Teoría – Tema 2

Teoría - 9 - Postulado de Cantor, Teorema de acotación y Teorema de Bolzano-Weierstrass

Postulado de Cantor

Decimos que un intervalo cerrado de número reales $[a_2, b_2]$ está encajado dentro de otro intervalo cerrado $[a_1, b_1]$ si se cumple la siguiente condición:

$$\forall\ x \in [a_2, b_2] \ \rightarrow \ x \in [a_1, b_1]$$

Y se denota matemáticamente de la siguiente forma:

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$

Con esta definición podemos desarrollar el postulado de Cantor.

Postulado de Cantor

La intersección de infinitos intervalos encajados converge a un único punto $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demostración: Sea una secuencia infinita de intervalos encajados $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$ que cumplen $a_n \leq b_n, \forall n \in N$. Llamemos A al conjunto de los extremos inferiores de cada intervalo, y B al conjunto de los extremos superiores de cada intervalo. Es decir:

$$A = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$$

$$B = \{b_n\}, n \in \mathbb{N}$$

Como los intervalos están encajados sabemos que:

$$... \subset [a_n, b_n] \subset ... [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$

Por lo que cualquier extremo inferior $a_n, n \in \mathbb{N}$ de un intervalo será menor o igual que cualquier extremo superior $b_m, m \in \mathbb{N}$ de ese u otro intervalo. Es decir:

$$a_n \leq b_m, \forall\ n, m \in N$$

Por lo tanto, el conjunto A está acotado superiormente y el conjunto B está acotado inferiormente.

La menor de las cotas superiores de A es su supremo, y la mayor de las cotas inferiores de B es su ínfimo. Por lo que la intersección de los infinitos intervalos encajados converge a un intervalo de extremo inferior el supremo de A y de extremo superior el ínfimo de B .

$$\cap\{I_n\}, n \in \mathbb{N} = [supremo(A), ínfimo(B)]$$

Si los sucesivos intervalos encajados pueden hacerse infinitamente pequeños, para $\forall \varepsilon > 0$ siempre se cumplirá $|ínfimo(B) - supremo(A)| < \varepsilon$. Como ε podemos hacerlo arbitrariamente pequeño:

$$\varepsilon \to 0 \quad \to \quad |ínfimo(B) - supremo(A)| \to 0 \quad \to \quad ínfimo(B) \to supremo(A)$$

Por lo que la intersección converge a un único punto $\alpha = ínfimo(B) = supremo(A)$, como queríamos demostrar.

Teorema de acotación

Recordemos que $f(x)$ está acotada superiormente en un intervalo cerrado $[a,b]$ si se cumple que $\exists k \in \mathbb{R} / k \geq f(x), \forall x \in [a,b]$.

Igualmente, $f(x)$ está acotada inferiormente si $\exists m \in \mathbb{R} / m \leq f(x), \forall x \in [a,b]$.

Tras repasar estos dos conceptos estamos en condiciones de entender el teorema de acotación.

Teorema de acotación

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ $\rightarrow$ $f(x)$ está acotada.

Demostración: Supongamos como **hipótesis de partida que** $f(x)$ **no está acotada en el intervalo cerrado** $[a,b]$, donde además es continua.

Dividamos el intervalo cerrado $[a,b]$ en dos partes iguales: $[a,\frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2},b]$. Al menos uno de estos dos intervalos no debe estar acotado, porque si los dos estuvieran acotados también lo estaría el intervalo de partida $[a,b]$, y la hipótesis de partida sería falsa e implicaría que el teorema ya estaría demostrado.

Si tomamos el intervalo que no está acotado, que llamaremos $[a_1,b_1]$, y lo volvemos a dividir en dos partes iguales, podemos repetir el mismo razonamiento anterior: al menos una de las dos mitades no debe estar acotada, para no contradecir la hipótesis de partida. Y el nuevo intervalo no acotado será $[a_2,b_2]$.

Repitiendo este proceso de manera indefinida, obtenemos una sucesión de intervalos encajados, cuyas amplitudes van dividiéndose consecutivamente por un factor 2.

$$...\subset[a_n,b_n]\subset...[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]\subset[a,b]$$

Por el postulado de Cantor esta sucesión de intervalos encajados converge a un único punto $\alpha\in[a,b]$.

Como $f(x)$ es continua en $\forall x\in[a,b]$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua en α $\rightarrow$ Existe el límite de $f(x)$ conforme x tiende al valor α y este límite coincide con el valor $f(\alpha)$ de la función. Es decir:

$f(x)$ es continua en α si y solo si $\exists\delta>0,\varepsilon>0/|x-\alpha|<\delta\rightarrow|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$

Como ya sabemos, los valores δ y ε son valores reales positivos, arbitrariamente tan pequeños como queramos. Por lo tanto, existe un entorno alrededor de α donde la función $f(x)$ está acotada:

$|f(x)-f(\alpha)|<\varepsilon$ si y solo si $-\varepsilon<f(x)-f(\alpha)<\varepsilon$ si y solo si $f(\alpha)-\varepsilon<f(x)<f(\alpha)+\varepsilon$

Finalmente llegamos a una inevitable contradicción. Por una parte hemos obtenido el valor α como secuencia indefinida de intervalos no acotados. Y por otra parte, al ser $f(x)$ continua, existen intervalos alrededor de α pertenecientes al entorno $|x-\alpha|<\delta$ donde la función sí está acotada.

Esta contradicción nos hace afirmar que la hipótesis de partida es falsa. Por lo tanto $f(x)$ **sí está acotada en el intervalo cerrado** $[a,b]$. Hemos demostrado el teorema por reducción al absurdo.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

A la menor de las cotas superiores de un intervalo de valores se le llama supremo. Y si el supremo pertenece al intervalo, hablamos de máximo.

A la mayor de las cotas inferiores de un intervalo de valores se le llama ínfimo. Y si el ínfimo pertenece al intervalo, hablamos de mínimo.

Con la ayuda de estos conceptos podemos definir el teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ $\rightarrow$ $f(x)$ admite un máximo y un mínimo dentro del intervalo.

Demostración: Vamos a demostrar la existencia de máximo (la demostración para el mínimo se realiza de manera análoga, cambiando el concepto de supremo por ínfimo, de máximo por mínimo, y el sentido de las desigualdades siguientes).

Por el teorema de acotación sabemos que $f(x)$ está acotada en el intervalo $[a,b]$. Definamos k como el supremo de los valores que toma la función en el intervalo. Es decir:

$$k \geq f(x), \forall\ x \in [a,b]$$

Si k pertenece al conjunto de valores formado por $\{f(x)\}, \forall\ x \in [a,b]$, sería el valor máximo y esta primera parte de la demostración ya estaría terminada.

Supongamos como **hipótesis de partida que** $k \notin \{f(x)\}, \forall\ x \in [a,b]$ **y por lo tanto no es un máximo**. Definamos la siguiente función auxiliar:

$$g(x) = \frac{1}{k - f(x)}$$

Esta función es continua en $[a,b]$ porque $f(x)$ es continua en el intervalo y porque el denominador nunca se anula, ya que hemos supuesto que $k \notin \{f(x)\}, \forall\ x \in [a,b]$.

Como $g(x)$ es continua, estará acotada superiormente en $[a,b]$. Sea h una cota superior positiva de $g(x)$. Es decir:

$$g(x) = \frac{1}{k - f(x)} \leq h \quad ==> \quad \frac{1}{h} \leq k - f(x) \quad ==> \quad f(x) \leq k - \frac{1}{h} \quad , \quad \forall\ x \in [a,b]$$

Obtenemos que $f(x)$ tiene un cota superior $k - \dfrac{1}{h}$ más pequeña que su supremo k , lo cual es un absurdo ya que la menor de todas las cotas superiores es el propio supremo.

Por lo tanto, nuestra **hipótesis de partida es falsa, por lo que** $k \in \{f(x)\}, \forall\ x \in [a, b]$ **y es el máximo de la función en el intervalo** $[a, b]$.

De manera análoga se demuestra que el ínfimo $m \geq f(x), \forall\ x \in [a, b]$ también pertenece al conjunto de valores de $f(x)$ y es su mínimo.

Geométricamente este teorema establece que la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado se encuentra comprendida entre dos líneas paralelas al eje de abscisas, que cortan respectivamente a la función en su valor máximo y en su valor mínimo.

-------- $f(x)$ *arbitraria, continua y acotada en el intervalo* $[1,6]$