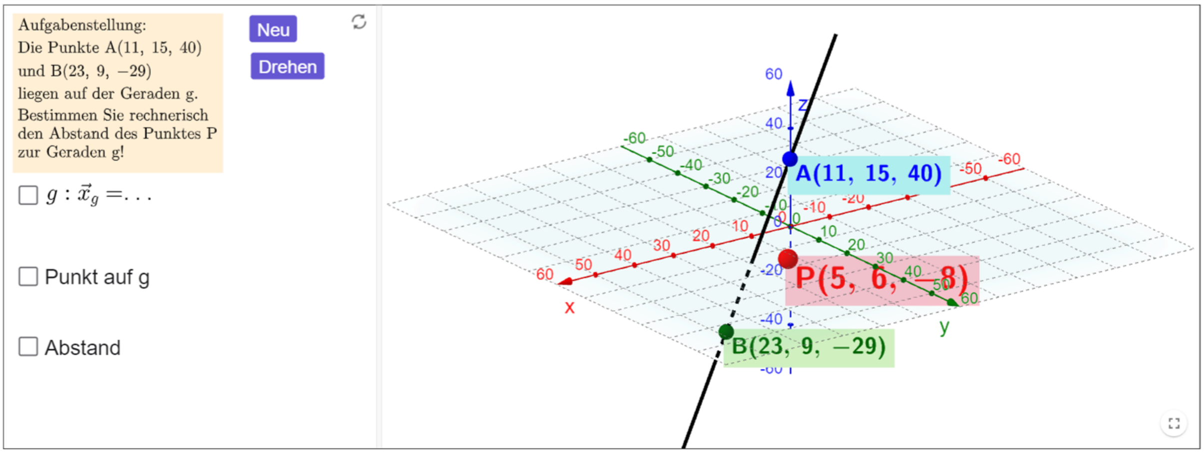

Musterrechnung (Hand)

gegeben: $A(11|15|40), B(23|9|-29), P(5|6|-8)$

gesucht: Abstand der Geraden g durch A und B zum Punkt P

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \\ -29 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s}_g = \vec{a}, \vec{r}_g = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \\ -29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix}$$

$$g{:}\, \vec{x}_g = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix}$$

Der kürzeste Abstand zwischen der Geraden g und P ist der Abstand zwischen dem Punkt P‘ auf der Geraden g und dem Punkt P, wenn der Verbindungsvektor des Punktes P und des Punktes P‘ senkrecht zur Geraden g ist.

Da der Punkt P‘ auf der Geraden g liegt, gibt es einen Wert für λ, so dass der Ortsvektor $\vec{p}'$ des Punktes P‘ mithilfe der Geradengleichung der Geraden g geschrieben werden kann:

$$\vec{p}' = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix}$$

Der Verbindungsvektor von P und P‘ ist

$$\overrightarrow{pp'} = \vec{p}' - \vec{p} = \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 48 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix}$$

Wenn $\overrightarrow{pp'} \perp g$ dann gilt $\overrightarrow{pp'} \perp \vec{r}_g$ und somit $\overrightarrow{pp'} \cdot \vec{r}_g = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 48 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 12\lambda \\ 9 - 6\lambda \\ 48 - 69\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix}$$

$$= (6 + 12\lambda) \cdot 12 + (9 - 6\lambda) \cdot (-6) + (48 - 69\lambda) \cdot (-69)$$

$$= 72 + 144\lambda - 54 + 36\lambda - 3312 + 4761\lambda$$

$$= 4581\lambda - 3249 = 0$$

$$\lambda = \frac{3249}{4581} \underset{3}{=} \frac{1098}{1647} \underset{3}{=} \frac{366}{549} \underset{3}{=} \frac{122}{183} \underset{61}{=} \frac{2}{3}$$

Einsetzen der Lösung in $\overrightarrow{pp'}$:

$$\overrightarrow{pp'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 48 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 48 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Abstand des Punktes P von der Geraden g ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{pp'}$

$$|pp'| = \sqrt{14^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{196 + 25 + 4} = \sqrt{225} = 15$$

Der Abstand beträgt 15 LE.

Musterrechnung (Geogebra)

1	A:=(11,15,40)	$\rightarrow$ $A := (11, 15, 40)$
2	B:=(23,9,-29)	$\rightarrow$ $B := (23, 9, -29)$
3	P:=(5,6,-8)	$\rightarrow$ $P := (5, 6, -8)$
4	a:=Vektor(A)	$\rightarrow$ $a := \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}$
5	b:=Vektor(B)	$\rightarrow$ $b := \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \\ -29 \end{pmatrix}$
6	p:=Vektor(P)	$\rightarrow$ $p := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$
7	s_g:=a	$\rightarrow$ $s_g := \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 40 \end{pmatrix}$
8	r_g:=b-a	$\rightarrow$ $r_g := \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -69 \end{pmatrix}$
9	x_g:=s_g+λ*r_g	$\rightarrow$ $x_g := \begin{pmatrix} 12\lambda + 11 \\ -6\lambda + 15 \\ -69\lambda + 40 \end{pmatrix}$
10	p':=x_g	$\rightarrow$ $p' := \begin{pmatrix} 12\lambda + 11 \\ -6\lambda + 15 \\ -69\lambda + 40 \end{pmatrix}$
11	pp':=p'-p	$\rightarrow$ $pp' := \begin{pmatrix} 12\lambda + 6 \\ -6\lambda + 9 \\ -69\lambda + 48 \end{pmatrix}$
12	pp'*r_g=0	$\rightarrow$ $4941\lambda - 3294 = 0$
13	Löse($12)	$\rightarrow$ $\left\{\lambda = \frac{2}{3}\right\}$
14	Ersetze(pp', $13)	$\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$
15	abs($14)	$\rightarrow$ 15