Untuk hari ini, akan mulai masuk pada materi program linear (PL), setelah dua pekan kemarin mereview materi pendukung perkuliahan ini dan mempelajari pemodelan matematika masalah PL. Seperti yang sudah disampaikan, akan dipelajari tiga topik besar:

1. Masalah PL Metode Grafik
2. Masalah PL Metode Simpleks
3. Masalah Transportasi

Masalah PL Metode Grafik ini sudah kalian pelajari di SMA, jadi disini kita akan mempelajari kembali dengan lebih mendetail, terutama pada metode penyelesaian yang digunakan.
Pada perkuliahan ini kita akan berkenalan dengan tiga metode penyelesaian yang sederhana, yaitu

1. Metode Garis Selidik
2. Metode Titik Sudut
3. Metode Gradien Garis

Mari kita mulai saja…

## Penyelesaian PL Metode Grafik

Masalah PL dua sampai tiga variabel dapat diselesaikan dengan metode grafik. Penyelesaian PL dengan metode grafik dapat dilakukan dengan 4 cara, yaitu:

1. Metode garis selidik
2. Metode titik-titik sudut
3. Metode gradien
4. Metode Branch and Bound

Disini kita akan minta bantuan software Geogebra untuk mempelajari lebih lanjut

Model masalah PL dua variabel (Ingat materi pekan lalu)
Memaksimumkan atau meminimumkan $f(x,y) = c_1x + c_2y$
terhadap kendala $a_{11}x + a_{12}y(\leq . =, \geq)b_1$

$a_{21}x + a_{22}y(\leq . =, \geq)b_2$

$a_{31}x + a_{32}y(\leq . =, \geq)b_3$

$x \geq 0, y \geq 0.$

Keterangan:

$x, y$ disebut variabel masalah

$c_1, c_2$ adalah biaya satuan

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ adalah koefisien kendala

$b_1, b_2, b_3$ adalah koefisien ruas kanan

Perhatikan model tersebut merupakan masalah PL dua variabel dengan tiga kendala pertidaksamaan bisa berupa pertidaksamaan $\leq$ atau $\geq$, atau mungkin juga berupa persamaan, dan setiap variabelnya dibatasi bernilai positif.

Dalam menyelesaikan suatu masalah PL, ada tahapan-tahapan yang harus kita ikuti. Untuk masalah PL metode grafik, tahapan-tahapannya adalah sebagai berikut:

1. Membuat model matematika masalah PL (jika soal diberikan dalam bentuk soal cerita)
2. Tentukan titik-titik potong setiap kendala utama terhadap sumbu-X dan sumbu-Y
3. Gambarkan grafiknya

   Note: Gunakan penggaris dan pena warna warni, setiap kendala mempunyai warna tersendiri. Boleh menggunakan milimeter block atau buku berpetak. Harus menggunakan penggaris. Tidak menggunakan pensil
4. Tentukan irisan semua setengah bidang tertutupnya, tebalkan garis tepinya dan arsir daerah yang masuk area garis tebal
5. Tentukan titik-titik sudut irisan semua setengah bidang tertutupnya, beri nama $A, B, C, \ldots$ dst searah jarum jam. Jika titik $O(0,0)$ masuk dalam daerah irisan, maka titik $O$ tetap dinamakan titik $O$, kemudian tentukan koordinatnya (penentuan koordinat ini diuraikan pengerjaannya)
6. Tentukan solusi optimalnya (tergantung metode yang digunakan)
7. Buat kesimpulan

Sebelum mempelajari lebih lanjut, kita berkenalan dulu dengan beberapa istilah yang digunakan dalam masalah PL

**Istilah-istilah penting:** Berikut adalah istilah-istilah yang akan kita gunakan dalam mempelajari PL, baik dengan metode grafik maupun dengan metode simpleks

1. Setengah bidang tertutup, yaitu daerah yang diperoleh dari kendala utama dan kendala tanda / non negatif. Dalam masalah PL biasanya kita akan bekerja dengan pertidaksamaan ≤ atau ≥ untuk kendala utama, dan pertidaksamaan ≥ untuk kendala tanda
   Hasil penggambaran grafiknya akan membentuk setengah bidang tertutup
2. Daerah konveks, yaitu daerah yang memiliki sifat setiap titik dari ruas garis yang dibentuk dengan menghubungkan dua titik berbeda dalam daerah tersebut juga berada dalam daerah. Ingat materi pekan lalu ya…
3. Setengah bidang tertutup adalah daerah yang konveks
   Jadi setiap kendala utama dan setiap kendala tanda akan menghasilkan daerah yang konveks
4. Irisan semua setengah bidang tertutup menghasilkan daerah yang konveks.
5. Irisan semua setengah bidang tertutup disebut dengan daerah layak.
6. Titik-titik di dalam daerah layak disebut dengan titik layak.
7. Titik layak merupakan titik yang memenuhi semua kendala, disebut dengan penyelesaian layak (pl).
8. Penyelesaian layak yang mengoptimalkan (memaksimumkan / meminimumkan) fungsi tujuan disebut penyelesaian layak basis (plb) / penyelesaian optimal (PO).
9. Solusi layak / fisibel merupakan penyelesaian yang memenuhi semua kendala.
10. Solusi tidak layak / tidak fisibel adalah penyelesaian yang melanggar salah satu / beberapa kendala.
11. Daerah layak / fisibel merupakan himpunan semua solusi layak / fisibel.
12. Solusi optimal merupakan solusi fisibel yang mempunyai nilai fungsi tujuan paling baik, yaitu nilai paling besar jika fungsi tujuannya memaksimumkan dan nilai paling kecil jika fungsi tujuannya meminimumkan.

**Latihan:** Gambarkan grafik dari fungsi-fungsi berikut dan tentukan daerah yang memenuhi persamaan tersebut.

1. $2x + 5y \leq 10$
2. $4x + 2y \geq 12$

3. $x \geq 0$
4. $y \geq 0$.

## Langkah menyelesaikan masalah PL metode grafik

## Ilustrasi:

Diberikan masalah PL sebagai berikut:

Memaksimumkan $f(x, y) = c_1 x + c_2 y$

terhadap kendala $a_{11}x + a_{12}y \leq b_1$

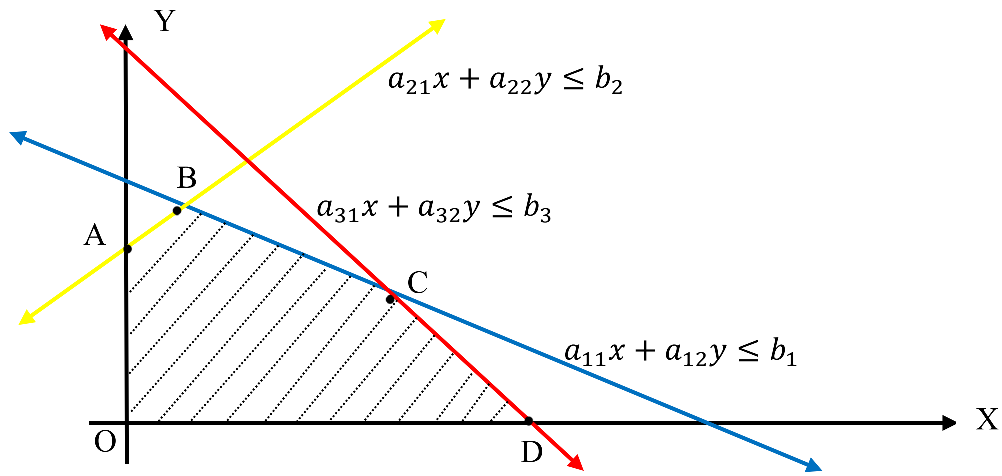
$a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$

$a_{31}x + a_{32}y \leq b_3$

$x \geq 0, y \geq 0$.

**Langkah-langkah penyelesaian dengan metode grafik.**

1. Menggambarkan semua setengah bidang tertutup.




2. Menentukan irisan semua setengah bidang tertutup, yaitu daerah OABCD.
3. Menentukan koordinat titik-titik sudut irisan semua setengah bidang tertutup.
   - Titik O adalah titik potong sumbu koordinat X dan sumbu koordinat Y.
   - Titik A adalah titik potong garis $a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$ dan sumbu Y.
   - Titik B adalah titik potong garis $a_{11}x + a_{12}y \leq b_1$ dan $a_{21}x + a_{22}y \leq b_2$.

- Titik C adalah titik potong garis $a_{11}x + a_{12}y \leq b_1$ dan $a_{31}x + a_{32}y \leq b_3$.
- Titik D adalah titik potong garis $a_{31}x + a_{32}y \leq b_3$ dengan sumbu X.

4. Menentukan plb dan nilai optimum $f(x, y) = c_1x + c_2y$
   - Dengan garis selidik
   - Dengan penelusuran titik-titik sudut
   - Dengan gradien garis
5. Kesimpulan.

Selanjutnya kita pelajari metode-metode penyelesaian masalah PL metode grafik

## 1. Metode Garis Selidik

Misalkan akan dicari nilai optimal fungsi $f(x, y) = c_1x + c_2y$. Langkah pertama adalah menentukan daerah layak, yaitu penyelesaian dari kendala $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j\ (\leq, =, \geq) b_i, x_j \geq 0, j = 1,2$. Langkah kedua, penyelesaian optimal masalah PL dengan metode garis selidik dicari dengan membentuk garis-garis yang saling sejajar, $c_1x + c_2y = k$, langkah ketiga, kemudian dipilih garis yang menyentuh titik terluar daerah layaknya. Garis-garis $c_1x + c_2y = k$ dinamakan garis selidik.

Misal masalah PL tersebut berpola maksimum. Bentuk dua garis selidik:garis 1: $c_1x + c_2y = k_1$ dan garis 2: $c_1x + c_2y = k_2$. Nilai $k_1$ dan $k_2$ diambil sembarang. Bandingkan 2 garis selidik $c_1x + c_2y = k_1$ dan $c_1x + c_2y = k_2$. Misalkan $k_1 < k_2$ dan garis $c_1x + c_2y = k_2$ disebelah kanan garis $c_1x + c_2y = k_1$. Penyelesaian PL memaksimumkan diperoleh dengan menggeser garis $c_1x + c_2y = k$ ke kanan sampai menyentuh titik terluar / terakhir daerah layak. Titik terluar tersebut merupakan PO dan nilai $k$ pada $c_1x + c_2y = k$ merupakan nilai optimal. Demikian sebaliknya, untuk masalah berpola minimum, garis $c_1x + c_2y = k$ digeser ke arah $k$ yang lebih kecil sampai menyentuh titik terluarnya.

**Contoh 1:**

Diberikan masalah PL:

Memaksimumkan $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$

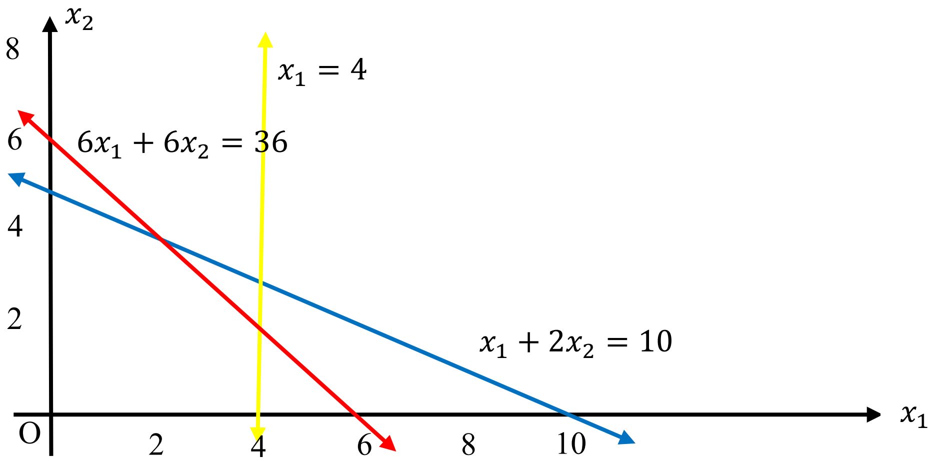
dengan kendala $x_1 + 2x_2 \leq 10$

$$6x_1 + 6x_2 \leq 36$$
$$x_1 \qquad \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

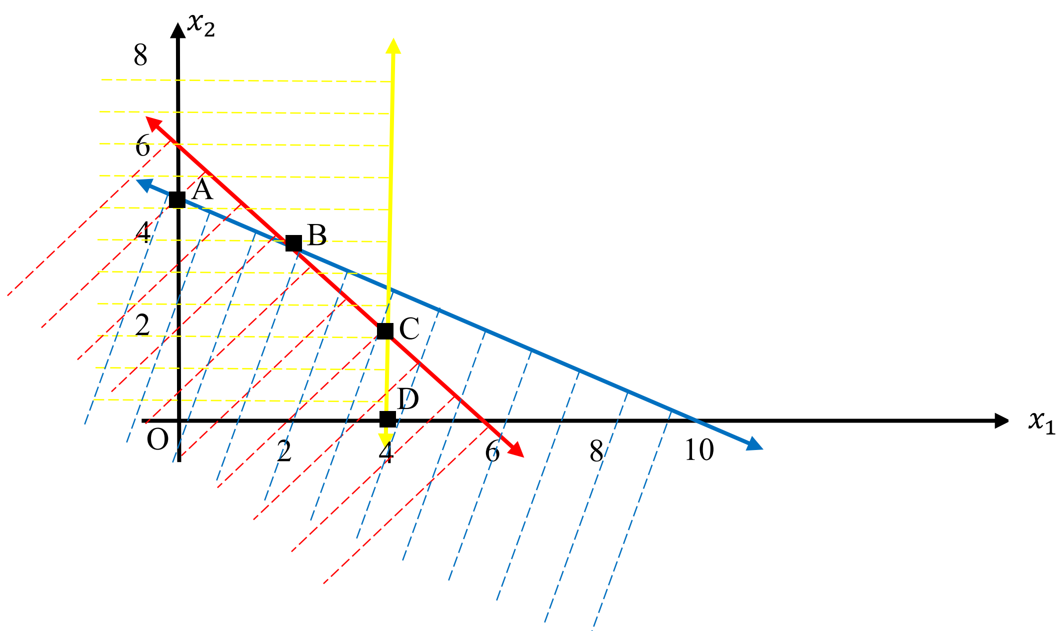
**Penyelesaian:**

Daerah layak masalah PL merupakan penyelesaian dari semua kendala, yaitu daerah OABCD, seperti pada gambar berikut.

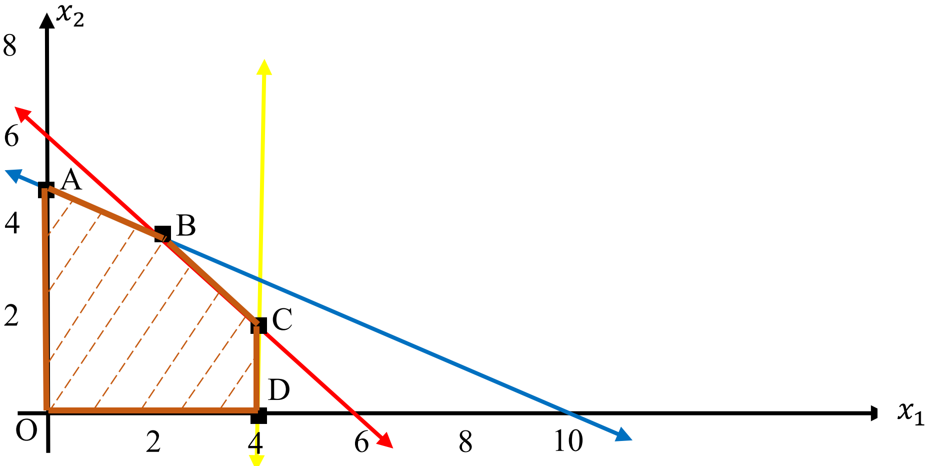
1. Penggambaran garis-garis kendala




2. Penggambaran setengah bidang tertutup kendala-kendala



3. Pembentukan daerah layak / daerah fisibel




Diperoleh daerah layak basisnya adalah bidang tertutup OABCD (daerah yang diarsir).

Setelah ditentukan daerah layaknya, selanjutnya dibentuk beberapa garis selidik $k = 4x_1 + 5x_2$ yang sejajar dengan fungsi tujuan $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$. Misalkan

$k_1 = 4x_1 + 5x_2 = 10,$

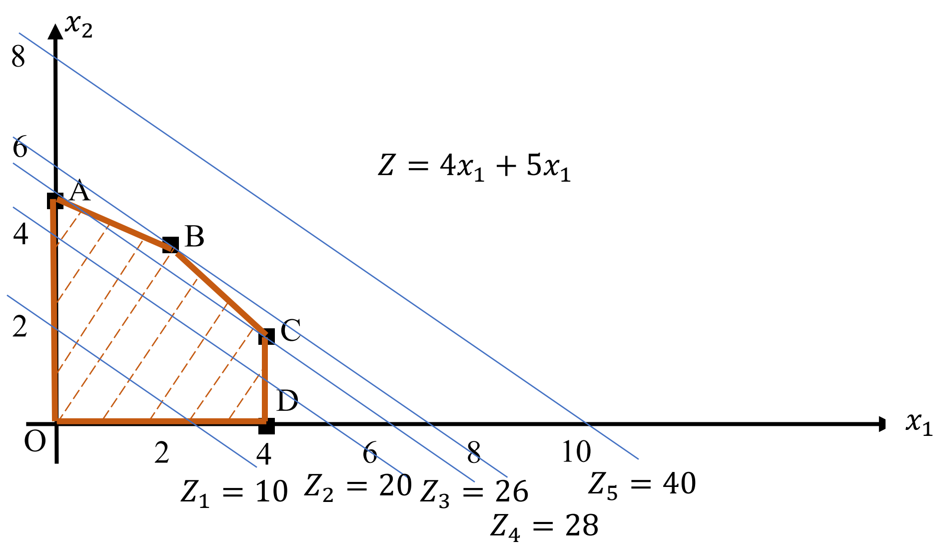
$k_2 = 4x_1 + 5x_2 = 20$

$k_3 = 4x_1 + 5x_2 = 26$

$k_4 = 4x_1 + 5x_2 = 28$

$k_5 = 4x_1 + 5x_2 = 40$

4. Pembentukan garis-garis selidik



Nilai-nilai $k$ makin besar diperoleh dengan menggeser garis-garis selidik ke kanan. Semakin ke kanan nilai fungsi akan semakin besar. Garis selidik yang menyentuh titik terluar daerah layak adalah garis $k_4 = 4x_1 + 5x_2 = 28$ yang menyentuh titik B. Garis $k_5 = 4x_1 + 5x_2 = 40$ memberikan nilai fungsi yang lebih besar, tetapi titik-titiknya sudah tidak terletak di daerah layak (tidak memenuhi kendala). Jadi penyelesaian optimal (PO) nya adalah titik B yang merupakan perpotongan garis $x_1 + 2x_2 = 10$ dan $6x_1 + 6x_2 = 36$ dengan nilai maksimum 28.

Untuk menentukan nilai solusi masalah atau $(x_1, x_2)$, maka tentukan dulu koordinat titik perpotongan garis, dalam hal ini tentukan koordinat titik B.

## 2. Metode Titik Sudut

Langkah menentukan PO dengan metode titik sudut adalah sebagai berikut.

a. Menentukan daerah layak
b. Menentukan koordinat titik-titik sudut daerah layak
c. Menentukan nilai fungsi pada semua titik sudut, tuliskan dalam tabel berikut

| **Titik Sudut** | **Nilai Fungsi Tujuan** |
|---|---|
| | |

d. Menentukan nilai fungsi yang optimal

**Contoh 2:**

Pada Contoh 1 sebelumnya diperoleh daerah layaknya adalah daerah OABCD seperti pada gambar sebelumnya. Selanjutnya akan ditentukan koordinat titik-titik sudut daerah layak OABCD

$$\mathrm{A} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{A}(0,5)$$

$$\mathrm{B} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 6x_1 + 6x_2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{B}(2,4)$$

$$\mathrm{C} = \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 36 \\ x_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{C}(4,2)$$

$$D = \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow D(4,0)$$

Nilai fungsi tujuan dari titik-titik sudut O, A, B, C, dan D disajikan dalam tabel berikut

| Titik sudut | Nilai fungsi $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$ |
|---|---|
| O(0,0) | $f(0,0) = 4.0 + 5.0 = 0$ |
| A(0,5) | $f(0,5) = 4.0 + 5.5 = 25$ |
| B(2,4) | $f(2,4) = 4.2 + 5.4 = 28\ *$ |
| C(4,2) | $f(4,2) = 4.4 + 5.2 = 26$ |
| D(4,0) | $f(4,0) = 4.4 + 5.0 = 16$ |

Dari hasil di atas terlihat bahwa fungsi $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$ bernilai maksimum di titik B(2,4) dengan nilai maksimum 28.

## 3. Metode Gradien

Langkah penyelesaian masalah PL dengan metode gradien:

a. Menentukan gradien garis dari semua kendala dan fungsi tujuan, dengan $m = -\frac{a}{b}$ untuk fungsi $ax + by = c$.
b. Mengurutkan nilai gradien dari kecil ke besar.
c. Menentukan posisi nilai gradien fungsi tujuan, misalkan terletak di antara nilai gradien kendala ke-*i* dan ke-*j*.
d. Menentukan titik optimal yang merupakan perpotongan garis dari kendala ke-*i* dan garis dari kendala ke-*j*.

**Contoh 3:**

Akan dicari penyelesaian optimal Contoh 1 dengan metode gradien. Langkah pertama adalah menghitung gradien kendala dan fungsi tujuan, diperoleh hasil sebagai berikut.

Kendala 1: $x_1 + 2x_2 \leq 10$, gradien garis $m_1 = -\frac{1}{2}$

Kendala 2: $6x_1 + 6x_2 \leq 36$, gradien garis $m_2 = -1$

Kendala 3: $x_1 \leq 4$, gradien garis $m_3 = -\infty$

Kendala 4: $x_1 \geq 0$, gradien sumbu $x_2$ adalah $m_{x_2} = m_4 = -\infty$

Kendala 5: $x_2 \geq 0$, gradien sumbu $x_1$ adalah $m_5 = 0$

Fungsi tujuan $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$, mempunyai gradien garis $m_{f(x_1,x_2)} = -\frac{4}{5}$.

Nilai-nilai gradien tersebut kemudian diurutkan sebagai berikut

$-\infty < -1 < -\frac{4}{5} < -\frac{1}{2} < 0$ atau $m_{x_2} = m_4 = m_3 < m_2 < m_{f(x_1,x_2)} < m_1 < m_{x_1}$.

Sehingga penyelesaian optimal adalah titik perpotongan antara garis kendala 2 $6x_1 + 6x_2 \leq 36$ dan kendala 1 $x_1 + 2x_2 \leq 10$, yaitu B$(2,4)$.

**Latihan : Menyelesaikan Masalah PL dengan Metode Grafik**

1. Gunakan metode garis selidik untuk menentukan nilai maksimum fungsi $f(x, y) = 2x + 3y$ terhadap kendala $x + 2y \leq 8$

   $4x + y \geq 5$

   $x \leq 3$

   $x \geq 0, y \geq 0$.

2. Gunakan metode titik sudut untuk menentukan nilai maksimum fungsi $f(x, y) = 6x + 2y$ terhadap kendala $x - y \leq 2$

   $x + 2y \leq 8$

   $3x + y \leq 9$

   $x \geq 0, y \geq 0$.

3. Gunakan metode gradien garis untuk menentukan nilai minimum fungsi $f(x, y) = x + 2y$ terhadap kendala $-x + y \leq 1$

$3x + 2y \geq 6$

$x + 4y \geq 4$

$x \geq 0, y \geq 0.$