DERIVADAS

Índice:

1. Tasas de variación

La **tasa de variación media** de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, a+h]$ o $[a, b]$ se designa por $TVM(a, h)$ o $TVM(a, b)$ y viene dada por

$$TVM(a,h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=TVM(a,b)$$

El cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se representa también como $\frac{\Delta f(a)}{\Delta a}$. Además, hay que observar que este cociente, puede ser positivo, negativo o nulo.

 # Ejemplo.- Las $TVM(2,4)$, $TVM(4,6)$ *y* $TVM(2,8)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *serán*

$$TVM(2,4)=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{4^2-2^2}{2}=6 \ ;$$

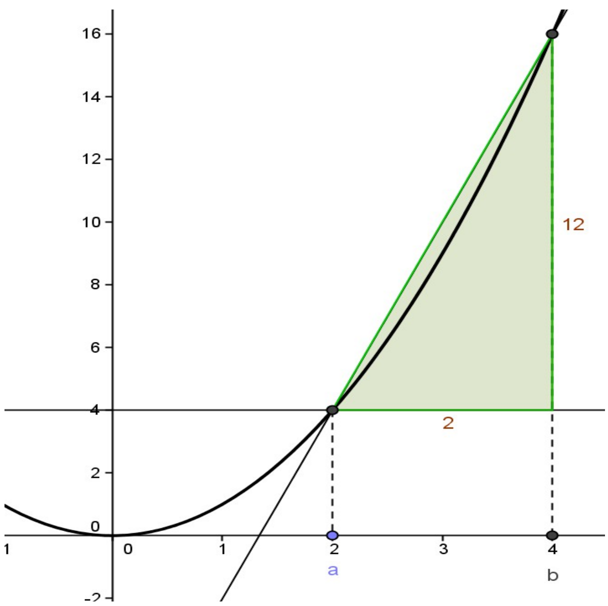
$$TVM(4,6)=\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=\frac{6^2-4^2}{2}=10$$

$$TVM(8,2)=\frac{f(8)-f(2)}{8-2}=\frac{8^2-2^2}{6}=10$$

Interpretación geométrica

La tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

 # Ejemplo.- La $TVM(2,4)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *, representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos* $(2,4)$ *y* $(4,16)$.



2. Tasa de variación instantánea. Derivada de una función en un punto.

Tasa de variación instantanea

La **tasa de variación instantánea** de la función $f(x)$ en el punto a, cuando existe es

$$TVI(a)=\lim_{h\to 0} TVM(a,h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

 # Ejemplo.- Las $TVI(2)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *será*

$$TVI(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^2+4h+h^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}4+h=4$$

Derivada de una función en un punto

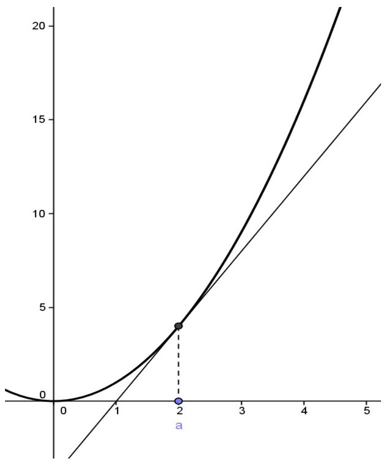
La **tasa de variación instantánea** de la función $f(x)$ en el punto a se denomina **derivada de** $f(x)$ **en el punto a**, y se designa por $f'(a)$.

- Si $f'(a)$ es un número real, la función f es **derivable** en $x=a$.
- Si $f'(a)$ no es un número real, el límite no existe y f es **no derivable** en $x=a$

Interpretación geométrica de derivada de f en un punto

$f'(a)$ representa la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a,f(a))$

 # Ejemplo.- La derivada $f'(2)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *, representa la pendiente de la recta tangente a* $f(x)=x^2$ *que pasa por el punto* $(2,4)$.



Teorema.- Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.

Basta tener en cuenta que si existe $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *, se cumplirá*

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0.f'(a)=0$$

Luego, $f(x)$ *es continua en* $x=a$

Sin embargo, el que una función sea continua en un punto a, no implica que sea derivable.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=|x|$ *es continua en 0 y no es derivable, como veremos en el siguiente apartado.*

Derivadas laterales de f(x) en el punto a.

Si $f(x)$ es una función real de variable real y a un punto de su dominio, decimos que:

- f es derivable en a por la izquierda y representamos por $f'(a^-)$ si existe

$$f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0:h<0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- f es derivable en a por la derecha y representamos por $f'(a^+)$ si existe

$$f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0:h>0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Además, una función $f(x)$ es derivable en $x=a$ si y solo si es derivable por la izquierda y por la derecha de a, y las derivadas laterales coinciden.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=|x|$ *tiene derivadas izquierda y derecha distintas en* $x=0$ *, ya que*

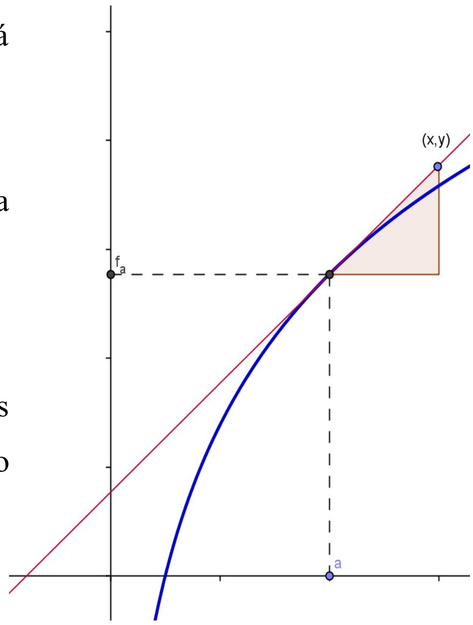
$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{h}{h}=+1$$

Como estos límites son distintos, la función $f(x)=|x|$ *no es derivable en* $x=0$.

3. Ecuación de la recta tangente a una curva.

Si $f(x)$ es una derivable en $x=a$, y r es la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Si m es la pendiente de la recta r, se cumplirá $m=f'(a)$



Además, teniendo en cuenta que el punto $(a, f(a))$ pertenece a la recta r, si (x, y) es un punto cualquiera de la recta se cumplirá:

$$m=\frac{y-f(a)}{x-a}$$

Luego, igualando las dos ecuaciones anteriores, tenemos que la ecuación de la recta r tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ será $f'(a)=\dfrac{y-f(a)}{x-a}$

 # Ejemplo.- Hallar la ecuación de la tangente a la curva $f(x)=x^4$ *en* $x=2$.

Como $f'(x)=4x^3$ *, la pendiente de la tangente en el punto* $x=2$ *es* $f'(2)=32$ *, y como para* $x=2$ *es* $f(2)=16$ *, la ecuación de la recta tangente a* f *, en el punto* $P(2,16)$ *es:*

$$y-16=32.(x-2)$$

4. Función derivada

- Una función es derivable en un intervalo abierto $(a,b)\subset\mathbb{R}$ si lo es para cada uno de sus puntos.
- Una función es derivable es un intervalo cerrado $[a,b]\subset\mathbb{R}$ si lo es para cada uno de los puntos del intervalo (a,b) y es derivable por la derecha en a y por la izquierda en b.
- Si una función $f(x)$ es derivable en un intervalo abierto $(a,b)\subset\mathbb{R}$, como para cada $x\in(a,b)$ existe $f'(x)$, a la función

$$(a,b)\to\mathbb{R}$$
$$x\to f'(x)$$

Se denomina **función derivada de f**, y se designa por $f'(x)$.

 # Ejemplo.- Si $f(x)=\sqrt{x}$ *, como* $Dom\, f=[0,+\infty)$ *, se cumplirá*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}).(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2.\sqrt{x}}$$

Para cualquier $x\in(0,+\infty)$.

- Denominamos **derivada segunda** o **derivada de segundo orden** de f a la función derivada de $f'(x)$, y expresamos por $f''(x)$.
- Denominamos **derivada tercera** o **derivada de tercer orden** de f a la función derivada de $f''(x)$, y expresamos por $f'''(x)$
- Denominamos **derivada n-ésima** o **derivada de n-ésimo orden** de f a la función derivada n-ésima de $f(x)$, y expresamos por $f^{(n)}(x)$

 # Ejemplo.- Si $f(x)=x^3$ *, se cumplirá*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}=6x$$

$$f'''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6(x+h)-6x}{h}=6$$

$$f^{IV}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'''(x+h)-f'''(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6-6}{h}=0$$

Y para cualquier $n\geq 4$ *, se cumplirá* $f^{(n)}=0$.

5. Operaciones y reglas con funciones derivadas

Algunas operaciones con funciones derivadas son:

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, se cumple

  $$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, se cumple

  $$(f(x).g(x))'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

- Si $f(x)$ es un función derivable y k es una constante, se cumple

  $$(k.f(x))'=k.f'(x)$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables y $g(x)\neq 0$, se cumple

  $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

- Si $f(g(x))$ es una función compuesta, donde $Ima(g(x))\subset Dom(f(x))$, entonces

  $$(f(g(x)))'=f'(g(x)).g'(x)$$

Está regla se denomina **regla de la cadena.**

- Si $f(x)$ tiene función inversa $f^{-1}(x)$, entonces

  $$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(y)} \quad \text{con} \quad f^{-1}(x)=y$$

Ejemplos.-

- $(5x^3+2\sqrt{x})'=(5x^3)'+(2\sqrt{x})'=15x^2+2.\frac{1}{2\sqrt{x}}=15x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$
- $(4x^3.\sqrt{x})'=(4x^3)'.\sqrt{x}+4x^3.(\sqrt{x})'=12x^2.\sqrt{x}+4x^3.\frac{1}{2\sqrt{x}}=12x^2.\sqrt{x}+2.x^3.\frac{1}{\sqrt{x}}$
- $\left(\frac{x^3}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{(x^3)'.\sqrt{x}-x^3.(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}=\frac{3x^2.\sqrt{x}-\frac{x^3}{2.\sqrt{x}}}{x}=\frac{6x^3-x^3}{2x\sqrt{x}}=\frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$
- $((\sqrt{x})^3)'=3.(\sqrt{x})^2.(\sqrt{x})'=\frac{3.(\sqrt{x})^2}{2.\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.\sqrt{x}$
- Como $\ln x=y\Leftrightarrow e^y=x$, se cumplirá $(\ln x)'=\frac{1}{(e^y)'}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$

Derivación implícita

Par derivar una función que viene expresada en forma implícita (*es decir una función en la cual la variable y no está despejada*), podemos despejarla y derivar después, o podemos utilizar la regla de la cadena con un método de derivación implícita, El método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación con respecto de x, teniendo en cuenta que y es función de x, y posteriormente despejar y'.

 # Ejemplo.- Si $y^2=x$ *, se cumplirá*

$$2y.y'=1 \Rightarrow y'=\frac{1}{2.y}=\frac{1}{2.\sqrt{x}}$$

6. Derivadas de funciones

Derivadas de funciones polinómicas

- Función constante $f(x)=k$, con $k\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$$

- Función identidad $f(x)=x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$$

- Función potencial $f(x)=x^n$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.x^{n-i}.h^i-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}.x^{n-i}.h^{i-1}=n.x^{n-1}$$

- Función polinómica $f(x)=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+...+a_1x+a_0$

$$f'(x)=(a_n.x^n)'+(a_{n-1}.x^{n-1})'+...+(a_1.x)'+(a_0)'=$$
$$=a_n,n.x^{n-1}+a_{n-1}.(n-1)x^{n-2}+...+a_1$$

 # Ejemplos.-

Si $f(x)=3x^2+4x-5$ *, entonces* $f'(x)=3.2.x+4.1-0=6x+4$

Si $f(x)=6x^4-3x^3+2x$ *, entonces* $f'(x)=6.4.x^3-3.3.x^2+2.1=24x^3-9x^2+2$

Derivadas de funciones logarítmicas y exponenciales

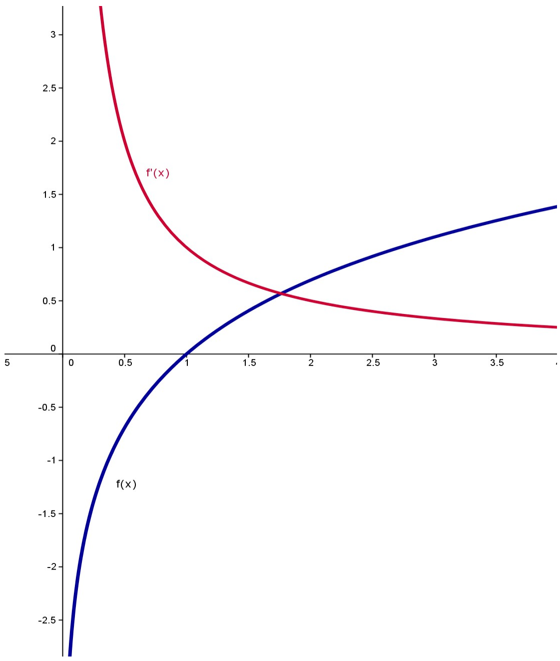
Función logaritmo

- La **derivada** de la función $f(x)=\ln x$ en $(0,+\infty)$ es $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, ya que

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln e=\frac{1}{x}$$

y cuyas gráficas son



- Teniendo en cuenta que $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$, se cumplirá

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}.\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln e}{\ln a}.\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a e.\left(\frac{1}{x}\right)$$

Función exponencial

- La **derivada** de la función $f(x)=e^x$ es $f'(x)=e^x$, ya que

$$\left.\begin{array}{l}(\ln e^x)'=\dfrac{(e^x)'}{(e^x)}\\(\ln e^x)'=(x.\ln e)'=x'=1\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (e^x)'=e^x$$

- Teniendo en cuenta que $a^x=e^{x.\ln a}$, se cumplirá

$$(a^x)'=(e^{x.\ln a})'=(e^{x.\ln a})'.(x.\ln a)'=(\ln a).a^x$$

 # Ejemplos.-

$y=\log_3 x \Rightarrow y'=\log_3 e.\frac{1}{x}$

$y=3^x \Rightarrow y'=3^x.\ln 3$

- *También podemos **derivar** de la función potencia* $f(x)=x^a$ *utilizando exponenciales y logaritmos, ya que*

$$(x^a)'=(e^{a.\ln x})'=(e^{a.ln x})'.(a.ln\,x)'=x^a.\frac{a}{x}=a.x^{a-1}$$

<u>Función potencial exponencial</u>

- La **derivada** de la función $h(x)=(f(x))^{g(x)}$ es

$h'(x)=f(x)^{g(x)}.g'(x).\ln f(x)+f(x)^{g(x)-1}.g(x).f'(x)$, ya que

$$h'(x)=(f(x)^{g(x)})'=(e^{g(x).\ln f(x)})'=(e^{g(x).\ln f(x)}).\left(g'(x).\ln f(x)+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=$$

$$=f(x)^{g(x)}.\left(g'(x).\ln f(x)+g(x).\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=$$

$$=f(x)^{g(x)}.g'(x).\ln f(x)+f(x)^{g(x)-1}.g(x).f'(x)$$

 # Ejemplos.-

$((3x+1)^{sen\,x})'=(3x+1)^{sen\,x}.\cos x.\ln(3x+1)+3.(3x+1)^{sen\,x-1}.sen\,x$

$(x^{(5x+4)})=5.x^{(5x+4)}.\ln x+x^{(5x+3)}.(5x+4)$

<u>Derivadas de funciones trigonométricas</u>

<u>Función seno</u>

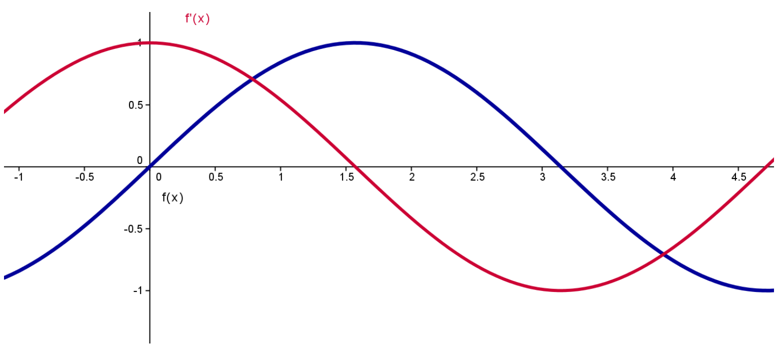
- La **derivada** de la función $f(x)=sen\,x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=\cos x$, ya que

$$(sen\,x)'=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{sen\,x.\cos h+\cos x.sen\,h-sen\,x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{sen\,x.(\cos h-1)+\cos x.sen\,h}{h}=\lim_{h\to 0}\left[sen\,x.\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x.\frac{sen\,h}{h}\right]=$$

$$=\cos x$$

Y cuyas gráficas son



Función coseno

- La **derivada** de la función $f(x)=\cos x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=-sen\,x$, ya que

$$(\cos x)'=\left(sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-sen\,x$$

Función tangente

- La **derivada** de la función $f(x)=tg\,x$ en $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ es , $f'(x)=1+tg^2 x$ ya que

$$\left(\frac{sen\,x}{\cos x}\right)'=\left(\frac{\cos x.\cos x+sen\,x\,sen\,x}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}=sec^2 x=1+tg^2 x$$

 # Ejemplo.-

$$\left((\cos x+\ln x^2-x^3).e^x\right)'=\left(\cos x+\ln x^2-x^3\right)'.e^x+\left(\cos x+\ln x^2-x^3\right).(e^x)'=$$

$$=\left(-sen\,x+\left(\frac{1}{x^2}\right).2x-3.x^2\right).e^x+\left(\cos x+\ln x^2-x^3\right).e^x=$$

$$=e^x.\left(-sen\,x+\frac{2}{x}-3.x^2+\cos x+\ln x^2-x^3\right)=$$

Derivadas de funciones compuestas

Tipo potencial

- $g(x)=(f(x))^n \Rightarrow g'(x)=n.(f(x))^{n-1}.f'(x)$

 # Ejemplo.-

$$g(x)=(x+sen\,x)^4 \Rightarrow g'(x)=4.(x+sen\,x)^3.(1+\cos x)$$

Tipo logarítmico

- $g(x)=\ln(f(x)) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
- $g(x)=\log_a(f(x)) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}.\log_a e$

 # Ejemplo.-

$$g(x)=\ln(x^3-2.x) \Rightarrow g'(x)=\frac{3.x^2-2}{x^3-2.x}$$

$$g(x)=\log_5(x^3-2.x) \Rightarrow g'(x)=\frac{3.x^2-2}{x^3-2.x}.\log_5 e$$

Tipo trigonométrico

- $g(x) = sen\, f(x) \Rightarrow g'(x) = (\cos f(x)) . f'(x)$
- $g(x) = \cos f(x) \Rightarrow g'(x) = (-sen\, f(x)) . f'(x)$
- $g(x) = tg\, f(x) \Rightarrow g'(x) = (sec^2 f(x)) . f'(x) = (1 + tg^2) . f'(x)$
- $g(x) = arcsen\, f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} . f'(x)$
- $g(x) = \arccos f(x) \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} . f'(x)$
- $g(x) = arctg\, f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+(f(x))^2} . f'(x)$

Ejemplo.-

$g(x) = sen\, x^2 \Rightarrow g'(x) = 2 . \cos(x^2)$

$g(x) = arctg\, x^3 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+(x^3)^2} . 3.x^2 = \frac{3.x^2}{1+x^6}$

7. Tablas de derivadas

Función y	Función derivada y'
$y=k$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=(f(x))^n$	$y'=n.(f(x))^{n-1}.f'(x)$
$y=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+...+a_1.x+a_0$	$y'=n.a_n.x^{n-1}+(n-1).a_{n-1}.x^{n-2}+...+2.a_2.x+a_1$
$y=\ln f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\frac{f'(x)}{f(x)}.\log_a e$
$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x).e^{f(x)}$
$y=a^{f(x)}$	$y'=f'(x).a^{f(x)}.\ln a$
$y=f(x)^{g(x)}$	$y'=f(x)^{g(x)}.g'(x).\ln f(x)+f(x)^{g(x)-1}.g(x).f'(x)$
$y=sen\, f(x)$	$y'=(\cos f(x)).f'(x)$
$y=\cos f(x)$	$y'=(-sen\, f(x)).f'(x)$
$y=tg\, f(x)$	$y'=(1+tg^2).f'(x)$
$y=arcsen\, f(x)$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.f'(x)$
$y=\arccos f(x)$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}.f'(x)$
$y=arctg\, f(x)$	$y'=\frac{1}{1+(f(x))^2}.f'(x)$

8. Diferencial de una función

La tasa de variación media de una función derivable puede expresarse en forma aproximada por medio de la derivada. Esta aproximación es más que suficiente en la mayoría de las aplicaciones en las que los errores de las mediciones superan a los contenidos en los cálculos.

Para valores de h pequeños, podemos tomar aproximadamente la tasa de variación media de una función $f(x)$ en un punto $x=a$, como su derivada $f'(a)$, es decir:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Y la tasa de variación media se puede expresar también como

$$f'(a).h \approx f(a+h)-f(a)$$

Que podemos también expresar como

$$f(a+h) \approx f(a)+f'(a).h$$

Que lógicamente está aproximación será mayor, cuanto menor sea h.

Si denominamos incremento de y e incremento de x, respectivamente a

$$\Delta y = f(a+h)-f(a)$$

$$\Delta x = (a+h)-(a) = h$$

Obtendremos, de forma equivalente la relación

$$f'(a).\Delta x \approx \Delta y$$

Denominando diferencial de x a $dx = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$, obtenemos la expresión

$$dy = f'(a).dx$$

Donde dy es la diferencial de y, y por tanto también se utiliza para $f'(a)$ la siguiente notación $f'(a)=\frac{dy}{dx}$

 # Ejemplo.- Si queremos calcular de forma aproximada el valor $(2{,}004)^4$ *, podemos considerar la función* $f(x)=x^4$ *y se cumplirá*

$$f(2+0{,}004) \approx f(2)+f'(2).0{,}004 = 2^4+4.2^3.0{,}004 = 16+0{,}128 = 16{,}128$$

 # Ejemplo.- Si el radio de una esfera crece uniformemente con una velocidad de $3\, cm/s$ *, podemos hallar la velocidad de crecimiento del volumen de esta esfera, puesto que:*

$$V=\frac{4}{3}.\pi.R^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dR}.\frac{dR}{dt}=4.\pi.R^2.\frac{dR}{dt}=12.\pi.R^2$$

Si deseamos conocer la velocidad de crecimiento del volumen cuando el radio vale, por ejemplo, 5 cm., tenemos que esta velocidad es: $12.25.\pi = 300\pi\, cm./s$

 # Ejemplo.- Una lamina cuadrada tiene de lados 10 cm. Al calentarse, su lado experimenta un aumento de 1mm. Hallar

a) La tasa de variación absoluta o incremento del área.

b) El valor diferencial.

c) El error cometido

Solución.- Como la función que da el área del cuadrado es $f(x)=x^2$ *, y su derivada es* $f'(x)=2.x$.

a) $\Delta y=f(a+h)-f(a)=f(10+0{,}1)-f(10)=(10{,}1)^2-(10)^2=2{,}01\,cm^2$.

b) $dy=f'(10).dx=20.0{,}1=2\,cm^2$.

c) El error cometido es

$$\Delta y-dy=(f(a+h)-f(a))-dy=2{,}01-2=0{,}01\,cm^2$$

9. Aplicaciones

Algunas aplicaciones del cálculo diferencial son las siguientes

- La derivada de una función f en un punto $(a, f'(a))$, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto. La ecuación de la recta tangente es:

$$y-f(a)=f'(a).(x-a)$$

 # Ejemplo.- La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\cos x$ *en el punto de abcisa* $x=0$ *, es*

$$y-\cos 0=(-sen 0).(x-0)\Rightarrow y=1$$

- Si $f(x)$ representa el espacio recorrido por un móvil en función del tiempo, entonces:
  - La TVM de f en $[a.b]$ indica la velocidad media de dicho móvil entre los instantes a y b.
  - $f'(x)$ es la velocidad en un instante cualquiera x.
  - $f''(x)$ es la aceleración en un instante cualquiera x.

 # Ejemplo.- Si lanzamos una pelota hacia arriba y la función $h(t)=-4{,}9t^2+29t$ *representa la altura, en metros, de dicha pelota en cada instante t, en segundos:*

La velocidad de esta pelota cualquiera en un instante t será la derivada del espacio con respecto al tiempo; es decir:

$$h'(t)=-9{,}8t+29$$

La pelota comienza a descender cuando la velocidad es cero, cuando $-9{,}8t+29=0$ *; luego, aproximadamente, a los tres segundos de su lanzamiento la pelota empezaría a descender.*

- Si $y=f(x)$, entonces la diferencial de y es $dy\approx f'(a).dx$

 # Ejemplo.- Si queremos hallar cuánto aumenta aproximadamente, el lado de un cuadrado cuando su área pasa de $9\,m^2$ *a* $9{,}1\,m^2$.

Si x representa el área del cuadrado e y es la medida de su lado, entonces $y=\sqrt{x}$.

Para hallar la variación del lado utilizaremos la fórmula anterior

$$dy\approx f'(9).0{,}1=\frac{1}{2.\sqrt{9}}.0{,}1=\frac{1}{6}.0{,}1\approx 0{,}01667\,m$$