Θεώρημα Ροπών (Θεώρημα Varignon):

Η ροπή της συνισταμένης δύο (ή περισσότερων) συντρεχουσών δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο $\boldsymbol{O}$ είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της ως προς το ίδιο σημείο:

$$\sum \vec{M}_{\vec{f}_i}^{(O)} = M_{\sum \vec{f}_i}^{(O)}$$

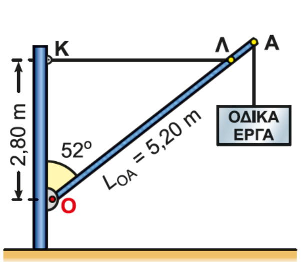
Το Θεώρημα Varignon περιορίζεται στην περίπτωση συντρεχουσών δυνάμεων. Τυχαίνει όμως να εφαρμόζουμε, συχνά εν αγνοία μας, μια πιο γενική μορφή του πιο πάνω θεωρήματος.

Όταν λ.χ. υπολογίζουμε τη ροπή του βάρους $\vec{B}$ εκτεταμένου σώματος ως προς σημείο, κάνουμε την υπόρρητη παραδοχή ότι η συνισταμένη των ροπών των επιμέρους βαρυτικών δυνάμεων $m_i\vec{g}$ που δρουν στις στοιχειώδεις μάζες m_i – οι οποίες αποτελούν το σώμα – ισούται με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης $\vec{B}$ η οποία θεωρούμε ότι δρα στο κέντρο μάζας CM του σώματος (για ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{g}$). Όμως, αυτές οι συνιστώσες $m_i\vec{g}$ είναι παράλληλες μεταξύ τους, δεν είναι συντρέχουσες.

Κατά ανάλογο τρόπο, υπολογίζουμε τη ροπή της κάθετης δύναμης επαφής $\vec{N}$ από επιφάνεια σε εκτεταμένο σώμα: κάνουμε τη σιωπηλή υπόθεση ότι όλες οι ροπές από τις στοιχειώδεις δυνάμεις επαφής $\vec{N}_i$, οι οποίες είναι παράλληλες, έχουν διανυσματικό άθροισμα ίσο με τη ροπή μίας και μόνο δύναμης, της $\vec{N} = \sum \vec{N}_i$.

Υπάρχουν βέβαια και περιπτώσεις, όπου φαίνεται να παραβιάζεται η προϋπόθεση του Θεωρήματος Varignon για συντρέχουσες δυνάμεις, όταν για τον υπολογισμό της ολικής ροπής παράλληλων δυνάμεων καταφεύγουμε στον υπολογισμό της ροπής της συνισταμένης τους.

Ως παράδειγμα αναφέρουμε έναν ιδιαίτερο τρόπο επίλυσης της κάτωθι άσκησης τού σχολικού εγχειριδίου, ο οποίος προτείνεται κατά καιρούς από μαθητές.



12 Το διπλανό σχήμα απεικονίζει έναν πάσσαλο **ΟΑ** μάζας $m_\Pi = 24{,}0$ kg, από τον οποίο έχει αναρτηθεί ένα σήμα τροχαίας με μάζα $m_\Sigma = 8{,}0$ kg.

Να υποθέσετε ότι ο πάσσαλος **ΟΑ** είναι ομογενής και βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Να υπολογίσετε την τάση στο σημείο **Λ** του πασσάλου από το συρματόσχοινο **ΚΛ**, και τη δύναμη στο σημείο **Ο** από τον κατακόρυφο στύλο.

Οι μαθητές υπολογίζουν τη ροπή της συνισταμένης δύο παράλληλων δυνάμεων - του βάρους της ράβδου και του βάρους του σήματος τροχαίας - ως προς το Ο, θεωρώντας μοχλοβραχίονα $d = \frac{m_\Pi \cdot x_\Pi + m_\Sigma \cdot x_\Sigma}{m_\Pi + m_\Sigma} = \frac{L_{OA} \cdot \eta\mu(52°) \cdot \left(\frac{m_\Pi}{2} + m_\Sigma\right)}{m_\Pi + m_\Sigma}$, που αντιστοιχεί στην $x - συνιστώσα$ του CM του συστήματος των δύο σωμάτων, καταλήγοντας σε ορθό αποτέλεσμα.

Είναι προφανής, επομένως, η ανάγκη να δοθεί η πιο γενική μορφή του θεωρήματος, ώστε να περιλαμβάνει και αυτές τις περιπτώσεις, και να διορθωθεί η λανθασμένη αναφορά στη σελίδα 33 του σχολικού εγχειριδίου:

- Το θεώρημα ισχύει για παράλληλες δυνάμεις όταν έχουν τον ίδιο φορέα (είναι συγγραμμικές). **Δεν ισχύει γενικά** για παράλληλες δυνάμεις με διαφορετικούς φορείς (π.χ. για ζεύγος δυνάμεων, που θα μελετήσουμε στην **Ενότητα 1.6**).

Γενίκευση του Θεωρήματος των Ροπών, ώστε να περιλαμβάνει και δυνάμεις οι οποίες είναι <u>παράλληλες,</u> η σύνθεσή των οποίων όμως δεν οδηγεί σε ζεύγος δυνάμεων:

Η ροπή της συνισταμένης δύο δυνάμεων, συντρεχουσών ή παράλληλων, οι οποίες δεν αποτελούν ζεύγος δυνάμεων (ή περισσότερων δυνάμεων οι οποίες δεν μπορούν να αναχθούν σε ζεύγος δυνάμεων) ως προς οποιοδήποτε σημείο $\boldsymbol{O}$ είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της ως προς το ίδιο σημείο:

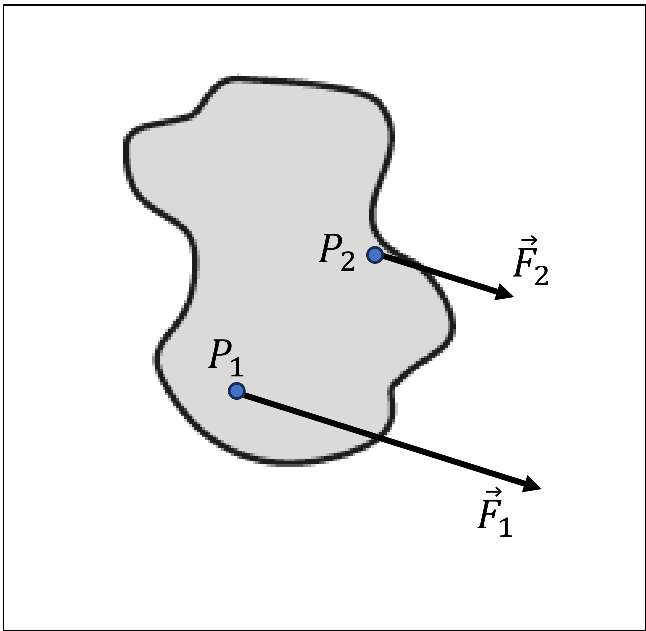
$$\sum \vec{M}_{\vec{f}_i}^{(O)} = M_{\Sigma \vec{f}_i}^{(O)}$$

όπου $\vec{f}_i$ είναι δυνάμεις που δεν αποτελούν ή δεν μπορούν να αναχθούν σε ζεύγος δυνάμεων.

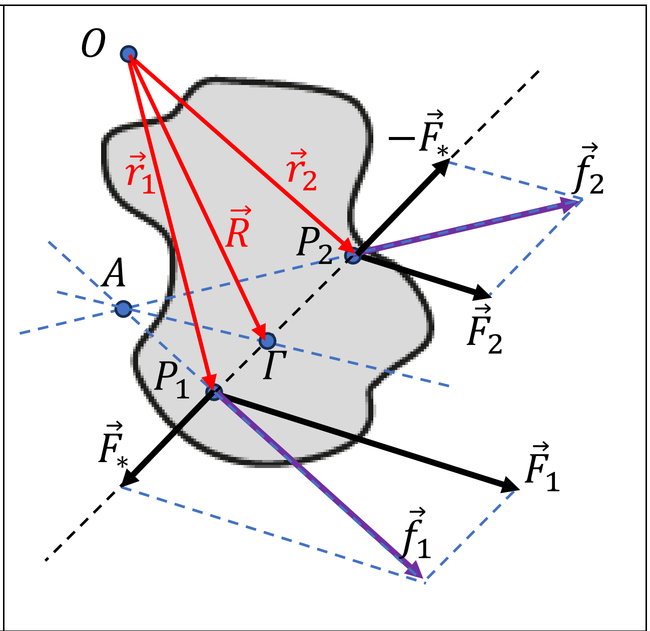
Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι η περίπτωση δύο παράλληλων δυνάμεων, που δεν αποτελούν ζεύγος δυνάμεων, μπορεί να αναχθεί στην ισοδύναμη περίπτωση συντρεχουσών δυνάμεων, για την οποία ισχύει το Θεώρημα Varignon.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε δύο παράλληλες και ομόρροπες δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, οι οποίες δρουν σε δύο τυχαία σημεία P_1 και P_2 τού στερεού σώματος, αντίστοιχα (Σχήμα 1α). Η δράση των δύο δυνάμεων παραμένει αναλλοίωτη εάν θεωρήσουμε ότι στα σημεία P_1 και P_2 δρουν οι αντίθετες συγγραμμικές δυνάμεις $\vec{F}_*$ και $-\vec{F}_*$, με φορέα ευθεία που διέρχεται από τα P_1 και P_2, (Σχήμα 1β)



Σχήμα 1α



Σχήμα 1β

Εάν η $\vec{f}_1$ είναι η συνισταμένη των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_*$, ενώ η $\vec{f}_2$ είναι η συνισταμένη δύναμη των $\vec{F}_2$ και $-\vec{F}_*$, τότε παρατηρούμε ότι οι $\vec{f}_1$ και $\vec{f}_2$ είναι συντρέχουσες στο σημείο Α τού επιπέδου που ορίζουν οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. Κατά συνέπεια, ισχύει το θεώρημα του Varignon στην περίπτωση συντρεχουσών δυνάμεων:

$$\sum \vec{M}_{\vec{f}_i}^{(O)} = M_{\Sigma \vec{f}_i}^{(O)} \Rightarrow$$

$$\left(\vec{r}_1 \times \vec{f}_1\right) + \left(\vec{r}_2 \times \vec{f}_2\right) = \vec{R} \times \left(\vec{f}_1 + \vec{f}_2\right)$$

Όπου $\vec{R}$ το διάνυσμα θέσης τού σημείου Γ ως προς το O και Γ το σημείο που ο φορέας τής συνισταμένης $\Sigma\vec{F}$ των δυνάμεων $\vec{f}_1$ και $\vec{f}_2$, τέμνει τον φορέα των $\vec{F}_*$ και $-\vec{F}_*$.

$$\vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_*) + \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 - \vec{F}_*) = \vec{R} \times (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) \Rightarrow$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_* + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_* = \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Rightarrow$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_* = \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Rightarrow$$

Όμως, από το σχήμα προκύπτει ότι $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_*$ και συνεπώς $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_* = \vec{0}$
Καταλήγουμε επομένως ότι

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{R} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

Δηλαδή, το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των δύο παράλληλων δυνάμεων ως προς οποιοδήποτε σημείο O, ισούται με τη ροπή τής συνισταμένης τους ως προς το ίδιο σημείο:

$$\vec{M}_{\vec{F}_1}^{(O)} + \vec{M}_{\vec{F}_2}^{(O)} = \vec{M}_{(\vec{F}_1+\vec{F}_2)}^{(O)}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το θεώρημα Varignon ισχύει και για δύο παράλληλες αντίρροπες δυνάμεις, οι οποίες δεν είναι αντίθετες (δεν αποτελούν ζεύγος).

Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι το θεώρημα ισχύει και για περισσότερες των δύο παράλληλων ομοεπίπεδων δυνάμεων, οι οποίες όμως δεν ανάγονται σε ζεύγος δυνάμεων.

$$\sum \vec{M}_{\vec{F}_i}^{(O)} = M_{\sum \vec{F}_i}^{(O)}$$

Γενικά, η σύνθεση παράλληλων δυνάμεων $\vec{F}_i$ δίνει συνισταμένη

$$\vec{F}_{ολ.} = \sum \vec{F}_i = \hat{u} \sum F_i$$

και με συνισταμένη των ροπών τους $\vec{M}_{ολ.}^{(O)}$ ως προς τυχαίο σημείο O

$$\vec{M}_{ολ.}^{(O)} = \sum \vec{M}_{\vec{F}_i}^{(O)} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times F_i\,\hat{u} = \left(\sum F_i \vec{r}_i\right) \times \hat{u}$$

όπου $\vec{r}_i$ τα διανύσματα θέσης των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων $\vec{F}_i$ ως προς το σημείο O.

Η $\vec{M}_{ολ.}^{(O)}$ προφανώς, όντας κάθετη στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{u}$, είναι και κάθετη στη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}_{ολ.}$. Συνεπώς, είναι εφικτό να βρεθεί σημείο εφαρμογής της $\vec{F}_{ολ.}$ τέτοιο, ώστε η ροπή της ως προς το O να ισούται με συνισταμένη ροπή $\vec{M}_{ολ.}^{(O)}$ ως προς το ίδιο σημείο.

Έστω $\vec{r}_c$ διάνυσμα θέσης τού σημείου εφαρμογής της $\vec{F}_{ολ.}$. Τότε απαιτούμε να ισχύει

$$\vec{r}_c \times \vec{F}_{ολ.} = \vec{M}_{ολ.}^{(O)} \Rightarrow$$

$$\vec{r}_c \times \hat{u} \sum F_i = \left(\sum F_i \vec{r}_i\right) \times \hat{u} \Rightarrow \left(\left(\sum F_i\right)\vec{r}_c - \sum F_i \vec{r}_i\right) \times \hat{u} = \vec{0}$$

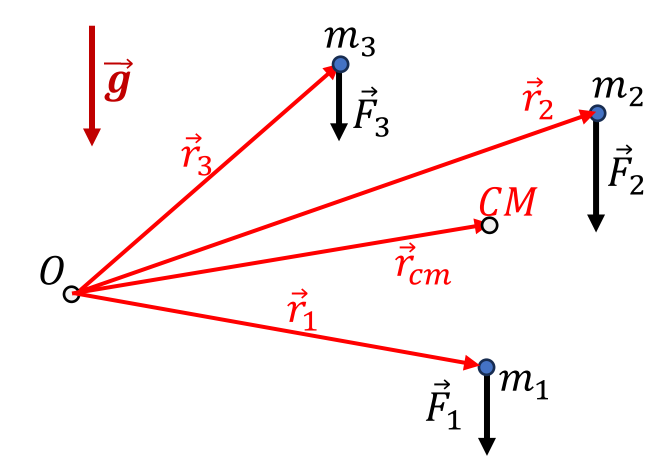
Εφόσον $\hat{u} \neq \vec{0}$ και$\left((\sum F_i)\vec{r}_c - \sum F_i \vec{r}_i\right) \nparallel \hat{u}$, θα πρέπει

$$\left(\sum F_i\right)\vec{r}_c - \sum F_i \vec{r}_i = \vec{0} \xRightarrow{\sum F_i \neq 0} \vec{r}_c = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

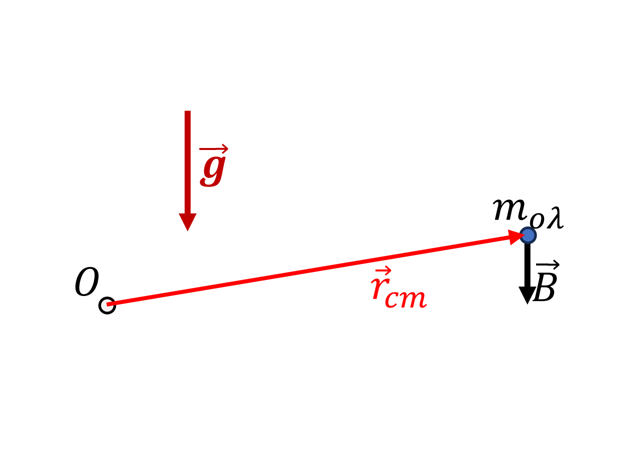
> Επομένως, η μη μηδενική συνιστάμενη ενός συστήματος παράλληλων δυνάμεων που έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τις δυνάμεις στη μεταφορική και περιστροφική κίνηση ενός στερεού
>
> έχει μέτρο
>
> $$\sum \vec{F}_i$$
>
> και σημείο εφαρμογής
>
> $$\vec{r}_c = \frac{\sum F_i \vec{r}_i}{\sum F_i}$$

Βαρυτικές δυνάμεις:

Θα θεωρήσουμε τώρα την ειδική περίπτωση συστήματος σημειακών μαζών m_i εντός ομογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$ (Σχήμα 2α) και θα αποδείξουμε ότι ισχύει η Γενικευμένη Μορφή του Θεωρήματος Varignon: Η συνισταμένη των ροπών των βαρυτικών δυνάμεων $\sum \vec{M}^{(O)}_{\vec{F}_i}$, ως προς τυχαίο σημείο O, ισούται με $M^{(O)}_{\vec{B}}$, τη ροπή της συνισταμένης τους – ολικό βάρος $\vec{B}$ – ως προς το ίδιο σημείο, όταν θεωρησουμε ως σημείο εφαρμογής του $\vec{B}$ το CM τού συστήματος (Σχήμα 2β).



Σχήμα 2α



Σχήμα 2β

Ξεκινούμε την απόδειξή μας με τον υπολογισμό της συνισταμένης των ροπών των βαρυτικών δυνάμεων $\sum \vec{M}^{(O)}_{\vec{F}_i}$:

$$\sum \vec{M}^{(O)}_{\vec{F}_i} = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = \left(\sum m_i \vec{r}_i\right) \times \vec{g} = \left(\vec{r}_{cm} \sum m_i\right) \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \left(\sum m_i\right) \vec{g}$$

όπου στη προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός του Κέντρου Μάζας $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$.
Καταλήγουμε έτσι

$$\sum \vec{\boldsymbol{M}}^{(\boldsymbol{O})}_{\vec{\boldsymbol{F}}_i} = \vec{r}_{cm} \times m_{o\lambda} \vec{g} = M^{(O)}_{\sum \vec{f}_i} = \boldsymbol{M}^{(\boldsymbol{O})}_{\vec{\boldsymbol{B}}}$$

ό.έ.δ.

Χρίστος Γεωργιάδης (Φυσικός)

Varignon's theorem is a theorem of French mathematician Pierre Varignon (1654–1722), published in 1687 in his book *Projet d'une nouvelle mécanique*. The theorem states that the torque of a resultant of two concurrent forces about any point is equal to the algebraic sum of the torques of its components about the same point. In other words, "If many concurrent forces are acting on a body, then the algebraic sum of torques of all the forces about a point in the plane of the forces is equal to the torque of their resultant about the same point."[1]