SISTEMA MASA - RESORTE

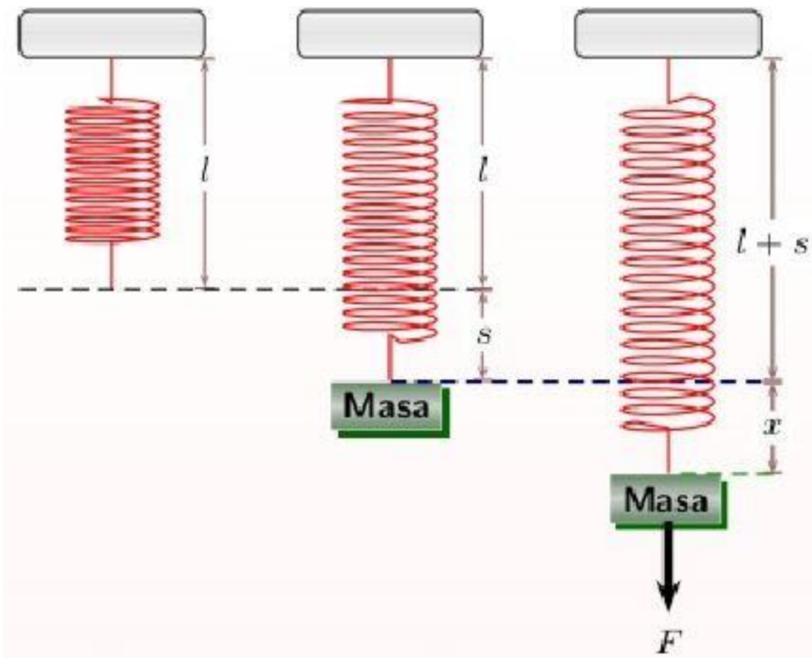
Antony Stiven Posso Gomez   A00043676

Jhoan Sebastián Velasquez   A00346075

EJERCICIO SISTEMA MASA - RESORTE

MARCO TEORICO.

Los sistemas masa – resorte consisten en un resorte fijo acoplado a una masa, la cual produce un estiramiento del resorte en el que se ven involucradas diferentes fuerzas, estas pueden ser representadas en la siguiente imagen:



En primer lugar, se encuentra el resorte fijo de longitud l.

Luego se acopla una masa al resorte lo que produce una elongación en el cual se involucran fuerzas tales como el peso de la masa (F=mg) y la ley de Hooke (F=-ks)
Como el sistema masa - resorte se encuentra en equilibrio es razonable decir que mg = -ks. En este momento se define el sistema de referencia inercial, en nuestro caso el eje positivo es hacia abajo.

Por último, se le aplica una Fuerza externa al resorte lo que produce de nuevo una elongación.

Tomando todas las fuerzas presentes más la fuerza de fricción causada por el medio y teniendo en cuenta la segunda ley de Newton (F=ma):

Se igualan todas las fuerzas, tomando como positivas las que tienen dirección hacia abajo y negativas las que tienen dirección hacia arriba, la ecuación diferencial resultante es la siguiente:

$$my'' = mg - k(y + s) - cy' + F_{ext}$$

$my'' = \cancel{mg} - ky - \cancel{ks} - cy' + Fext$

Como mg = -ks se cancelan

Pasando variables a un lado y constantes a otro

$my'' + cy' + ky = Fext$

Ecuación diferencial sistema masa – resorte

Dependiendo de que consideraciones se hagan, se pueden dar 4 casos para los sistemas masa – resorte:

Caso 1: Movimiento libre y no amortiguado

No hay fuerza de fricción $c = 0$

No hay fuerza externa $Fext = 0$

$my'' + ky = 0$

Caso 2: Movimiento libre y amortiguado

Hay fuerza de fricción $c \neq 0$

No hay fuerza externa $Fext = 0$

$my'' + cy' + ky = 0$

Caso 3: Movimiento forzado y no amortiguado

No hay fuerza de fricción $c = 0$

Hay fuerza externa $Fext \neq 0$

$my'' + ky = Fext$

Caso 4: Movimiento forzado amortiguado

Hay fuerza de fricción $c \neq 0$

Hay fuerza externa $Fext \neq 0$

$my'' + cy' + ky = Fext$

PROCEDIMIENTO.

El primer modelo a trabajar fue en esta ocasión el caso 1, un movimiento libre no amortiguado.

Inicialmente, se midió el periodo T del resorte utilizando el modelo planteado en GeoGebra, un cronometro y midiendo el tiempo (en segundo) que tardo el resorte en volver al mismo punto después de haber realizado un recorrido descendente y uno ascendente (figura 1), se realizó 7 repeticiones y se tomó el promedio de ella para los posteriores cálculos, los datos se pueden encontrar en la tabla 1

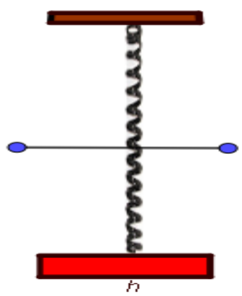


Figura 1. Resorte

Tabla 1. Periodos obtenidos en las repeticiones.

Repeticiones	**Periodo T (s)**
1	**5.51**
2	**5.23**
3	**5.06**
4	**5.31**
5	**5.06**
6	**5.20**
7	**5.23**
Promedio	**5.23**

Posteriormente se utilizó las siguientes ecuaciones:

$$T = \frac{2\pi}{w0} \qquad (1)$$

$$wo = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2)$$

$$V. = \frac{y_{2} - y_{1}}{t_2 - t_1} \qquad (3)$$

$$y(0) = c_1 \qquad (4)$$

$$y'(0) = \frac{6}{5}c_2 \qquad (5)$$

$$A = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2} \qquad (6)$$

$$tan^{-1}\alpha = \frac{c_2}{c_1} \qquad (7)$$

$$y(t) = A\cos(w.t - \alpha) \qquad (8)$$

$$\alpha = \begin{cases} \tan^{-1}(B/A) & \text{si } A > 0,\ B > 0 \text{ (primer cuadrante),} \\ \pi + \tan^{-1}(B/A) & \text{si } A < 0 \text{ (segundo o tercer cuadrante),} \\ 2\pi + \tan^{-1}(B/A) & \text{si } A > 0,\ B < 0 \text{ (cuarto cuadrante),} \end{cases}$$

El valor que se escogió para la masa fue de 2.5 kg, un valor razonable puesto que es una masa adecuada para el resorte, es decir, que al ser acoplada al resorte será posible que el resorte oscile, mientras que, si escogiésemos una masa con un valor bastante mayor a el valor de la constante de elasticidad, lo más probable es que el resorte no presente oscilaciones debido a la gran fuerza (el peso) que lo atrae hacia abajo.

Se utilizó la ecuación (1) para encontrar la frecuencia natural (w.), después se utilizó la ecuación (2) para hallar el valor de la constante de resorte (k). se obtuvo valores de:

$W_0 = \frac{2\pi}{5.3}$

$K = 2.5*(\frac{2\pi}{5.3})^2$ $\quad$ $K = 3.60\ \frac{N}{m}$

Finalmente se planteó la ecuación de la siguiente forma

my’’ + ky = 0

La ecuación diferencial resultante, que describe al sistema masa – resorte, con los valores de m y k reemplazados es la siguiente:

2.5y’’ + 3.6y = 0

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene que la solución general es:

$Y(t) = c1\cos\left(\frac{6}{5}t\right) + c2\text{sen}\left(\frac{6}{5}t\right)$

PVI

Tomando el modelo planteado en GeoGebra se obtiene:

Unidades de GeoGebra será la medición utilizada y se representara con la letra u

Y(0)= 10 u

Para medir el Y'(0) aproximado se utilizó dos métodos que posteriormente fueron comparados.

Primer método. Velocidad medida con tiempos reales (usando cronometro) desde una posición y. hasta una posición y

Se siguió el siguiente proceso:

- Se midió el desplazamiento desde una posición y_1= 10 hasta una posición y_2=6 y se medió el tiempo correspondiente utilizando un cronometro.
- Se realizó 6 veces el experimento y se utilizó el promedio de ellos. los datos se pueden encontrar en la tabla 2.
- Se utilizó la ecuación (3) para realizar una aproximación de la velocidad inicial.

Tabla 2. Tiempos obtenidos de las repeticiones.

Repeticiones	**Tiempo (s)**
1	**1.07**
2	**1.18**
3	**1.05**
4	**1.14**
5	**1.11**
6	**1.05**
Promedio	**1.1**

Se obtuvo que:

Y'(0) = -3.64 u/s

Se utilizaron las ecuaciones (4), (5) y (6) para obtener:

C_1 = 10 u

C_2 = -3.033u

A=10.5

Reemplazando en la ecuación (8) se obtuvo:

$$y(t) \ = \ 10.5\cos(\frac{6}{5}t - (\alpha))$$

Al calcular el ángulo este nos da un valor de -0.29. Analizando los signos de C_1 y C_2 nos damos cuenta que el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante por lo cual según la ecuación (9) el ángulo se calcula con $(2\pi+\alpha)$. Sin embargo, al agregar este ángulo en la ecuación y posteriormente modelar el movimiento se obtiene la figura 2.

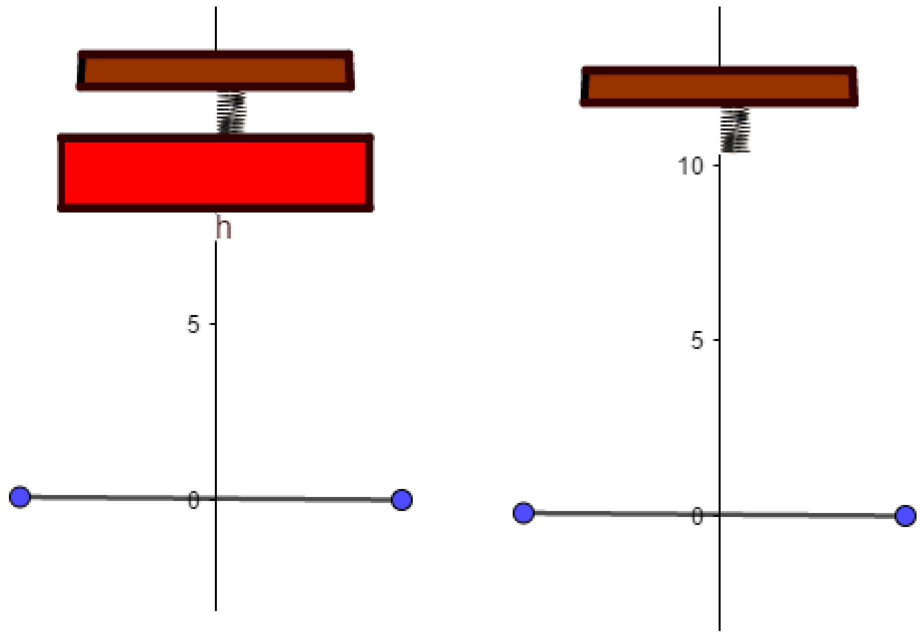


Figura 2. Posición del resorte en t=0

En la figura 2 se observa que la posición inicial y(0), es decir en t=0, el resorte tiene y=10u en el sistema de referencias de GeoGebra, pero que al traducirlo a nuestro sistema de referencia es $y(0) = -10$, lo cual contradice nuestra condición inicial. Sin embargo, esto lo podemos explicar debido a que nuestro sistema de referencia es diferente del que utiliza predeterminadamente GeoGebra (figura 3) por lo cual, se utilizó un ángulo de $(\pi+\alpha)$ para ajustar el modelo a la posición correcta siguiendo nuestro sistema de referencia.

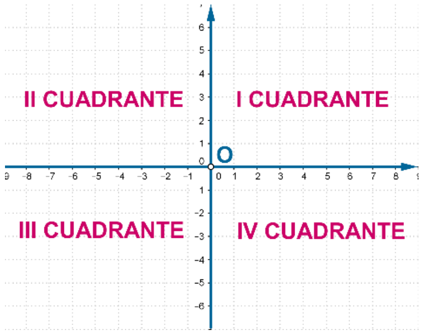


figura 3. Cuadrantes de GeoGebra

Posteriormente se obtuvo la siguiente ecuación.

$$y(t) \ = \ 10.5\cos(\frac{6}{5}t - (2.85))$$

Finalmente se modela el nuevo movimiento en GeoGebra y se comprueba que:

- El modelo cumple con y(0), es decir empieza en la posición y = -10 coordenadas GeoGebra la cual es y = 10 en nuestras coordenadas.
- También cumple con y'(0), debido a que realiza un movimiento ascendente lo que implica un signo negativo.
- Realiza un movimiento constante debido a la ausencia de amortiguación. Esto puede observarse en la gráfica y vs t.

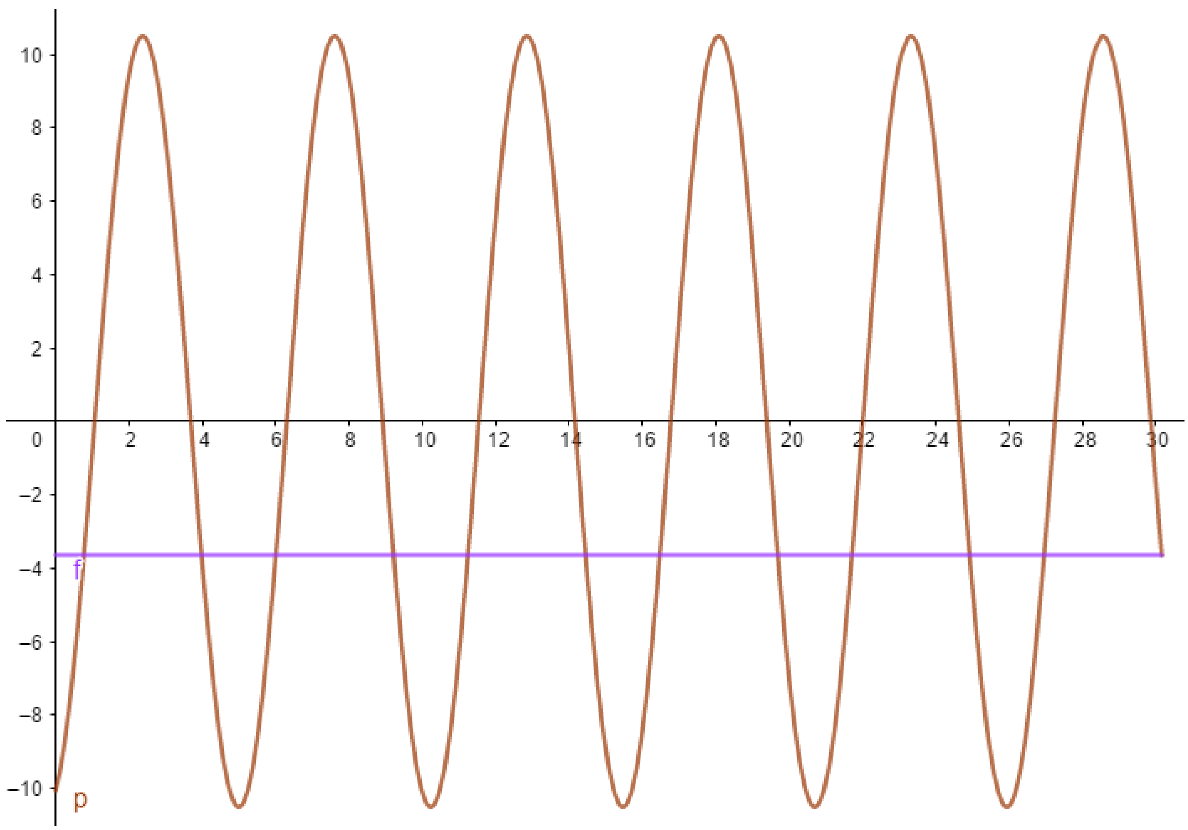


Figura 4. Grafica y vs t

Segundo método. Medición de amplitud mirando el modelo de GeoGebra y encontrando y’(0).

Para medir la amplitud fue necesario observar el modelo en GeoGebra. Se observa que el resorte oscila desde la posición de equilibrio a sus puntos extremos 10.5 unidades, por lo que la amplitud es A = 10.5

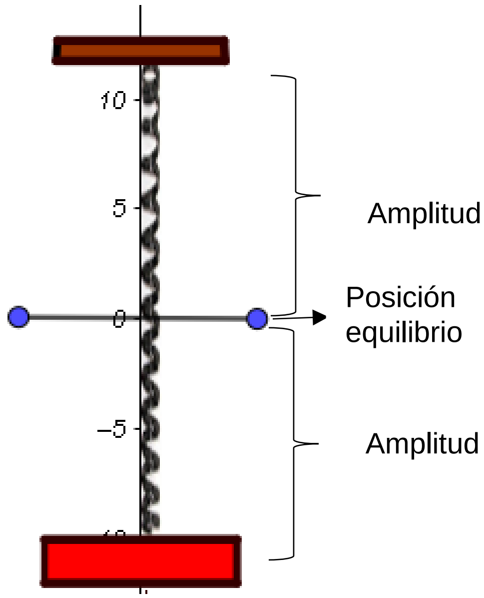


Figura 5.

Por lo tanto, teniendo que la Amplitud es 10.5 y que la posición inicial es 10 podemos hallar mediante la ecuación 6 y 5 la velocidad inicial:

$$10.5 \ = \ \sqrt{(10)^2 + \left(\frac{5y'(0)}{6}\right)^2}$$

Despejando y’(0)

Y’(0) = ± 3.80

Concluimos que Y’(0) = - 3.80 puesto que el resorte a t = 0 va a hacia arriba, es decir va en contra de la dirección positiva de nuestro sistema de referencia inercial

La ecuación alternativa que describe el sistema masa – resorte va quedando de la siguiente manera:

$$y(t) \ = \ 10.5\cos(\frac{6}{5}t - (\alpha))$$

Para encontrar α despejamos de la ecuación 7:

$$tan^{-1}\alpha \ = \ \frac{c_2}{c_1}$$

$$\alpha \ = tan^{-1} \ \frac{c_2}{c_1}$$

$$\alpha = \ tan^{-1} \ \frac{-3.80}{10}$$

$\alpha =$ -0.363

Como α da negativo, observamos las constantes para saber en qué cuadrante se encuentra. C2 que acompaña al sen es negativo, por lo tanto, son los Y negativos, y c1 que es positivo y acompaña al coseno nos dice que son los X positivos. Por lo que se encuentra en el 4to cuadrante.

$\alpha =$ -0.363 + 2 π

$\alpha =$ 5.92

Reajustando el ángulo debido a lo mencionado anteriormente nos queda.

α= 2.78

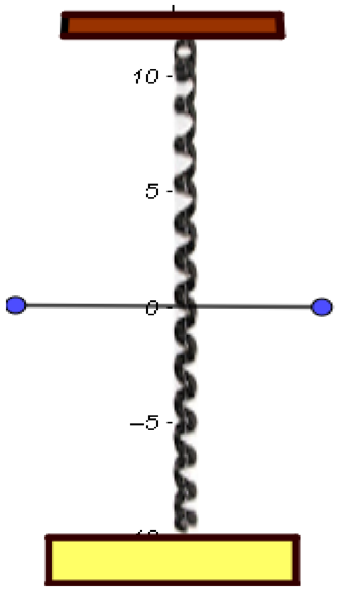
La ecuación final que describe el modelo masa – resorte es:

$$y(t) \ = \ 10.5\cos(\frac{6}{5}t - (2.78))$$

Al analizar y comparar la obtención de y’(0) y posteriormente la ecuación general por el método 1 y el método 2 nos damos cuenta que ambas son muy parecidas. Es decir, se puede obtener la velocidad inicial mediante el método 1 con la utilización de dos posiciones, un cronometro y varias repeticiones, o por el método dos obteniendo la amplitud al observar el modelo en GeoGebra y encontrando la velocidad inicial con ecuación 6. Ambos métodos proporcionan datos muy similares si son realizados correctamente.

Segundo modelo. Masa-Resorte-Amortiguador

El segundo modelo a trabajar fue un sistema masa-resorte con amortiguación. Se modelará el caso 2, movimiento libre y amortiguado y se utilizará un sistema con oscilaciones subamortiguadas. Teniendo los valores de k hallada anteriormente se utilizará un valor de m=5 kg y se le agregará un amortiguador que proporciona 3N de resistencia por cada m/s.
c = 3N*s/m



La definición de la fuerza de fricción es F = cv donde v es velocidad. Esta ecuación nos dice que la fuerza de fricción con el medio es proporcional a la velocidad con la que se mueve la masa unidad al resorte, por lo que a mayor velocidad habrá una mayor fuerza de fricción.

F = 3 * (-3.6)
F = -10.8 N Fuerza de fricción
Nuestra masa en este caso es de 5 kg y nuestra fuerza de fricción tiene un valor bastante considerable, por lo que se espera que no oscile por mucho tiempo el resorte con la masa acoplada, debido a la masa, la gran resistencia que opone el medio y a la poca velocidad inicial. Al final del documento se hará el análisis correspondiente comparando con el modelo.

Se utiliza por tanto el modelo.
my’’ + cy’ + ky= 0

se reemplazó los valores para obtener

$$y'' + \frac{3}{5}y' + 0.72y = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene

$$r = \frac{-3}{5} + 2.52i$$

Se plantea la ecuación general de la solución.

y(t) = $e^{at}(c_1 \cos(w.t) + c_2 sen(w.t))$ (10)

con las condiciones iniciales utilizadas anteriormente y(0)= 10 , y'(0)= -3.64 , utilizando las ecuación (4) y (6) y la derivación de la ecuación (10)
y'(0) = ac1 + c2 (1) se obtiene valores de:

C1 = 10
C2 =2.36
A= 10.275

Inicialmente se obtiene con la ecuación (7) un valor de α= -0.232. Debido al reajuste mencionado anteriormente se utiliza un valor de α= 2.91

Por tanto, el modelo queda:

$$y(t) = 10.27e^{\frac{-3}{5}t}(\cos(2.52\text{t} - 2.91)$$

Finalmente se modelo el movimiento y vs t comprueba que la gráfica si se comporta conforme lo hace un sistema amortiguado en el cual en un tiempo t el resorte deja de oscilar como se puede observar en la figura 6.

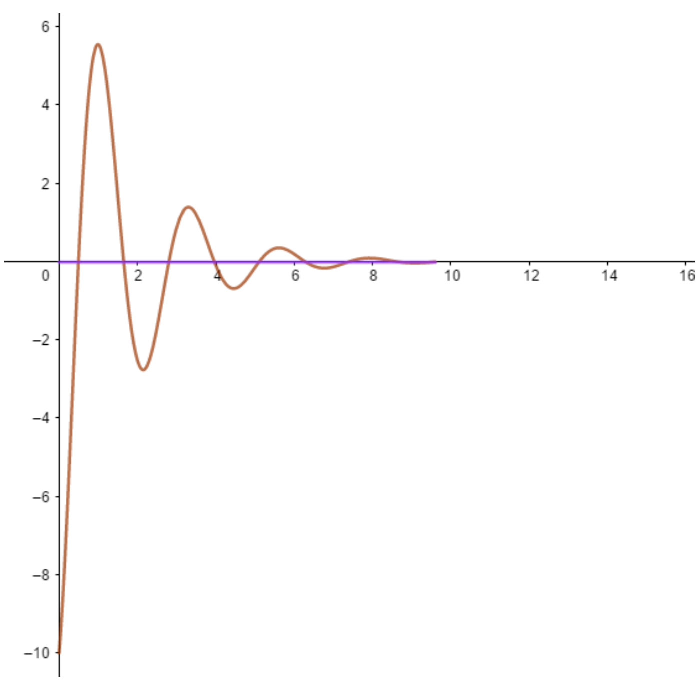


Figura 7. Movimiento y vs t de un sistema amortiguado.

Como se predijo, el resorte no oscilaría por mucho tiempo, esto es por la masa acoplada, la velocidad inicial de la masa junto con el resorte, y la fuerza de fricción que presentaba el medio.

El valor de c es razonable, puesto que podemos hacer la suposición de que el resorte se encuentra en un medio que opone mucha resistencia como por ejemplo el agua y el valor de m es razonable, porque, aunque supera al valor de la constante de elasticidad, no es por una diferencia muy grande y es posible que el resorte oscile. En conclusión, los valores de c y m son válidos, ya que con ellos es posible observar movimiento en el sistema masa-resorte.