# Problemas – Tema 9

# Problemas resueltos - 2 - definición formal de derivada

**1. Aplica la definición formal de derivada a** $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x+h}{x+h-1}-\dfrac{x}{x-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-x+hx-h-x^2-hx+x}{h(x+h-1)(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h-1)(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

**2. Usa la definición formal de derivada para obtener la derivada de** $f(x)=\frac{1}{x}$ **.**

La definición formal de derivada es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ . Aplicado a nuestra función:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x\cdot(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x\cdot(x+h)}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-h}{x\cdot(x+h)}:\frac{h}{1}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{x\cdot h\cdot(x+h)}=(simplificar\ h)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+h)}$$

Efectuamos el límite → $\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+h)}=\frac{-1}{x\cdot(x+0)}=\frac{-1}{x^2}$

Por lo tanto → $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$

**3. Halla la derivada de** $f(x)=5x^2+2x-6$ **en** $x=-2$ **mediante la definición de derivada.**

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(-2+h)^2+2(-2+h)-6-(5(-2)^2+2(-2)-6)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5(4+h^2-4h)-4+2h-6-(5\cdot 4-4-6)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{20+5h^2-20h-4+2h-6-20+4+6}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5h^2-18h}{h}=(\mathit{simplificar}\ \ h)=\lim_{h\to 0}(5h-18)=-18$$

**4. Usando la definición de derivada, calcula la derivada en $x=-1$ , $x=0$ y $x=2$ de la siguiente función:**

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \quad x\leq 0 \\ x^2+2 & si \quad x>0 \end{cases}$$

Para saber si la función es derivable en los puntos dados, primero vemos si es continua.

En los intervalos abiertos $x<0$ y $x>0$ es continua, por ser funciones polinómicas.

En el punto frontera $x_0=0$ aplicamos las condiciones de continuidad:

$f(0)=0+3=3$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=3$ , $\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$ → Los límites laterales no coinciden

Por lo tanto la función no es continua en $x_0=0$ , por presentar una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito. Y si no es continua en ese punto, tampoco será derivable.

La definición formal de derivada es $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ . Y la función es derivable en un punto donde es continua y si las derivadas laterales coinciden.

Para $x=-1$ el estudio se reduce a estudiar la convergencia del límite siguiente:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0} \frac{2(-1+h)+3-(2(-1)+3)}{h}=\lim_{h\to 0} \frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0} 2=2$$

La función es derivable en $x=-1$ y la derivada en ese punto vale $2$ .

Para $x=2$ el estudio se reduce a estudiar la convergencia del límite siguiente:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \quad \to \quad \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2+2-(2^2+2)}{h}=\lim_{h\to 0} \frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0} h+4=4$$

La función es derivable en $x=2$ y la derivada en ese punto vale $4$ .

**5. Aplicar la definición formal de derivada para obtener la derivada de** $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ **.**

$$f(x)=\sqrt{x^2-1} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{h}=\frac{0}{0} \quad \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)^2-1}-\sqrt{x^2-1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-1-(x^2-1)}{h\cdot[\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2\cdot h\cdot x-1-x^2+1}{h\cdot[\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}]}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2\cdot h\cdot x}{h\cdot[\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h+2\cdot x}{[\sqrt{(x+h)^2-1}+\sqrt{x^2-1}]}$$

Evaluamos.

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$