VI. Die natürliche Exponentialfunktion

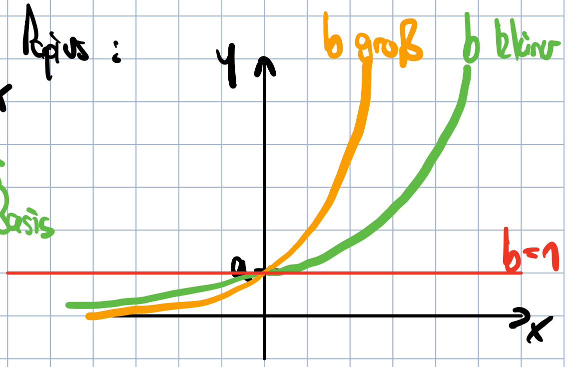
0. Wiederholung

Ein Blatt Papier der Dicke $0{,}1\,mm = 10^{-4}\,m$ soll so oft gefaltet werden, dass seine Dicke von der Erde zur Sonne reicht ($\Delta s = 149{,}6 \cdot 10^{9}\,m$).

Dazu bestimmen wir eine Funktion für die Dicke des Papiers:

$$d(x) = 10^{-4}\,m \cdot 2^{x}$$

Anzahl der Faltungen   Startwert   Basis



DEFINITION

Als <u>Exponentialfunktion</u> bezeichnen wir Funktionen, bei denen die <u>Variable x im Exponenten</u> auftaucht. Im Standardfall

$$f(x) = a \cdot b^{x} \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

nennen wir a den <u>Startwert</u> und b die <u>Basis</u>.

zur Lösung:

$$d(x) = \Delta s$$

$$10^{-4}\,m \cdot 2^{x} = 149{,}6 \cdot 10^{9}\,m \qquad | : 10^{-4}\,m$$

$$2^{x} = 149{,}6 \cdot 10^{13} \qquad | \circ \log_2$$

$$\log_b(b^x) = x$$

$$x = \log_2(149{,}6 \cdot 10^{13}) \approx 50{,}41$$

=> Wir müssen das Blatt Papier 51-mal falten.

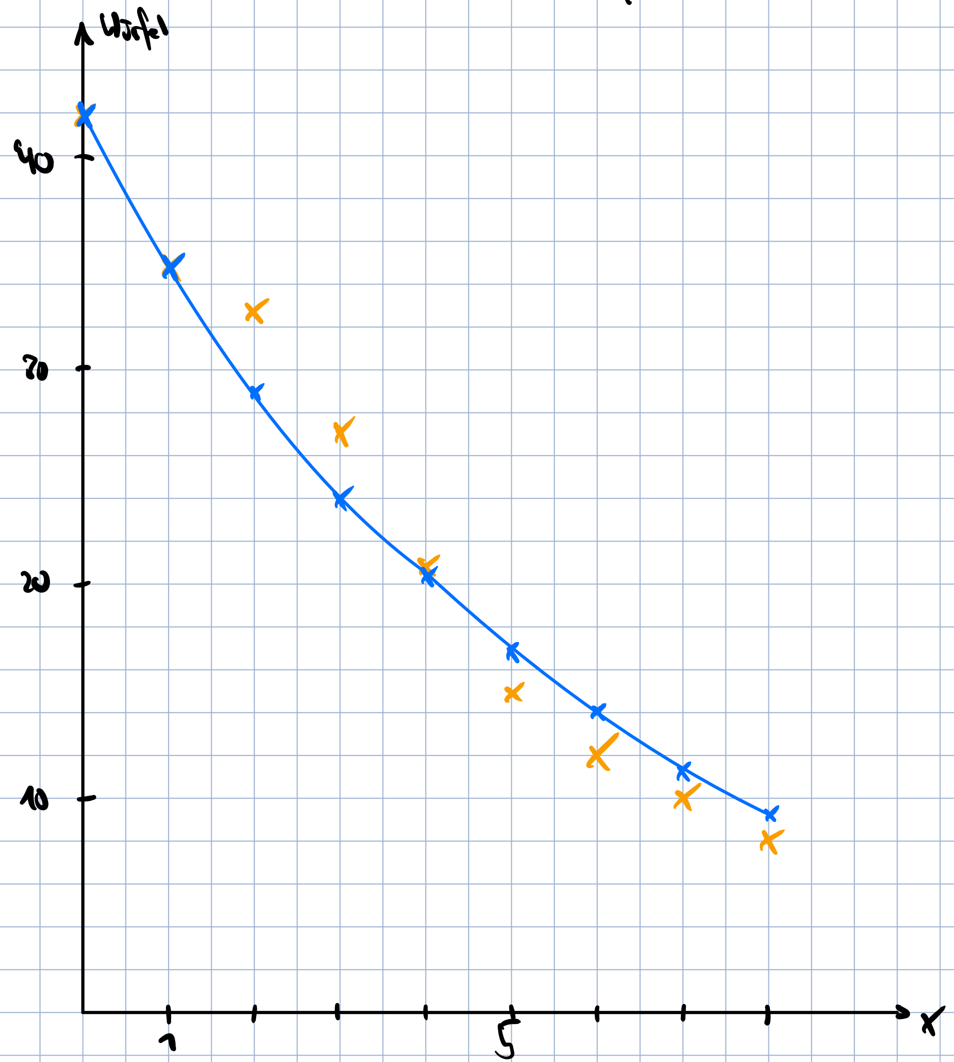
MERKE

Die Exponentialfunktion ist die am schnellsten wachsende Funktion.

Beispiel 2: Wir würfeln gleichzeitig mit zwei Würfeln. Ein Würfel, der die 6 zeigt, wird aus dem Spiel genommen und mit den anderen Würfeln erneut gewürfelt. Wir notieren die Anzahl der Würfel im Spiel.

x (Schritt)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y (Würfel)	42	35	33	27	21	15	12	10	8

Wir stellen die Daten in einem Graphen dar:



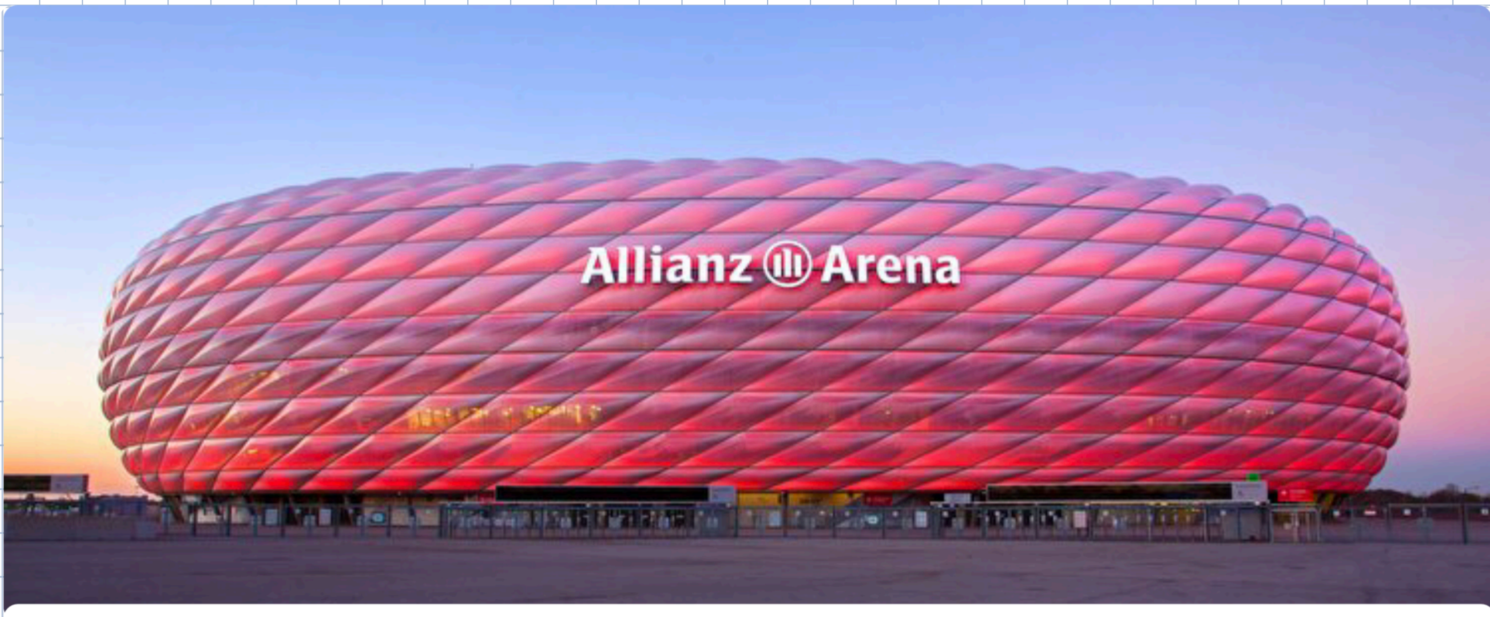
Die zugehörige Exponentialfunktion sollte lauten:

$f(x) = 42 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^x$

Wir erkennen, dass der Graph fällt und das Experiment relativ gut durch die Theorie dargestellt wird.

MERKE

Ist die Basis b zwischen 0 und 1, so fällt der Graph der Exponentialfunktion. Ist die Basis b größer als 1, so steigt der Graph.



Wie stark ist eigentlich ein exponentielles Wachstum? – Ein Gedankenexperiment

Heftiger Regenschauer über München: Alles begann harmlos mit lediglich einem Regentropfen in der ersten Minute. Allerdings verdoppelte sich die Anzahl der Regentropfen minütlich, so dass in der zweiten Minute zwei Regentropfen, in der dritten Minute vier Regentropfen usw. zu Boden fielen. Da der Boden diese Wassermassen nicht aufnehmen kann, versickert kein Tropfen des Wassers im Boden.

Bestimme die Zeitdauer, die es bei diesem Regenschauer dauen würde, bis die Allianz Arena in München komplett unter Wasser steht. ~~Als Rechenhilfe und Recherchemittel stehen dir dabei ein iPad bereit.~~

① Volumen der Allianz-Arena

$$V_S = L \cdot b \cdot h = 258\,m \cdot 227\,m \cdot 50\,m = 2928300\,m^3$$

≈ Quader

$$= 2928300000\,l$$

② Volumen eines Regentropfes

$$V_R = 0{,}05\,ml = 0{,}05 \cdot 10^{-2}\,L$$

③ Modellierung der Regenmenge

$$f(t) = V_R \cdot 2^t$$

Das Gesamtvolumen ist $V_G(t) = f(1) + f(2) + \ldots + f(t)$

Da es allein zum Zeitpunkt t mehr regnet als zum Zeitpunkt $t-1$ kann man dies vereinfachen zu $V_c(t) \approx f(t)$, woraus folgt

$$
\begin{aligned}
f(t) &= V_S \\
V_R \cdot 2^t &= V_S && \mid : V_R \\
2^t &= \frac{V_S}{V_R} && \mid \circ \log_2 \\
t &= \log_2\left(\frac{V_S}{V_R}\right) = \log_2\left(\frac{2928200000\ \ell}{0{,}05 \cdot 10^{-7}\ \ell}\right) \approx 45{,}7
\end{aligned}
$$

=> Nach spätestens 46 Minuten wäre das Stadion voller Wasser. Nach 47 Minuten reicht das Wasser schon für 3 Stadien.

<u>Exponenten- und Logarithmusgesetze</u>

DEFINITION

Als eine Zahl a^r mit $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{N}$ verstehen wir:

$$a^r = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{r\text{-mal}}$$

Daraus ergeben sich folgende Gesetze:

① $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\longrightarrow$ $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$

② $a^r : a^s = a^{r-s}$ $\longrightarrow$ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

③ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

Insbesondere folgt aus Regel ①:

$$\log_a(b^r) = \log_a(\underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{r\text{-mal}}) \overset{①}{=} \underbrace{\log_a(b) + \ldots + \log_a(b)}_{r\text{-mal}} = r \cdot \log_a(b)$$

S. 157/3 Bestimme ohne Taschenrechner!

a) $\ln(4e) = \ln(4) + \ln(e) = \ln(4) + 1$

b) $\ln(e^{-1}) = -1 \cdot \ln(e) = -1$

c) $\ln(e^3) = 3 \cdot \ln(e) = 3$

d) $\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(e) = \frac{1}{2}$

g) $[\ln(e^2)]^3 = [2 \cdot \ln(e)]^3 = 2^3 = 8$

h) $\ln[(e^{-2})^5] = \ln(e^{-10}) = -10 \cdot \ln(e) = -10$

i) $\ln\left(\frac{5}{e^2}\right) = \ln(5) - \ln(e^2) = \ln(5) - 2 \cdot \ln(e) = \ln(5) - 2$