Teoría – Tema 3

Propuesta de Trabajo voluntario con lenguaje de programación C

Desarrollar polinomios de Taylor con lenguaje C

Hemos comentado, a modo de culturilla general, el desarrollo en series de potencia de cualquier función derivable (polinomios de Taylor). La fórmula que resume esta aproximación es la siguiente.

$$f(x) \simeq p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x-x_0)^n$$

El valor x_0 es el centro del desarrollo de la serie. Cuantas más derivadas incluyamos, mejor será la aproximación del polinomio de Taylor a la función.

De esta forma, si el valor x de $f(x)$ lo sustituimos por un valor numérico cualquiera, tendremos una expresión sencilla para obtener la imagen correspondiente. Y así, por ejemplo, operan muchas calculadoras o programas informáticos para obtener el valor de $\ln(2)$, e^4 , $sen(1)$ o $\sqrt{5}$. Son todos valores irracionales (infinitos decimales), que se pueden aproximar de manera sencilla con su polinomio de Taylor correspondiente.

Según el valor x_0 del centro del desarrollo y el valor de x que queramos evaluar en $f(x)$, es posible que necesitemos más o menos términos en la serie de potencias para alcanzar una buena aproximación.

Más información sobre los polinomios de Taylor la puedes encontrar en la web de la asignatura:

https://www.geogebra.org/m/egfh5tew#chapter/701947

Por ejemplo, el desarrollo del logaritmo neperiano $x_0=1$ alrededor de será:

$f(x)=\ln(x)$ → función a desarrollar

$$f'(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad f''(x)=\frac{-1}{x^2} \quad , \quad f'''(x)=\frac{2}{x^3} \quad , \quad f^{4)}(x)=\frac{-6}{x^4} \quad , \quad f^{5)}(x)=\frac{24}{x^5} \quad \ldots$$

$f^{n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ → derivada n-ésima

$$\ln(x) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{1}{2}\frac{-1}{1^2}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\frac{2}{1^3}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}\frac{-6}{1^4}(x-1)^4 + \frac{1}{5!}\frac{24}{1^5}(x-1)^5 + \ldots$$

Si ahora deseo aproximar, por ejemplo, el valor de $\ln(2)$ tendremos:

$$\ln(2)\approx 0+\frac{1}{1}(2-1)+\frac{1}{2}\frac{-1}{1^2}(2-1)^2+\frac{1}{3!}\frac{2}{1^3}(2-1)^3+\frac{1}{4!}\frac{-6}{1^4}(2-1)^4+\frac{1}{5!}\frac{24}{1^5}(2-1)^5+\ldots$$

Operamos:

$$\ln(2)\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots$$

Cuánto mas términos de la serie incluyamos, más exacta será la aproximación. En función del número de decimales de precisión que querramos obtener, podremos cortar la serie antes o despúes.

¿Qué te propongo que hagas con el lenguaje de programación C que estás aprendiendo en clase de Informática?

El siguiente listado va de menor a mayor dificultad. Comienza con lo más sencillo y ve complicando poco a poco tu código de programación.

1. Obtener el valor de $\ln(2)$, e^4 , $sen(1)$ con una precisión de 4 cifras decimales (recuerda que el argumento del seno va en radianes). Tendrás que comparar el resultado que obtienes con el que te devuelve la función correspondiente de la librería math de C. En el momento que coincida hasta la cuarta cifra decimal, deberás parar la serie e informar cuantas derivadas has necesitado en el polinomio de Taylor para conseguir dicha aproximación.
2. Permitir al usuario que pueda elegir el valor x que desee evaluar en $\ln(x)$, e^x y en $sen(x)$. Posiblemente tendrás que variar el valor del centro de desarrollo x_0 para conseguir que la serie converga rápidamente al valor deseado. Nuevamente debes truncar la serie cuando hayas alcanzado la precisión de 4 cifras decimales, e informar del número de derivadas empleadas en el polinomio de Taylor.
3. Repetir el paso 1 para estimar el valor de $\sqrt{5}$.
4. Repetir el paso 2 para obtener cualquier valor de $\sqrt{x}$ que el usuario desee estimar