Matematikuppgift			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Antagningsprov svarsform																																	nn
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	B, 2p	delB	5p

C. Ge fullständig lösning till uppgiften nedan. (max 5p)

Lös olikheten
$$\sqrt{4x-3-x^2}-\sqrt{7x-10-x^2}\geq 1.$$

Lös olikheten $\sqrt{4x-3-x^2}\ -\ \sqrt{7x-10x-x^2}\ \geq\ 1$

3 lösningar: 1.provskaparnas, 2.extra , 3.egen

1.provskaparnas :

C. *Lösning:* Vi börjar med att bestämma definitionsmängden för vänsterledet. Det krävs att uttrycken under båda rottecknen är icke-negativa. Vi behöver lösa olikheterna $4x-3-x^2\geq 0$ samt $7x-10-x^2\geq 0$. Vi har

$$4x-3-x^2=-(x-1)(x-3)\geq 0,\ \text{vilket är ekvivalent med } 1\leq x\leq 3,$$

och

$$7x-10-x^2=-(x-2)(x-5)\geq 0,\ \text{vilket är ekvivalent med } 2\leq x\leq 5.$$

Definitionsmängden för vänsterledet är alltså mängden av alla x som uppfyller $2\leq x\leq 3$.

För att efter kvadrering få en olikhet ekvivalent med den vi har behöver vi säkerställa att båda leden har samma tecken. Vi flyttar därför först över den andra roten till högerledet

$$\sqrt{4x-3-x^2}\geq 1+\sqrt{7x-10-x^2}\ (\geq 0),$$

och kvadrerar därefter

$$4x-3-x^2\geq 1+7x-10-x^2+2\sqrt{7x-10-x^2}.$$

Den olikheten är ekvivalent med den givna. Vi flyttar över till vänsterledet alla termer utom den som innehåller ett rottecken och får

$$6-3x\geq 2\sqrt{7x-10-x^2}.$$

Efersom det nya högerledet är icke-negativt måste eventuella lösningar uppfylla $6-3x\geq 0$, det vill säga $x\leq 2$. Eftersom lösningarna dessutom måste tillhöra definitionsmängden får vi att det enda tal som kan komma ifråga som lösning är $x=2$. Vi kontrollerar om det är en lösning genom att sätta in $x=2$ i den ursprungliga olikheten

$$\sqrt{8-3-4}-\sqrt{14-10-4}=\sqrt{1}-\sqrt{0}=1,$$

det vill säga $x=2$ är en lösning.

Den givna olikheten har alltså en enda lösning och den är $x=2$.

1.provskaparnas (word-ifierad) :

Lös olikheten $\sqrt{4x-3-x^2} - \sqrt{7x-10-x^2} \geq 1$

C. *Lösning*: Vi börjar med att bestämma definitionsmängden för vänsterledet. Det krävs att uttrycken under båda rottecknen är icke-negativa. Vi behöver lösa olikheterna $4x - 3 - x^2 \geq 0$ samt $7x - 10 - x^2 \geq 0$.
Vi har
$4x - 3 - x^2 = -(x-1)(x-3) \geq 0$, vilket är ekvivalent med $1 \leq x \leq 3$
och
$7x - 10 - x^2 = -(x-2)(x-5) \geq 0$, vilket är ekvivalent med $2 \leq x \leq 5$

Definitionsmängden för vänsterledet är alltså mängden av alla x som uppfyller $2 \leq x \leq 3$.
För att efter kvadrering få en olikhet ekvivalent med den vi har behöver vi säkerställa att båda leden har samma tecken. Vi flyttar därför först över den andra roten till högerledet

$$\sqrt{4x - 3 - x^2} \geq 1 + \sqrt{7x - 10 - x^2} \quad (\geq 0)$$

och kvadrerar därefter

$$4x - 3 - x^2 \geq 1 + 7 - 10 - x^2 + 2\sqrt{7x - 10 - x^2}$$

Den olikheten är ekvivalent med den givna. Vi flyttar över till vänsterledet alla termer utom den som innehåller ett rottecken och får
$6 - 3x \geq 2\sqrt{7x - 10 - x^2}$

Eftersom det nya högerledet är icke-negativt måste eventuella lösningar uppfylla $6 - 3x \geq 0$, det vill säga $x \leq 2$. Eftersom lösningarna dessutom måste tillhöra definitionsmängden får vi att det enda tal som kan komma ifråga som lösning är $x = 2$. Vi kontrollerar om det är en lösning genom att sätta in $x = 2$ i den ursprungliga olikheten

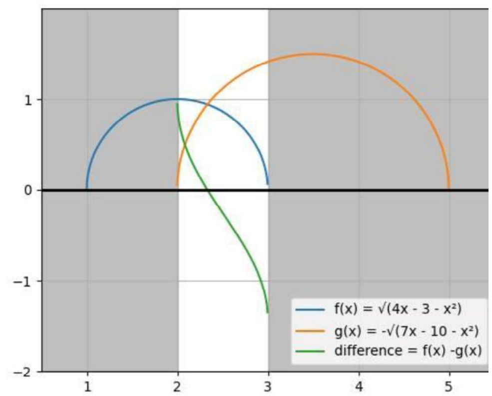
$$\sqrt{8 - 3 - 4} - \sqrt{14 - 10 - 4} = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$$

det vill säga $x = 2$ är en lösning.
Den givna olikheten har alltså en enda lösning och den är $x = 2$.

2.extra :

I uppgift C kan vi också spara tid med litet begreppsförståelse inom analytisk geometri

Lös olikheten $\sqrt{4x-3-x^2} - \sqrt{7x-10-x^2} \geq 1$



Men vi ser att det är uppochnedvända parabler som radikander och efter litet kvadratkomplettering (se fotnot 1) kan vi skriva om uttryckena till cirkelhalvor på mittpunktsform

$$\sqrt{1 - (x-2)^2} - \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2} \geq 1$$

Vi har halvcirklelbågar med radierna och mittpunkterna (2; 1) och (1,5; 3,5)

Cirkelhalvornas definitionsområden är [1,3] och [2, 5] med nollställen som ändpunkter. Skillnadens definitionsområde är snittet dvs. intervallet [2,3].

De x-värden i definitionsområdet för vilka differensen är minst 1 syns på bilden. Skillnaden minskar medan den blå bågen avtar och den oranga växer. Störst är den för definitionsintervallets lägsta gräns 2. (se fotnot 2)

$$\begin{aligned} y^2 &= 4x - 3 - x^2 \\ y^2 + x^2 - 4x + 4 &= 1 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 1^2 \\ |x-2| &\leq 1 \\ -1 \leq x - 2 &\leq 1 \\ 1 \leq x &\leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 7x - 10 - x^2 \\ y^2 + x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}x + \frac{49}{4} &= \frac{9}{4} \\ y^2 + \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ -\frac{3}{2} \leq x - \frac{7}{2} &\leq \frac{3}{2} \\ -2 \leq x &\leq 5 \end{aligned}$$

Vi löser nu $\sqrt{p_1} \geq \sqrt{p_2} + 1$ med kvadrering $\iff$ $p_1 \geq p_2 + 2\sqrt{p_2} + 1$

$2\sqrt{p_2} \leq p_1 - p_2 - 1 = 6 - 3x$ Nu måste $6 - 3x \geq 0 \iff x \leq 2$

Det enda talet i definitionsmängden [2,3] som uppfyller det är x = 2.

Då får vi vårt enda ställe där skillnaden är minst 1.

$$f(2) = \sqrt{4 \cdot 2 - 3 - 2^2} - \sqrt{7 \cdot 2 - 10 - 2^2} = 1 - 0 = 1$$

Svar : Då x=2.

Halvcirklarna C_1 och C_2 är definierade och kontinuerliga funktioner i [2; 3]. Då x = 2 får $C_1(2) = 1$ sitt största värde och $C_2(2)=0$ sitt minsta. Skillnaden C_1 - C_2 är strängt avtagande i intervallet. Således är skillnaden störst dvs. 1 för x=2 och det är det enda värde som är minst 1. (≥ 1.)

3.egen :

Lös olikheten $\sqrt{4x-3-x^2} - \sqrt{7x-10-x^2} \geq 1$

C. *Lösning*: Vi börjar med att bestämma definitionsmängden för vänsterledet.
Det krävs att uttrycken under båda rottecknen är icke-negativa.

Genom lösning av andragradsekvationerna fås gränserna för detta:

$4x-3-x^2=0$ har lösningarna

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3}$$, alltså $x_1 = 1$ och $x_1 = 3$

$7x-10-x^2=0$ har lösningarna

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 10} \quad ,$$

$$x_{1,2} = 3{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}$$, alltså $x_1 = 2$ och $x_1 = 5$

Genom till exempel symmetripunkter, samt tecknet minus (–) på $-x^2$, kan ses att dessa bådas motsvarande funktioner har maximipunkter:

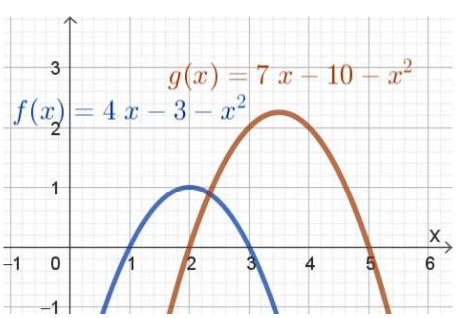
$f(x) = 4x-3-x^2$

$f(2) = 4 \cdot 2 - 3 - 2^2 = 1$

$g(x) = 7x-10-x^2$

$g(3{,}5) = 7 \cdot 3{,}5 - 10 - 3{,}5^2 = 2{,}25$

Detta kan ses grafiskt också:



Det område / intervall som är möjligt för vänsterledet är alltså endast det område där båda uttrycken $4x-3-x^2$ och $7x-10-x^2$ är definerade .
, alltså :

$$2 \leq x \leq 3$$

och inom detta område kan vi ska en skillnadsfunktion:

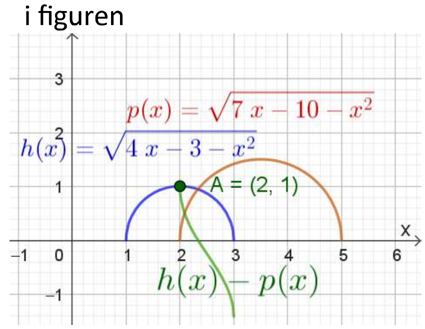
$h(x) = \sqrt{4x-3-x^2}$

$p(x) = \sqrt{7x-10-x^2}$

$h(x) - p(x) =$

$\sqrt{4x-3-x^2} - \sqrt{7x-10-x^2}$

i figuren



den enda lösningen är alltså *x* = 2
, ett annat sätt att utesluta andra lösningar är att se att $f(x)$ når sitt maxvärde $f(2) = 1$, samt att $g(x)$ aldrig kan vara negativt , så den enda lösningen som finns kan bara vara för *x* = 2 , även av detta skäl.

$\sqrt{4x-3-x^2} - \sqrt{7x-10-x^2} =$

$\sqrt{4 \cdot 2 - 3 - 2^2} - \sqrt{7 \cdot 2 - 10 - 2^2} =$

$\sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$