

Teoría – Tema 6

CCSS - Teoría - 2b - interpretación geométrica de la derivada y derivabilidad en un punto

Derivada de una función y recta tangente a la función

Para un punto genérico x este incremento instantáneo de $f(x)$ lo hemos llamado derivada. Y su **interpretación geométrica nos dice que la derivada de $f(x)$ en el punto genérico x es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto x .**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leftrightarrow \frac{d[f(x)]}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Es decir, si tenemos la función $f(x)$ y su derivada es $f'(x)$, la pendiente m de la recta tangente a la función que pase por el punto $A(x_0, y_0)$ será:

$$m = f'(x_0) \rightarrow \text{La pendiente es el valor de la derivada evaluada en } x_0$$

Y si tenemos la pendiente m y el punto $A(x_0, y_0)$, podemos escribir la ecuación punto pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Ejemplo 1 resuelto

Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 1$ en el punto de abscisa $x = 2$.

La derivada de la función será $\rightarrow f'(x) = 2x \rightarrow$ El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $x = 2$ será $m = f'(2) = 4$.

El valor del punto $x = 2$ en la función será $\rightarrow f(2) = 2^2 - 1 = 3 \rightarrow$ Obtenemos el punto $(2, 3)$.

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto es:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow 4 = \frac{y - 3}{x - 2} \rightarrow y = 4x - 5$$

Ejemplo 2 resuelto

Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ en el punto de abscisa $x = e$.

La derivada de la función será $\rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$ \rightarrow El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $x = e$ será $m = f'(e) = \frac{-1}{e^2} + \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e^2}$.

El valor del punto $x = e$ en la función será $\rightarrow f(e) = \frac{1}{e} + \ln(e) = \frac{1}{e} + 1 = \frac{1+e}{e}$ \rightarrow Obtenemos el punto $(e, \frac{1+e}{e})$.

La ecuación de la recta tangente a la función en el punto es:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow \frac{e-1}{e^2} = \frac{y - \frac{1+e}{e}}{x - e}$$

La recta normal es perpendicular a la recta tangente, por lo que el producto de las pendientes de ambas rectas debe ser igual a -1 . Es decir:

$$m_{normal} = \frac{e^2}{1-e}$$

Y la ecuación de la recta normal en el punto $(e, \frac{1+e}{e})$ resulta:

$$\frac{e^2}{1-e} = \frac{y - \frac{1+e}{e}}{x - e}$$

Derivabilidad de una función en un punto

Una vez obtenida la definición analítica de la derivada de $f(x)$ podemos preguntarnos por la **derivabilidad de la función en un punto x_0** . Es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si este límite existe y es finito, decimos que la función es derivable en $x = x_0$. Y si el límite es finito, como el denominador vale 0, el numerador también debe valer 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0 \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Si hacemos $x = x_0 + h$, nuestra expresión queda: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = f(x_0)$

Y si $h \rightarrow 0$, significa que $x \rightarrow x_0$. Por lo tanto: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Es decir, el límite de la función $f(x)$ cuando $x \rightarrow x_0$ es igual al valor de la función en x_0 . Y esta es la definición de continuidad en un punto. Por lo tanto, **si una función es derivable en x_0 también será continua en x_0 . El inverso, no siempre es cierto.**

De la misma manera que en continuidad estudiamos los límites laterales (en asíntotas verticales, en funciones definidas a trozos, etc.), en derivabilidad también podemos hablar de derivada por la izquierda y derivada por la derecha.

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow \text{derivada lateral izquierda}$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow \text{derivada lateral derecha}$$

Si ambos límites existen, son finitos e iguales, decimos que existe la derivada de la función en el punto x_0 .

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \rightarrow \exists f'(x_0)$$

Concluyendo: **para afirmar la derivabilidad de una función $f(x)$ en un punto x_0 debemos:**

1. Demostrar la continuidad de $f(x)$ en x_0 .

2. Aplicar la definición analítica de derivada en x_0 y comprobar si el resultado es finito. En funciones definidas a trozos, deberemos calcular las derivadas laterales y confirmar que son iguales y finitas.