a) bzw. Ihrer eigenen Modellierung in der Kreativaufgabe: Wie müssten die resultierenden Vektoren nach den Matrix-Vektor Multiplikationen aussehen, wenn die Populationsmatrix die Umwelteinflüsse miteinbezieht? Wie verändern sich die Einträge? Geben Sie beispielhaft Vektoren an, die in etwa Ihren Erwartungen entsprechen.
- b) Erstellen Sie eine abgewandelte Populationsmatrix, die die Umwelteinflüsse mit einbezieht nach dem selben von Ihnen schon verwendeten Modell. Beachten Sie dabei, dass diese Matrix, unter den selben Startbedingungen wie die erste Populationsmatrix, nun die in a) angegebenen Vektoren (in etwa) als resultierende Vektoren haben soll.
- c) Wie lange dauert es, bei Ihrer neuen Populationsmatrix, bis nur noch weniger als 3 Fähen in der Gesamtpopulation vorhanden sind?

Populationsdynamiken und stochastische Matrizen

Wir wollen nun uns nicht mehr die Populationsentwicklung anschauen, sondern die Gebiete in denen eine feste Population umherzieht. Wir gehen davon aus, dass wir eine feste Populationsgröße in einem oder mehreren Gebieten zu Anfang aussetzen. Anschließend beobachten wir, wie sich diese verteilen. Bei den Gebieten sprechen wir jeweils von einem Habitat.

Aufgabe 8

Wir setzen eine Menge von 15 Fischottern an einem Fluss aus. Um den Fluss befinden sich noch weitere Habitate, und zwar ein Teich und ein Waldstück.

Wir gehen davon aus, dass der Fluss ein sehr attraktives Habitat ist, daher werden 80% der Tiere, die dort eintreffen, dort bleiben. Die restlichen Tiere verteilen sich von dort gleichmässig auf die anderen beiden Gebiete. Ein Teich ist ebenfalls attraktiv für die Otter, sodass etwa 70 % dort bleiben werden. Von dort werden jedoch doppelt so viele Otter zum Fluss gehen, als in den Wald. Der Wald ist das am wenigsten attraktive Gebiet, sodass dort nur 40% verbleiben, 35% zum Fluss ziehen von dort und 25% zum Teich.

- a) Modellieren Sie die Verteilung in einem Übergangendiagramm. (Vergleiche Beispiel 1)
- b) Leiten Sie aus dem Übergangendiagramm eine Übergangstabelle ab.
- c) Erstellen Sie aus der Übergangstabelle eine Übergangsmatrix. Begründen Sie anschließend, ob es sich hierbei um einen stochastischen Prozess handelt.
- d) Erstellen Sie einen Startzustandsvektor und multiplizieren sie diesen mit der Übergangsmatrix.
- e) Führen Sie die Multiplikationen nun mehrfach durch, indem sie den jeweils resultierenden Vektor wieder an die Übergangsmatrix multiplizieren. Was stellen Sie fest? Interpretieren Sie einen der Vektoren im Sachzusammenhang.
- f*) Es sei n eine natürliche Zahl, U die Übergangsmatrix, u der Vektor der Grundpopulation und u_n , der resultierende Vektor, nachdem wir n -mal das Matrix-Vektor Produkt wie in e) gebildet haben (Im 1. Schritt also: $u_1 = U \cdot u$).
Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$u_n = U^n \cdot u$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für Matrizen das Assoziativgesetz gilt.

- g) Geben Sie die erwartete Verteilung der Fischotter nach 20 Zeitschritten an, indem Sie die Formel aus f) verwenden. Beschreiben Sie Auffälligkeiten.

Aufgabe 9

Zusammenführung: Am Fluss ist eine Landstraße gebaut worden. Diese führt dazu, dass im Flussgebiet häufiger Tiere bei Verkehrsunfällen sterben.

- a) Ausgehend von den Erkenntnissen aus Aufgabe 7 und 8, erläutern Sie, warum es gerade am Fluss so schlimm ist, dass die Sterberate der Fischotter dort höher liegt.
- b) Diskutieren Sie Vor- und Nachteile bzgl. einer Umlegung der Straße durch das Waldgebiet. Betrachten Sie dabei nicht nur die Fischotter als Kriterium.

Exkurs in die Biologie: Leslie-Matrix

Aufgabe 10

In der Biologie gibt es für Populationsmatrizen eine spezielle Form, die sogenannte Leslie-Matrix.

- Lesen Sie den unten stehenden Artikel durch und markieren Sie bzw. schreiben Sie die wichtigsten neuen Eigenschaften im Vergleich zu den bisherigen Populationsmatrizen heraus.
- Überlegen Sie sich eine Population, die Sie modellieren wollen und erstellen Sie dazu eine Leslie-Matrix mit fiktiven, aber Glaubwürdigen, Einträgen.
- Erläutern Sie, warum die letzte Spalte einer Leslie-Matrix oft, abseits des ersten Eintrags, nur 0 Einträge besitzt.

Leslie-Matrix

Die **Leslie-Matrix** ist ein mathematisches Modell zur Analyse des Bevölkerungswachstums, welches im Bereich der **theoretischen Ökologie** zur Beschreibung von **Populationen** genutzt wird. Sie wurde von P. H. Leslie erfunden. Die Leslie-Matrix (auch Leslie-Modell genannt) ist eines der bekanntesten Verfahren um das Bevölkerungswachstum zu beschreiben, wobei man sich auf die einzelnen Altersstufen bezieht.

In der Ökologie beschreibt man damit die Änderungen in einer Organismenpopulation über einen bestimmten Zeitraum. In einem Leslie-Modell wird die Bevölkerung in Gruppen oder auf Altersklassen und Lebensstadien unterteilt. Um zum Beispiel den nächsten Generationsbestand einer Population auszurechnen, multipliziert man die Leslie-Matrix mit einem Vektor, welcher die Startpopulation beschreibt.

Um eine Matrix aufzustellen, müssen folgende Informationen über die Population vorhanden sein:

- n_x , die Anzahl Einzelpersonen (n) jeder Altersklasse x
- s_x , der Anteil der Einzelpersonen, der von der Altersklasse x zur Altersklasse $x+1$ übergeht (überlebt)
- f_x , die Geburtenrate in jeweiligen Gruppen (Altersklassen)

\mathbf{n}_{t+1} , der Populationsvektor zum Zeitpunkt $t + 1$, ist definiert durch

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}_t$$

Oder auch $\mathbf{n}_{t+1} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}_t$, wobei L die Leslie-Matrix bezeichnet.

Verwendete Quellen

<https://www.biologie-seite.de/Biologie/Leslie-Matrix>, zuletzt abgerufen 30.06.

https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik/Populationsmodelle,%20Graphen%20und%20Matrizen/pop_mod.pdf, zuletzt abgerufen 30.06.

<https://www.tierpark-niederfischbach.de/wp-content/uploads/Woerner-Fischotter-20140728.pdf>, zuletzt abgerufen 30.06.