Teoría – Tema 5

Teoría - 15 - cambio de variable en integrales irracionales y en integrales trigonométricas genéricas

Cambio de variable si f(x) posee radicales.

Sea la integral $\int f(x)dx$. Si $f(x)$ presenta raíces, podemos aplicar los siguientes cambios de variable útiles:

Si $f(x)=R(x,\sqrt{a^2-x^2}) \rightarrow x=a\cdot sen t$

Si $f(x)=R(x,\sqrt{a^2+x^2}) \rightarrow x=a\cdot tg t$

Si $f(x)=R(x,\sqrt{x^2-a^2}) \rightarrow x=a\cdot sec t$

Si $f(x)=R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}=t^n$

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$$

$$x=sen\, t \rightarrow dx=\cos t\cdot dt$$

$$\int \frac{sen^4 t}{\sqrt{(1-sen^2 t)^3}}\cdot \cos t\, dt=\int \frac{sen^4 t}{\sqrt{(\cos^2 t)^3}}\cdot \cos t\, dt=\int \frac{sen^4 t}{\sqrt{\cos^6 t}}\cdot \cos t\, dt=\int \frac{sen^4 t}{\cos^3 t}\cdot \cos t\, dt$$

$$\int \frac{sen^4 t}{\cos^2 t}dt=\int \frac{(sen^2 t)^2}{\cos^2 t}dt=\int \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}dt=\int \frac{1+\cos^4 t-2\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t}dt$$

$$\int \frac{1+\cos^4 t-2\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t}dt=\int \frac{1}{\cos^2 t}dt+\int \cos^2 t\, dt-\int 2\, dt=tg(t)+\int \cos^2 t\, dt-2t+C$$

En la suma aparece la integral de $\int \cos^2 t\, dt$, que podemos resolver con un nuevo cambio de variable (por ejemplo $tg(t)=z$) o bien recordando que el coseno al cuadrado podemos relacionarlo con el coseno del ángulo doble:

$$\cos(t)\cdot\cos(t)=\frac{1+\cos(2t)}{2} \rightarrow \int \cos^2 t\, dt=\frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}sen(2t)+C$$

Por lo tanto, nuestra integral de inicio queda:

$$I = tg(t) - \frac{3t}{2} + \frac{1}{4} sen(2t) + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$x = sen\, t \quad \rightarrow \quad arcosen(x) = t$$

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{1}{4} sen(2 \cdot arcosen(x)) + C$$

La solución podemos expresarla en una forma más compacta recordando la forma del seno del ángulo doble:

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{1}{2} sen(arcosen(x)) \cdot \cos(arcosen(x)) + C$$

Y la función seno es la inversa del arcoseno, por lo tanto:

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \cos(arcosen(x)) + C$$

Con la relación fundamental de trigonometría, podemos expresar el coseno en función del seno:

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - sen^2(arcosen(x))} + C$$

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + C$$

Ufff.... vaya telita hasta llegar a la solución final...

Cambio de variable si f(x) contiene funciones trigonométricas genéricas

Si no podemos aplicar ninguno de los cambios de variable anteriormente descritos para integrales trigonométricas (impar en seno, impar en coseno, par en el producto seno por coseno), siempre tendremos la posibilidad de plantear el cambio genérico:

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \quad \rightarrow \quad \left[1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{1}{2}dx=dt \quad \rightarrow \quad [1+t^2]\frac{1}{2}dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Esta expresión relaciona la tangente del ángulo mitad. Para obtener los valores de la tangente, el seno y el coseno de x, debemos recordar la expresión de la tangente de la suma:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

Si aplicamos esta igualdad al caso $tg(x)=tg\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$, nos queda:

$$tg(x)=tg\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{2\cdot tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \quad tg(x)=\frac{2\cdot t}{1-t^2}$$

Si $tg(x)=\frac{2\cdot t}{1-t^2}$ el cateto opuesto vale $2t$ y el cateto contiguo vale $1-t^2$. Por lo tanto, la hipotenusa, tras operar y simplificar el cuadrado con la raíz, es igual a $\sqrt{(2t)^2+(1-t^2)^2}=1+t^2$.

El seno resulta → $sen(x)=\frac{2t}{1+t^2}$

El coseno resulta → $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Otra forma de demostrar esas expresiones del seno y del coseno, como ya hicimos en el apartado anterior, es utilizar la relación fundamental de la trigonometría que relaciona tangente con secante.

$$1+tg^2(x)=sec^2(x) \quad \rightarrow \quad 1+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad 1+\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad \frac{1+t^4+2t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{1}{\cos x} \quad \rightarrow \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tg\,x=\frac{sen\,x}{\cos x} \quad \rightarrow \quad sen(x)=tg(x)\cdot\cos(x) \quad \rightarrow \quad sen(x)=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$sen(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{1}{1+sen\,x}\,dx$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$sen(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int \frac{2}{1+t^2+2t}\,dt=2\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt=\frac{-2}{1+t}+C$$

Deshacemos el cambio de variable en función de la tangente del ángulo mitad:

$$I=\frac{-2}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}+C$$