Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 13 - regla de LHopital

1. Calcula el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{sen(2x)}$

Al evaluar obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$ → Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+6x)}{sen(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6}{1+6x}}{\cos(2x)\cdot 2} = (evaluar) = \frac{6}{2} = 3$$

2. Calcula el límite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}\right)$

Al evaluar obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\,sen(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{-2\,sen(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{tg(3x)}{tg(2x)}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{tg(3x)}{tg(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{2}\frac{(1+tg^2(3x))\cdot 3}{(1+tg^2(2x))\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

3. Calcula el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = (evaluar) = \frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = (evaluar) = 1$

4. Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{4e^x+x+2}{3e^x}$

Al evaluar obtenemos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ → Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4e^x+x+2}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^x+1}{3e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$ → Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4e^x+1}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^x}{3e^x} = (simplificar\ exponencial) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

5. Calcula el número real m **que cumple** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{2\cos(2x)}=\frac{m}{2}$$

Igualamos el límite a 3 , como exige el enunciado → $m=6$

6. Resuelve $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)=(evaluar)=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{4+x}}+\frac{1}{2\sqrt{4-x}}}{4}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{4}=\frac{1}{8}$$

7. Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ **es finito, calcula** a **y el valor del límite.**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)=(m.c.m.)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot\ln x-a(x-1)}{(x-1)\ln x}\right)=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación $\frac{0}{0}$

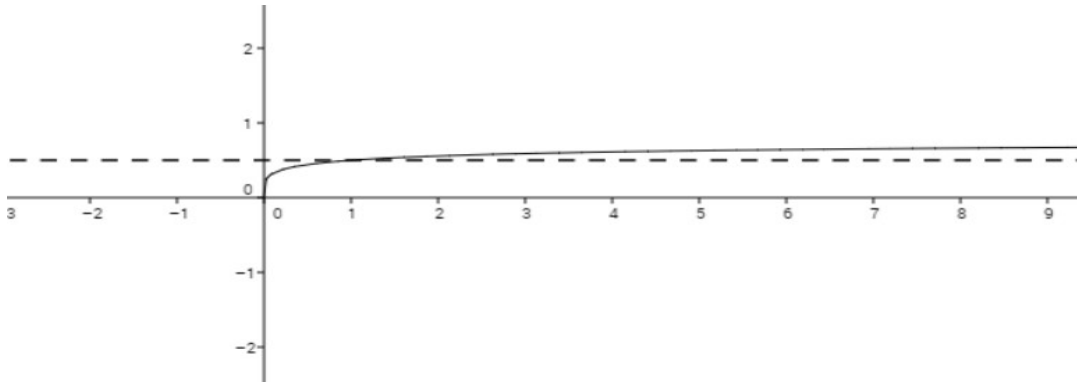
Aplicamos la regla de L'Hôpital → $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot\ln x-a(x-1)}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x+1-a}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\frac{1-a}{0}$$

Las condiciones del enunciado marcan que el límite sea finito, por lo que al tener un cociente con denominador igual a 0, necesitamos que el numerador también sea nulo para que el límite no se dispare a infinito → $a=1$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x(x+1)}\right)=\frac{1}{2}$$

Gráfica de $f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$ *y de la recta horizontal* $y=\frac{1}{2}$



8. Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{tg(x)}\right)$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{tg(x)}\right)=(evaluar)=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{1+tg^2(x)}\right)=\frac{0}{1}=0$

9. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot cos(x)+b\cdot sen(x)}{x^3}\right)$ **es finito, calcula** b **y el valor del límite.**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot cos(x)+b\cdot sen(x)}{x^3}\right)=(evaluar)=\frac{0}{0}$$

Indeterminación: aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-x\cdot sen(x)+b\cos(x)}{3x^2}=\frac{1+b}{0}$$

Para evitar la divergencia a infinito, el numerador también debe ser cero. De esta forma tendríamos una nueva indeterminación 0/0 y podríamos volver a aplicar L'Hôpital en busca del valor finito del límite.

$$1+b=0 \quad\rightarrow\quad b=-1$$

El límite queda:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\cdot sen(x)}{3x^2}\right)=\frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-sen(x)-x\cdot\cos(x)}{6x}\right)=\frac{0}{0}$$

Nuevamente aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\cos(x)-\cos(x)+x\cdot sen(x)}{6}\right)=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$$

10. Calcula a para que el límite $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{x}-x}{x^2}$ sea finito. Obtener el valor de dicho límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{x}-x}{x^2}=\frac{0}{0}\ \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{a\,e^{ax}-e^{x}-1}{2x}=\frac{a-1-1}{0}=\frac{a-2}{0}$$

Si el límite es finito, el numerador debe anularse para obtener una indeterminación 0/0 y que el límite no se vaya a infinito.

$$a-2=0 \ \rightarrow\ a=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^{x}-1}{2x}=\frac{0}{0}\ \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}-e^{x}}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$

11. Calcula $\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 64} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\lim_{x\to 64} \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 64} \frac{3}{2}\cdot\sqrt[6]{x}=\frac{3}{2}\cdot 2=3$$

12. Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x \to 0} \frac{-2-e^x+3\cos(3x)}{2x}=\frac{0}{0}$ Indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x \to 0} \frac{-e^x-9\,sen(3x)}{2}=\frac{-1}{2}$

13. Calcula $\lim_{x\to\pi} \frac{1-sen(\frac{x}{2})}{(x-\pi)^2}$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-sen(\frac{x}{2})}{(x-\pi)^2}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\frac{-1}{2}\cdot\cos(\frac{x}{2})}{2(x-\pi)}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\frac{1}{4}\cdot sen(\frac{x}{2})}{2}=\frac{1}{8}$$

14. Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$ **.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{3}}} \to \frac{\infty}{\infty} \to Indeterminación$$

$$L\,'\,Hôpital \to \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1\cdot 3}{x\cdot x^{\frac{-2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^{\frac{1}{3}}} = (evaluar) = \frac{3}{\infty} = 0$$

15. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ **es finito e igual a uno, calcula los valores de** a **y** b **.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital

Derivamos numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+b+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\frac{b}{0}$$

Para que el límite sea finito, necesitamos que el numerador también tienda a 0 → $b=0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,a+\cos(x)}{2[\cos(x^2)+x\cdot(-2\cdot x\cdot sen(x^2))]}=\frac{2\,a+1}{2[1+0]}=\frac{2\,a+1}{2}$$

Según el enunciado el límite debe converger a 1 → $\frac{2\,a+1}{2}=1$ → $2\,a+1=2$ → $a=\frac{1}{2}$

16. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen(x)+x\cos(3x)}{x^2}$ **es finito, calcula** a **y el valor del límite.**

Evaluamos en el límite y obtenemos indeterminación $\frac{0}{0}$. Podemos aplicar la regla de L'Hôpital, válida para indeterminaciones $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Si existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ también existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ y los límites son iguales. Es decir:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El resultado final del límite puede ser un valor $L\in\mathbb{R}$ o infinito. Y el valor x_0 puede ser un valor finito o infinito.

Por lo tanto, derivamos numerador y denominador.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-a\cos(x)+\cos(3x)-3x\,sen(3x)}{2x}=\frac{1-a+1-0}{0}=\frac{2-a}{0}$$

Si el numerador es no nulo, el límite se disparará a infinito. Para conseguir que sea finito, debemos buscar una nueva indeterminación $\frac{0}{0}$. Por lo tanto → $2-a=0$ → $a=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-2\cos(x)+\cos(3x)-3x\,sen(3x)}{2x}=\frac{0}{0}$$

Aplicamos nuevamente L'Hôpital, derivando numerador y denominador.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+2\,sen(x)-3\,sen(3x)-3\,sen(3x)-9x\cos(3x)}{2}=\frac{-1+0-0-0-0}{2}=\frac{-1}{2}$$

El límite resulta , finalmente, $L=\frac{-1}{2}$ cuando $a=2$.

17. Obtener a **para que se cumpla** $\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos(a x)} = 8$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1-\cos(a x)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x}}{sen(a x) a} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{(1+x) sen(a x) a} = \frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) + (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} + 1}{sen(a x) a + (1+x)\cos(a x) a^2} = \frac{0}{0} = \frac{0+1+1}{0+a^2} = \frac{2}{a^2}$$ → Según el enunciado, el límite vale 8

$$\frac{2}{a^2} = 8 \quad \rightarrow \quad a = \frac{\pm 1}{2}$$

18. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos(x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x+1)}{2-2\cos(x)} = \frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2\,sen(x)} = \frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}{2\cos(x)} = \frac{2}{2} = 1$

19. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)-3x^2}{e^{x^2}-\cos(2x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)-3x^2}{e^{x^2}-\cos(2x)}=\frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0} \frac{2\,sen(x)\cos(x)-6x}{e^{x^2}2x+sen(2x)2}=\frac{0}{0}$

→ indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)\cos(x)+2\,sen(x)(-sen(x))-6}{e^{x^2}2x2x+e^{x^2}2+\cos(2x)4}=\frac{2-6}{2+4}=\frac{-2}{3}$