探究 1 牛顿法——用导数方法求方程的近似解（P82）

探究人：　　　　时间：　　　　指导老师：

探究目的

1、了解牛顿法的操作过程；

2、会用牛顿法求方程的近似解。

探究器材

电脑或平板、手机等设备，Geogebra 软件，实验手册

探究步骤

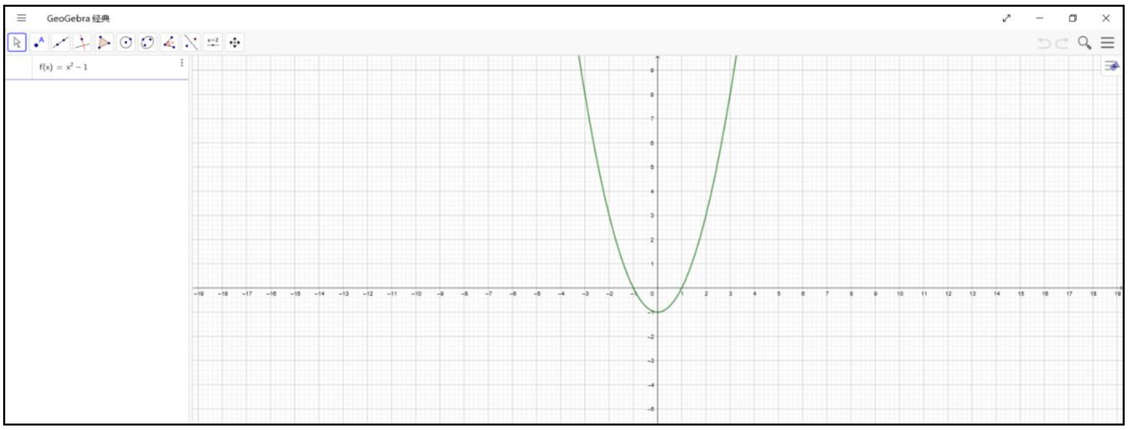
（参照教材中探究“选修二探究 1　牛顿法——用导数方法求方程的近似解（P82）”的方法，实施以下实验**）**

实验 1：用导数方法求方程 $x^2-1=0$ 的近似解

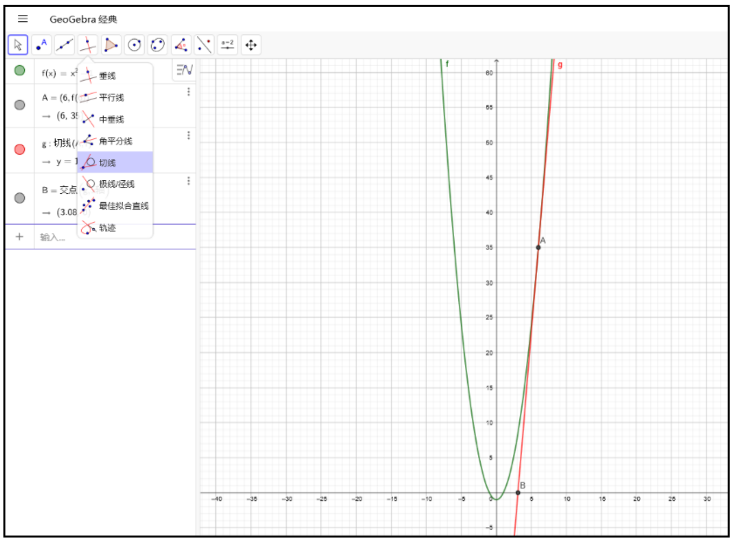
（我们知道，方程 $x^2-1=0$ 的解为±1，下面我们通过牛顿法，求方程的近似解（保留 5 位有效数字），并将试验数据填入下面表格）

x_i	点（x_i，y_i）	切线方程	切线与 x 轴的交点坐标
$X_0=6.00000$	A（6，35）	$y=12x-37$	B（3.08333，0）
$X_1=X_B=3.08333$	C（　，　）		D（　，　）
	E（　，　）		F（　，　）
	G（　，　）		H（　，　）
	I（　，　）		J（　，　）
	K（　，　）		L（　，　）
	M（　，　）		N（　，　）

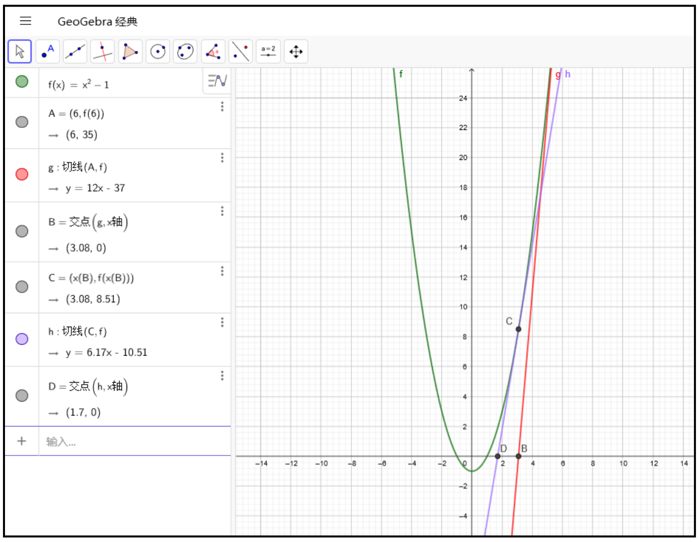
第一步：打开 Geogebra 数学画板，通过指令框输入函数 $f(x)=x^2-1$，得到函数 $f(x)=x^2-1$ 和右侧图像（如下图）



第二步：不妨选择初始值 $x_0=6$，首先在指令输入框中输入 A=（6，f（6））， 然后选择工具—— “切线”， 再选择点 A 和函数 f(x)的图像，做出切线，最后通过工具—— “交点”做出切线与 x 轴的交点 B（x_1，0）；结果：生成点 A，切线和交点 B



第三步：首先通过输入框输入指令 “C=(x（B）， f（x（B））”， 然后选择工具—— “切线”， 再选择点 C 和函数 f(x)的图像，做出切线，最后通过工具—— “交点”做出切线与 x 轴的交点 D（x_2，0）；结果：生成点 C，切线和交点 D



第四步：用上一步中得到的切线与 x 轴交点的横坐标，算出函数图像上的点，过点做切线，做切线与 x 轴的交点，再重复以上步骤，直到切线与 x 轴交点坐标不变为止，此时交点的横坐标即为满足精度的近似解。

实验结论：在不断重复步骤作出的切线与 x 轴的交点，在不断地靠近函数的零点（即方程的解），因此重复的次数越多，解的精度就高。从以上实验可知，对于 $x^2-1=0$，通过牛顿法迭代 5 次后，得到近似解为 x=1.00004。已非常接近真正的解。请同学们思考：每一次产生的切线零点 x_n，与前一次切线零点 x_{n-1} 有什么关系呢？将思考结果填入探究结论里吧。

实验 2：用导数方法求方程$\frac{1}{15}x^3-\frac{3}{5}x^2+2x-\frac{12}{5}=0$的近似解（P82）

（我们知道，方程$\frac{1}{15}x^3-\frac{3}{5}x^2+2x-\frac{12}{5}=0$的其中一解为 3，参照实验 1 的步骤，求方程的近似解（保留 5 位有效数字），并将试验数据填入下面表格）

x_i	点（x_i，y_i）	切线方程	切线与 x 轴的交点坐标
X_0=6.00000	A（6，　）		B（　，　）
$X_1=X_B$=	C（　，　）		D（　，　）
	E（　，　）		F（　，　）
	G（　，　）		H（　，　）
	I（　，　）		J（　，　）
	K（　，　）		L（　，　）
	M（　，　）		N（　，　）

实验结论：重复 1 次步骤，得到近似解为____；重复 2 次步骤，得到近似解为____；

重复 3 次步骤，得到近似解为____；重复 4 次步骤，得到近似解为____。

探究结论

1、设起始点为 x_0，即切点为（$x_0,f(x_0)$），则第 1 条切线方程为 $y-f(x_0)$=________________，故其零点 x_1=___；

2、设第 n-1 条切线的零点为 x_{n-1}，则第 n 条切线方程为 $y-f(x_{n-1})$=____________________，故其零点 x_n=____;

3、综上，由数学归纳法可知，第 n 次所求得的方程近似解为__________________。

交流与反思

1、不同的初始值对近似解的影响是什么？

2、与二分法相比，牛顿法的优点与缺点是什么？

探究练习

1、取初始值 x_0=6，用牛顿法求方程 $x^2-2x-3=0$ 的近似解。

2、取初始值 x_0=3，用牛顿法求方程 $\ln x=2$ 的近似解。