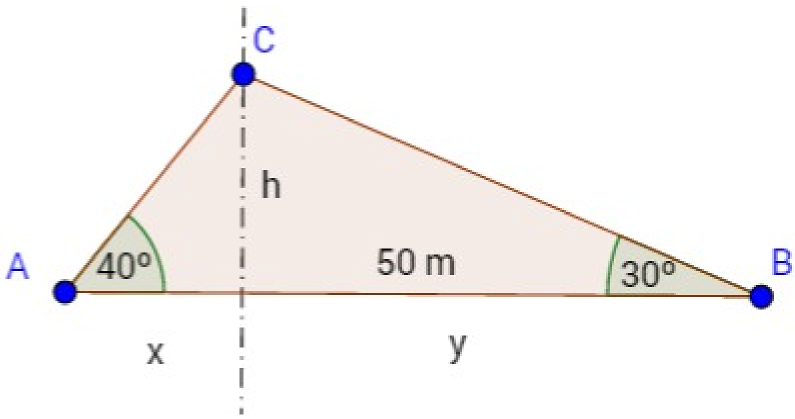
Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 16 - problemas sobre triángulos

1. Un terreno triangular tiene 50m de longitud en uno de sus lados. Los otros dos lados forman con el de 50m, ángulos de 40º y 30º. Calcula las longitudes de los lados.



Dividimos el triángulo en dos triángulos rectángulos (ver imagen), de tal forma que se cumplen las siguientes relaciones para las tangentes:

$$tg(40º)=\frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x\cdot tg(40º)=h$$

$$tg(30º)=\frac{h}{y} \quad \rightarrow \quad y\cdot tg(30º)=h$$

Despejamos en cada ecuación el valor de la altura h e igualamos.

$$x\cdot tg(40º)=y\cdot tg(30º)$$

La base del triángulo podemos expresarla como $50=x+y$ (ver imagen), por lo que obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left\{\begin{matrix} x\cdot tg(40º)=y\cdot tg(30º) \\ 50=x+y \end{matrix}\right\}$$

De la segunda ecuación despejamos $50-y=x$. Llevamos este resultado a la primera ecuación del sistema.

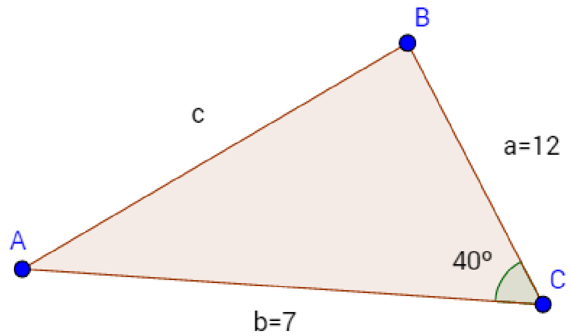
$$(50-y)\cdot tg(40^{o})=y\cdot tg(30^{o}) \rightarrow y=\frac{50\cdot tg(40^{o})}{tg(40^{o})+tg(30^{o})} \rightarrow y=29{,}62\,m \rightarrow x=20{,}38\,m$$

La altura resulta → $h=x\cdot tg(40^{o}) \rightarrow h=17{,}1\,m$

Las longitudes de las hipotenusas de cada triángulo rectángulo son la solución final a nuestro problema. Aplicando Pitágoras:

$$\overline{AC}=\sqrt{(17{,}1)^2+(20{,}38)^2}=26{,}8\,m$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(17{,}1)^2+(29{,}62)^2}=34{,}4\,m$$

2. En un triángulo el lado a es igual a 12m, y el lado b es igual a 7m. El ángulo C mide 40º. Halla los ángulos A y B.



Aplicamos el teorema del coseno para obtener el lado c .

$$c^2=7^2+12^2-2\cdot 7\cdot 12\cdot\cos(40^o)$$

$$c^2=193-168\cdot 0{,}766 \quad\rightarrow\quad c\simeq 8{,}02...\ m$$

Conocidos los tres lados del triángulo y uno de los ángulos, podemos aplicar el teorema del seno para obtener los otros dos ángulos.

$$\frac{a}{sen(A)}=\frac{c}{sen(C)} \rightarrow \frac{12}{sen(A)}=\frac{8{,}02}{sen(40^o)} \rightarrow sen(A)=\frac{12\cdot sen(40^o)}{8{,}02} \rightarrow sen(A)=0{,}962$$

$$A=74{,}107^o \quad , \quad A=180^o-74{,}107^o=105{,}89^o$$

En principio, los dos ángulos son soluciones posibles. Vamos a obtener el tercer vértice y luego razonaremos la solución final (que es única, no puede haber dos triángulos con ángulos distintos e igual longitud en sus lados).

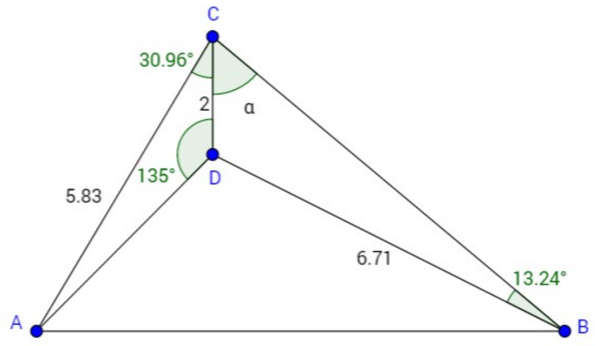
$$\frac{b}{sen(B)}=\frac{c}{sen(C)} \rightarrow \frac{7}{sen(B)}=\frac{8{,}02}{sen(40^o)} \rightarrow sen(B)=\frac{7\cdot sen(40^o)}{8{,}02} \rightarrow sen(B)=0{,}561$$

$$B=34{,}178^o \quad , \quad B=180^o-34{,}178^o=145^o 87^o$$

De esta pareja de valores, la única opción posible es $B=34{,}178^o$, ya que el dato inicial $C=40^o$ imposibilita que $B=145^o 87^o$ por ser la suma de los ángulos de un triángulo igual a 180º.

Por lo tanto, si $B=34{,}178^o$ y $C=40^o \rightarrow A=180^o-(B+C)=105{,}89^o$ que es una de las soluciones posibles que contemplamos anteriormente.

3. Obtener la distancia $\overline{AB}$ en la siguiente figura sabiendo que $\alpha<90^o$.



Si en el triángulo ADB conseguimos el valor del vértice D y el valor del lado AD podremos aplicar el teorema del coseno para obtener la longitud $\overline{AB}$.

En el triángulo ACD podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{5,83}{sen(135^o)}=\frac{\overline{AD}}{sen(30,96^o)} \rightarrow \overline{AD}=\frac{5,83\cdot sen(30,96^o)}{sen(135^o)} \rightarrow \overline{AD}\simeq 4,24...$$

En el triángulo CDB podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{2}{sen(13,24^o)}=\frac{6,71}{sen(\alpha)} \rightarrow sen(\alpha)=\frac{6,71\cdot sen(13,24^o)}{2} \rightarrow sen(\alpha)=0,768$$

$\alpha\simeq 50,21^o$ → Donde hemos considerado el dato del enunciado $\alpha<90^o$.

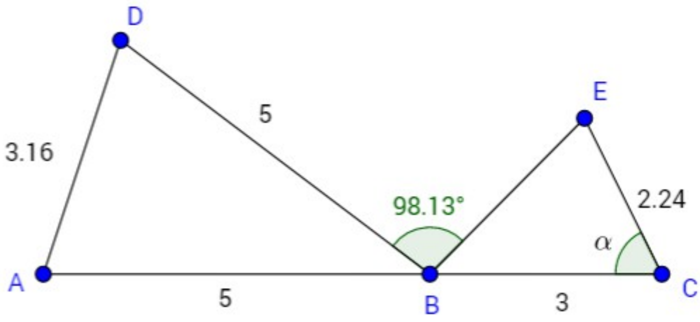
En el triángulo CDB el vértice $D=180^o-(50,21^o+13,24^o)=116,55^o$

En el triangulo ADB el vértice $D=360^o-116,55^o-135^o=108,45^o$

Y podemos aplicar el teorema del coseno en el triángulo ADB para obtener $\overline{AB}$.

$$(\overline{AB})^2=(6,71)^2+(4,24)^2-2\cdot 6,71\cdot 4,24\cdot\cos(108,45^o) \rightarrow (\overline{AB})^2=81 \rightarrow \overline{AB}=9$$

4. Obtener el ángulo α de la figura sabiendo que el vértice $\hat{E}<90^{\circ}$.



Si en el triángulo BEC obtengo el vértice B , podré aplicar el teorema del seno para conseguir el vértice E y finalmente el vértice C que genera el ángulo α .

En el primer triángulo ADB puedo obtener el vértice B por el teorema del coseno.

$$(3{,}16)^2=5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot\cos(B) \;\rightarrow\; 9{,}986=50-50\cdot\cos(B) \;\rightarrow\; -40{,}014=-50\cdot\cos(B)$$
$$0{,}8=\cos(B) \;\rightarrow\; B=36{,}84^{o}$$

Es un ángulo del primer cuadrante, ya que el ángulo del cuarto cuadrante que comparte el mismo coseno no tiene sentido por no poder ser mayor de los 180º que forman la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Por lo tanto el vértice B del triángulo pequeño BEC resulta:

$$B=180^{\circ}-98{,}13^{o}-36{,}84^{o}=45{,}03^{o}$$

Aplicamos el teorema del seno al triángulo BEC para obtener el vértice E .

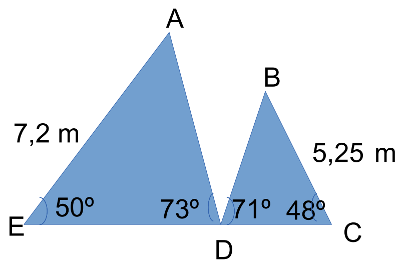
$$\frac{2{,}24}{sen(45{,}03^{o})}=\frac{3}{sen(E)} \;\rightarrow\; sen(E)=\frac{3\cdot sen(45{,}03^{o})}{2{,}24}=0{,}948$$

$E=71{,}35^{o}$, $E=108{,}65^{o}$ $\rightarrow$ Elegimos $E=71{,}35^{o}$ por la condición del enunciado que afirma $\hat{E}<90^{\circ}$.

Y el ángulo α requerido resulta:

$$\alpha=180^{\circ}-71{,}35^{o}-45{,}03^{o}=63{,}62^{o}$$

5. Calcula la distancia entre los puntos A y B.



En el triángulo DAB se cumple → $\hat{D}=180º-73º-71º \rightarrow \hat{D}=36º$

Si obtenemos las distancias $\overline{DA}$ y $\overline{DB}$, podríamos aplicar el teorema del coseno para conseguir la distancia $\overline{AB}$ que nos pide el enunciado.

En el triángulo DAE , por el teorema del seno:

$$\frac{7,2}{sen(73º)}=\frac{\overline{DA}}{sen(50º)} \rightarrow \overline{DA}=5,77\,m$$

En el triángulo DBC , por el teorema del seno:

$$\frac{5,25}{sen(71º)}=\frac{\overline{DB}}{sen(48º)} \rightarrow \overline{DB}=4,13\,m$$

En el triángulo DAB , por el teorema del coseno:

$$(\overline{AB})^2=(5,77)^2+(4,13)^2-2\cdot 5,77\cdot 4,13\cdot\cos(36º)$$
$$(\overline{AB})^2=33,29+17,06-47,66\cdot\cos(36º)$$
$$(\overline{AB})^2=11,79$$
$$\overline{AB}=3,43\,m$$