Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 19 - punto simétrico respecto a un plano

1. Calcular la recta contenida en el plano $\Pi_1: x+y+z=3$ paralela al plano $\Pi_2: x=0$ y que pasa por el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de Π_2 .

Para escribir la ecuación de la recta necesitamos un vector director de la recta y un punto de la recta.

En el enunciado queda claro que la recta pasa por el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de Π_2 . Por lo tanto, calculemos ese punto simétrico.

Para ello tomamos el vector normal a $\Pi_2: x=0 \rightarrow \vec{u_{\Pi:2}}=(1,0,0)$ → Trazamos la recta perpendicular a Π_2 que pasa por $B(-1,1,1) \rightarrow r: \left\{ \begin{matrix} x=-1+t \\ y=1 \\ z=1 \end{matrix} \right\}$

Obtenemos el punto de corte de r con Π_2 , sustituyendo la ecuación en paramétrica de la recta en la ecuación general del plano → $(-1+t)=0 \rightarrow t=1$ → Llevando el valor del parámetro a la recta r tendremos el punto de corte buscado → $\left\{ \begin{matrix} x=-1+1 \\ y=1 \\ z=1 \end{matrix} \right\} \rightarrow P(0,1,1)$

Este punto de corte es el punto medio del segmento $\overline{BB'}$, siendo $B'(x,y,z)$ el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto a $\Pi_2 \rightarrow (0,1,1)=(\frac{x-1}{2},\frac{y+1}{2},\frac{z+1}{2}) \rightarrow B'(1,1,1)$ → Este punto pertenece a la recta solución de nuestro ejercicio.

Necesitamos, por último, un vector paralelo a la recta solución.

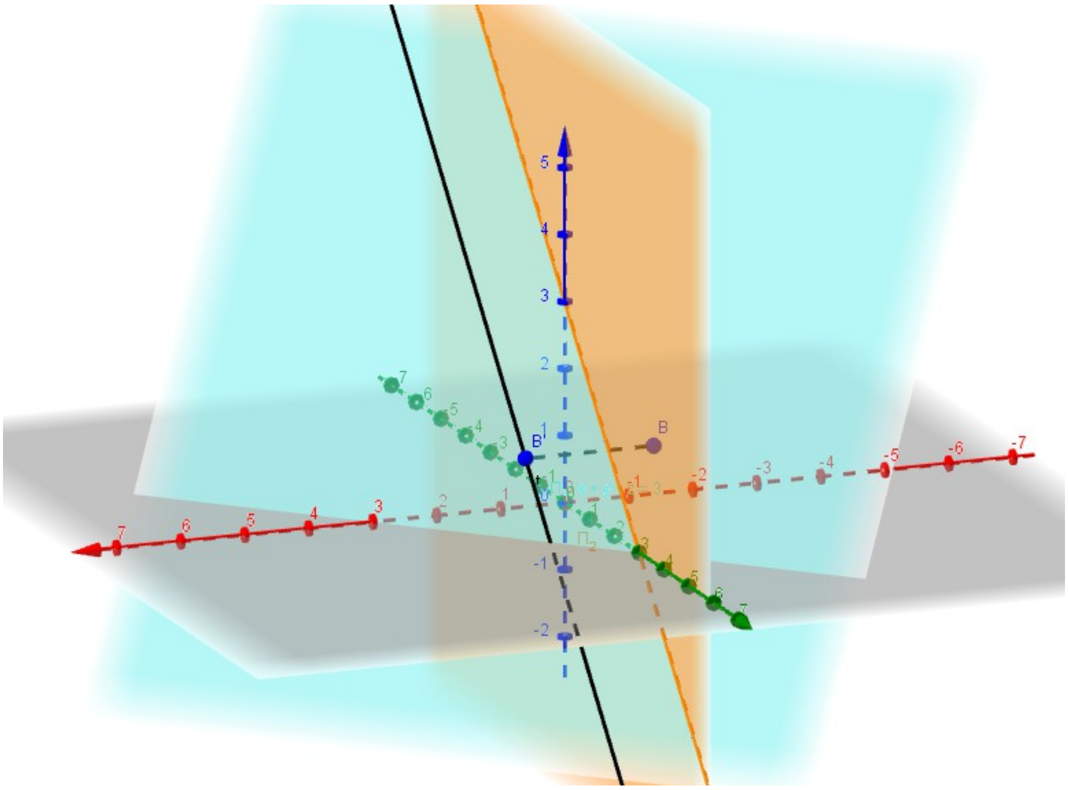
Los planos $\Pi_1: x+y+z=3$ y $\Pi_2: x=0$ no son paralelos, ya que sus ecuaciones generales no son proporcionales. Tampoco son coincidentes, por lo que ambos planos se cortan en una recta. Esa recta de corte es paralela a la recta solución del ejercicio, ya que el enunciado afirma que la recta solución está contenida en $\Pi_1: x+y+z=3$ y es paralela a $\Pi_2: x=0$.

Calculemos la recta de corte de ambos plenos, sustituyendo la ecuación $\Pi_2: x=0$ en $\Pi_1: x+y+z=3$ $\rightarrow y+z=3 \rightarrow z=\lambda \rightarrow y=3-\lambda \rightarrow s: \left\{ \begin{matrix} x=0 \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{matrix} \right\} \rightarrow \vec{u_s}=(0,-1,1)$

El vector director $\vec{u_s}=(0,-1,1)$ es paralelo a la recta solución del ejercicio. Como esta recta pasa por el punto $B'(1,1,1)$ calculado anteriormente su ecuación será:

$$t:\begin{Bmatrix} x=1 \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{Bmatrix}$$

Con Geogebra dibujamos los planos y la recta solución de nuestro ejercicio.



2. Sean los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$. Halla la ecuación general y paramétrica del plano Π respecto del cual ambos puntos son simétricos.

El plano Π respecto al cual ambos puntos son simétricos, será perpendicular a la recta que une los puntos P y Q .Además, el plano pasará por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

Es decir, si obtenemos el vector $\vec{PQ}$ tendemos el vector perpendicular al plano. Y si obtenemos el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, tendremos un punto del plano. Y podremos escribir la ecuación general del plano.

$$\vec{PQ}=(-2,-2,0) \rightarrow \vec{u_\Pi}=(-2,-2,0) \rightarrow \Pi:-2x-2y+D=0$$

Punto medio $\overline{PQ} \rightarrow A\left(\frac{2+0}{2},\frac{3+1}{2},\frac{1+1}{2}\right)=(1,2,1)$

Si $A\in\Pi \rightarrow -2(1)-2(2)+D=0 \rightarrow D=6$

La ecuación general del plano solución es $\Pi:-2x-2y+6=0$ → Simplificar → $\Pi:-x-y+3=0$

Para obtener su ecuación paramétrica, resolvemos el sistema formado por esa ecuación con tres incógnitas.

Un parámetro libre será la incógnita que no aparece en la ecuación general: $z=\alpha$

Y el segundo parámetro libre será una de las otras incógnitas: $y=\beta$

Así, podemos despejar la incógnita x : $x=-\beta+3$

Y la ecuación paramétrica del plano resulta:

$$\Pi:\left\{\begin{array}{c} x=-\beta+3 \\ y=\beta \\ z=\alpha \end{array}\right\}$$

3. Sea el plano $\Pi : 2x+y-z+8=0$ **.**

a) Calcula el punto P' **, simétrico del punto** $P(2,-1,5)$ **respecto del plano** Π **.**

b) Calcula la recta r' **, simétrico de la recta** $r: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ **respecto del plano** Π **.**

a) La recta s que une los puntos simétricos P y P' es perpendicular al plano $\Pi : 2x+y-z+8=0$, y lo corta en el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Si $\Pi : 2x+y-z+8=0 \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,1,-1)\perp\Pi \rightarrow \vec{u_\Pi}=\vec{u_s}$, siendo $\vec{u_s}$ el vector director de la recta que une ambos puntos simétricos. Y con vector director y un punto, tenemos la ecuación de la recta:

$$s:\left\{\begin{matrix} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=5-t \end{matrix}\right\}$$

Si llevamos estas ecuaciones paramétricas a la ecuación general del plano, obtenemos el punto de corte de ambos.

$$2(2+2t)+(-1+t)-(5-t)+8=0 \rightarrow t=-1 \rightarrow M=(0,-2,6)\equiv punto \quad medio \quad \overline{PP'}$$

Si $P(2,-1,5)$ y $P'(x,y,z)$ $\rightarrow$ $(0,-2,6)=(\frac{x+2}{2},\frac{-1+y}{2},\frac{5+z}{2})$ $\rightarrow$ Igualamos cada componente: $x=-2$, $y=-3$, $z=7$.

El punto simétrico buscado es $P'(-2,-3,7)$.

b) Del apartado anterior, el punto P pertenece a la recta r que el enunciado da en este nuevo apartado. Por lo que podemos coger otro punto $Q\in r$ de la recta, sacar su simétrico Q' respecto al plano, y sacar la recta simétrica r' como la recta que pasa por P' y Q' .

También podemos hacerlo de otra manera. Si la recta y el plano se cortasen en un punto, ese punto de corte pertenecería tanto a la recta r como a su simétrica r' , y ya podríamos trazar la recta simétrica al tener dos puntos. Vamos a hacerlo así.

Si pasamos la recta a paramétricas, podremos sustituir directamente en la ecuación general del plano y decidir sobre el resultado que obtengamos.

$$r: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1} \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=2-2t \\ y=-1+3t \\ z=5+t \end{matrix}\right\} \rightarrow 2(2-2t)+(-1+3t)-(5+t)+8=0 \rightarrow t=3$$

Obtenemos un punto solución, que será el punto de corte de la recta r con el plano. Este punto de corte es $Q(-4,8,8)\in r'$. La recta simétrica r' también corta al plano en ese punto.

Viendo las ecuaciones paramétricas de la recta, es directo que el punto $P(2,-1,5)$ pertenece a r . Y en el apartado anterior obtuvimos el simétrico de este punto respecto al plano: $P'(-2,-3,7)\in r'$. Este punto $P'(-2,-3,7)$ pertenece a la recta simétrica buscada r' .

Contamos con dos puntos de la recta simétrica r' , por lo que podemos sacar un vector director:

$$\vec{P'Q}=\vec{u_{r'}}=(-2,11,1)$$

Y con un punto y un vector director, tenemos la ecuación de la recta simétrica r' .

$$r':\begin{Bmatrix} x=-2-2t \\ y=-3+11t \\ z=7+t \end{Bmatrix}$$