ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΔΕΩΝ
ΤΙ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΠΕΙ Η ΓΝΩΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΝΘΡΩΠΙΝΗ ΦΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τίτλος Πρωτοτύπου:
MATHEMATICAL IDEA ANALYSIS:
WHAT EMBODIED COGNITIVE SCIENCE CAN SAY ABOUT THE HUMAN NATURE OF MATHEMATICS
Proceedings of the 24th International Conference, Psychology of Mathematics, Hiroshima, Japan, July 19 – 26, 2000, Vol. 1, pp. 3 -22

Rafael E. Núñez

University of Freiburg
University of California at Berkeley

Περίληψη:
Το παρόν άρθρο δίνει μια σύντομη εισαγωγή σε ένα νέο επιστημονικό κλάδο που αποκαλείται γνωσιακή επιστήμη των μαθηματικών (Lakoff & Núñez, 2000), δηλαδή, την εμπειρική και πολυ-επιστημονική μελέτη των μαθηματικών (καθαυτών) ως επιστημονικής θεματικής ύλης. Το θεωρητικό υπόβαθρο των επιχειρημάτων βασίζεται στην ενσώματη γνωσιακή λειτουργία, και σε σχετικά πρόσφατα ευρήματα της γνωσιακής γλωσσολογίας. Το άρθρο πραγματεύεται την Ανάλυση των Μαθηματικών Ιδεών – το σύνολο των τεχνικών για τη μελέτη ασαφών (κατά μέγα μέρος ασυνείδητων) εννοιολογικών δομών στα μαθηματικά. Ιδιαίτερη προσοχή αποδίδεται στους γνωσιακούς μηχανισμούς της καθημερινής ζωής όπως τα εικονο-σχήματα και οι εννοιολογικές μεταφορές, ώστε να δειχθεί το πώς διαδραματίζουν έναν θεμελιώδη ρόλο στη σύσταση της ίδιας της δομής των μαθηματικών. Οι αναλύσεις, που παρουσιάζονται με το σχολιασμό κάποιων θεμάτων της θεωρίας συνόλων και υπερσυνόλων (hypersets), δείχνουν ότι το (ανθρώπινο) νόημα είναι εκείνο που καθιστά τα μαθηματικά αυτά που είναι: Τα μαθηματικά δεν είναι υπερβατικά αντικειμενικά, αλλά ούτε και αυθαίρετα (δεν είναι το αποτέλεσμα καθαρώς κοινωνικών συμβάσεων). Γίνεται επίσης λόγος για κάποιες συνέπειες για τη διδακτική των μαθηματικών.

Έχετε ποτέ σκεφτεί γιατί (εννοώ, πραγματικά *για ποιο λόγο*) ο πολλαπλασιασμός δύο αρνητικών αριθμών δίνει ένα θετικό αριθμό; Ή γιατί η κενή κλάση είναι μια υποκλάση όλων των κλάσεων; Και γιατί είναι κλάση, ενώ δεν μπορεί να είναι κλάση από οτιδήποτε; Και γιατί είναι μοναδική; Για τους περισσότερους ανθρώπους, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών, φυσικών, μηχανικών, και επιστημόνων της πληροφορικής, οι απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά έχουν μια ισχυρή δογματική συνιστώσα (δοκιμάστε να τα θέσετε στους συναδέλφους σας). Είναι κοινότοπο να συναντά κανείς απαντήσεις του είδους «γιατί έτσι είναι», ή «δεν ξέρω ακριβώς το γιατί, αλλά ξέρω ότι έτσι είναι το σωστό», κλπ.

Μέσα στον πολιτισμό εκείνων που ασκούν τα μαθηματικά με επαγγελματικό τρόπο, οι δογματικές απαντήσεις στα εν λόγω ερωτήματα απορρέουν συνήθως από ορισμούς, αξιώματα, και κανόνες, και όχι απαραίτητα από γνήσια κατανόηση. Σ' εκείνες τις περιπτώσεις, η εγκυρότητα της απάντησης παρέχεται από την απόδειξη, και όχι απαραίτητα από το *νόημα*. Αυτή η ουσιαστική διαφορά μεταξύ του καθορισμού ότι κάτι είναι αληθές και της επεξήγησης του γιατί είναι αληθές, μπορεί να διαπιστωθεί στο ακόλουθο ιστορικό ανέκδοτο.

Ο Benjamin Pierce, ένας από τους κυριότερους μαθηματικούς του Harvard το 19ο αιώνα (και πατέρας του Charles Sanders Pierce), έδινε κάποτε μια διάλεξη στο Harvard σχετικά με την απόδειξη του Euler για το ότι $e^{\pi i}+1=0$. Κατά τη διδασκαλία της περίφημης αυτής ισότητας και της απόδειξής της, παρατήρησε,

> «Κύριοι, το ότι είναι αναμφισβήτητα αληθής, είναι απολύτως παράδοξο. Δε μπορούμε να το κατανοήσουμε, και δε γνωρίζουμε τι σημαίνει. Αλλά το έχουμε αποδείξει και επομένως γνωρίζουμε ότι πρέπει να αληθεύει.» (Maor, 1994, σελ 160)

Φυσικά, ο Pierce δεν ήταν ο μόνος μαθηματικός (ή καθηγητής μαθηματικών) που δε μπόρεσε να κατανοήσει τι σημαίνει η ισότητα $e^{\pi i}+1=0$. Ακόμη και σήμερα, σχετικά λίγοι καθηγητές μαθηματικών και φοιτητές κατανοούν τι πραγματικά *σημαίνει* η εν λόγω ισότητα. Παρά ταύτα, γενεά προς γενεά καθηγητές μαθηματικών και φοιτητές συνεχίζουν να μελετούν τη μία ή την άλλη εκδοχή της απόδειξης του Euler, κατανοώντας μόνο την κανονικότητα στους χειρισμούς των συμβόλων, αλλά όχι τις *ιδέες* που την καθιστούν αληθή. Και τούτο δεν αποτελεί ένα μεμονωμένο παράδειγμα. Η κενή νοήματος αλήθεια και η μεστή νοήματος κατανόηση αποτελούν θεμελιώδεις συνιστώσες πολλών συζητήσεων που αφορούν τη φύση των μαθηματικών.

Σ' αυτήν την ομιλία, θέλω να καταδείξω ότι το νόημα (δηλαδή, οι μεστές νοήματος ανθρώπινες ιδέες) είναι εκείνο που καθιστά τα μαθηματικά αυτό που είναι, και ότι τούτο το νόημα δεν είναι αυθαίρετο, δεν είναι το αποτέλεσμα καθαρώς κοινωνικών συμβάσεων. Τα επιχειρήματά μου θα βασιστούν στη σύγχρονη ενσώματη γνωσιακή επιστήμη. Ειδικότερα, σκοπεύω να δείξω τα εξής:

1. Ότι η φύση των μαθηματικών αφορά ανθρώπινες ιδέες, και όχι απλώς τυπικές αποδείξεις, αξιώματα και ορισμούς (οι αποδείξεις, τα αξιώματα και οι ορισμοί συνιστούν μόνο ένα μέρος των μαθηματικών, που επίσης κατανοείται μέσω επακριβών συνόλων ιδεών).
2. Ότι αυτές οι ιδέες είναι θεμελιωμένες σε χαρακτηριστικούς του ανθρώπινου είδους γνωσιακούς και σωματικούς μηχανισμούς της καθημερινότητας, καθιστώντας, συνεπώς, τα μαθηματικά ένα ανθρώπινο εγχείρημα, και όχι μια πλατωνική και υπερβατική οντότητα.
3. Ότι εξαιτίας αυτής της θεμελίωσης, οι μαθηματικές ιδέες δεν είναι αυθαίρετες, δηλαδή, δεν αποτελούν το προϊόν καθαρώς κοινωνικών και πολιτισμικών συμβάσεων (παρ' όλο που οι κοινωνικο-πολιτισμικές διαστάσεις διαδραματίζουν κρίσιμους ρόλους στο σχηματισμό και την εξέλιξη των ιδεών).
4. Ότι η εννοιολογική (και ιδεολογική) δομή που συνιστά τα μαθηματικά μπορεί να μελετηθεί εμπειρικά, μέσω επιστημονικών μεθόδων.
5. Ότι μια συγκεκριμένη μεθοδολογία βασισμένη στην ενσώματη γνωσιακή επιστήμη – η *Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών* – μπορεί να εξυπηρετήσει αυτό το σκοπό.

Το μεγαλύτερο μέρος του υλικού που θα παρουσιάσω εδώ βασίζεται στο έργο που αναπτύσσω επί αρκετά χρόνια σε στενή συνεργασία με το γνωσιακό γλωσσολόγο George Lakoff στο Berkeley (Lakoff & Núñez, 1997, 1998, 2000, Núñez & Lakoff, 1998).

Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΙΔΕΩΝ:
ΑΠΟ ΤΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΗΣ ΠΟΛΥΘΡΟΝΑΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ

Στην πορεία της ιστορίας, πολλοί μαθηματικοί προσπάθησαν να απαντήσουν το ερώτημα της φύσης του νοήματος, της αλήθειας και των ιδεών στα μαθηματικά. Τον τελευταίο αιώνα περίπου, πολλοί σημαντικοί μαθηματικοί, όπως οι Dedekind, Cantor, Hilbert, Poincaré και Weyl, για να αναφέρω μερικούς μόνο, πρότειναν κάποιες απαντήσεις οι οποίες έχουν κοινά σημαντικά στοιχεία. Όλοι θεώρησαν, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, την ανθρώπινη διαίσθηση ως τη θεμελιώδη αφετηρία για τις φιλοσοφικές τους διερευνήσεις: Διαισθήσεις μικρών ακεραίων, διαισθήσεις συλλογών, διαισθήσεις κίνησης στο χώρο, κοκ. (βλ. Dedekind, 1888/1976, Dauben για τον Cantor (1979), Kitcher για τον Hilbert (1976), Poincaré, 1913/1963, Weyl, 1918/1994). Αντελήφθησαν αυτές τις θεμελιώδεις διαισθήσεις του ανθρώπινου νου ως σταθερές και εμβριθείς ώστε να εξυπηρετήσουν ως βάση για τα μαθηματικά[1].

Αυτές οι φιλοσοφικές ενοράσεις μας λένε κάτι σημαντικό. Λένε σιωπηρά ότι το οικοδόμημα των μαθηματικών βασίζεται σε πτυχές του ανθρώπινου νου που βρίσκονται *εκτός* της περιοχής των μαθηματικών (δηλαδή, αυτές οι διαισθήσεις καθαυτές δεν είναι θεωρήματα, αξιώματα ή ορισμοί). Παρά ταύτα, πέρα από το φιλοσοφικό και ιστορικό ενδιαφέρον τούτες οι ενοράσεις, αν θεωρηθούν από τη σκοπιά των επιστημονικών προτύπων των ημερών μας, παρουσιάζουν σημαντικούς περιορισμούς:

- Πρώτον, εκείνοι οι μαθηματικοί ήταν επαγγελματικά εκπαιδευμένοι να ασκούν τα μαθηματικά, όχι απαραίτητα να μελετούν ιδέες και διαισθήσεις. Και η επιστήμη τους, τα μαθηματικά (ως τέτοια), δε μελετά ιδέες ή διαισθήσεις. Σήμερα, η μελέτη των ιδεών (εννοιών και διαισθήσεων) καθαυτήν αποτελεί μια επιστημονική θεματική ύλη, και δεν είναι πλέον απλώς ένα ασαφές και ασύλληπτο φιλοσοφικό αντικείμενο.
- Δεύτερον, η μεθοδολογία που εκείνοι χρησιμοποιούσαν ήταν κυρίως η *ενδοσκόπηση* – η υποκειμενική διερεύνηση προσωπικών εντυπώσεων, αισθημάτων και σκέψεων. Τώρα γνωρίζουμε, από σημαντικά στοιχεία στην επιστημονική μελέτη της διαίσθησης και της γνωσιακής λειτουργίας, ότι υπάρχουν θεμελιώδεις πτυχές νοητικής δραστηριότητας οι οποίες είναι ασυνείδητες στη φύση τους και συνεπώς απρόσβατες στην ενδοσκόπηση.

Το δίδαγμα εδώ είναι ότι η καθαρώς φιλοσοφική αναζήτηση και ενδοσκόπηση – παρά το ότι είναι πολύ σημαντικές – δίνουν, στην καλύτερη των περιπτώσεων, μια πολύ περιορισμένη εικόνα της εννοιολογικής δομής που καθιστά τα μαθηματικά εφικτά. Εκείνο που χρειάζεται, για να κατανοηθεί η φύση και η προέλευση των μαθηματικών και του μαθηματικού νοήματος, είναι η μελέτη των μαθηματικών *καθαυτών* (με τη διαισθητική τους θεμελίωση, τη συμπερασματική δομή τους, τα συμβολικά τους συστήματα, κλπ.) ως μιας επιστημονικής θεματικής ύλης. Εκείνο που χρειάζεται είναι

[1] Αλλά δε θεώρησαν αυτές τις διαισθήσεις ως επαρκώς «αυστηρές». Αυτός υπήρξε ένας μείζον λόγος για τον οποίο, αργότερα, ο φορμαλισμός θα εξαφάνιζε ρητά τις ιδέες, και θα συνέχιζε για να κυριαρχήσει στις θεμελιωτικές συζητήσεις. Δυστυχώς, εκείνη την εποχή οι φιλόσοφοι και μαθηματικοί δεν διέθεταν τα επιστημονικά και θεωρητικά εργαλεία που διαθέτουμε σήμερα ώστε να διαπιστώσουν ότι οι ανθρώπινες διαισθήσεις και ιδέες είναι πράγματι πολύ ακριβείς και αυστηρές, και ότι συνεπώς τα προβλήματα που εκείνοι αντιμετώπιζαν δεν είχαν σχέση με κάποια έλλειψη αυστηρότητας των ιδεών και των διαισθήσεων. (Για λεπτομέρειες, βλ. Núñez & Lakoff, 1998, και Lakoff & Núñez, 2000.)

μια γνωσιακή επιστήμη *των* μαθηματικών, μια επιστήμη *νοητικά-βασισμένων μαθηματικών* (Lakoff & Núñez, 1997, 2000). Από τη σκοπιά αυτή, οι απαντήσεις στα εν λόγω θέματα θα πρέπει να δίνονται ως προς εκείνους τους μηχανισμούς που αποτελούν τη βάση των διαισθήσεων και των ιδεών μας. Δηλαδή, ως προς τους ανθρώπινους γνωσιακούς, βιολογικούς και πολιτισμικούς μηχανισμούς, και όχι ως προς αξιώματα, ορισμούς, τυπικές αποδείξεις και θεωρήματα. Ας δούμε ποια σημαντικά ευρήματα είναι χρήσιμα στην παροχή τούτων των απαντήσεων.

Η Ενσώματη Γνωσιακή Επιστήμη και τα Πρόσφατα Εμπειρικά Ευρήματα σχετικά με τη Φύση του Νου

Τα τελευταία χρόνια, έχουν γίνει επαναστατικές πρόοδοι στη γνωσιακή επιστήμη – την πολυκλαδική επιστημονική μελέτη του νου. Αυτές οι πρόοδοι έχουν σημαντική σχέση με την κατανόησή μας για τα μαθηματικά. Μεταξύ των πλέον εμβριθών από αυτές τις νέες ενοράσεις είναι οι εξής:

1. *Το ενσώματο του νου.* Η λεπτομερής φύση και η δυναμική των σωμάτων μας, των εγκεφάλων μας και της καθημερινής μας λειτουργίας στον κόσμο δομούν τις ανθρώπινες έννοιες και την ανθρώπινη λογική. Αυτό περιλαμβάνει τις μαθηματικές έννοιες και τη μαθηματική λογική.
2. *Το γνωσιακό ασυνείδητο.* Οι περισσότερες γνωσιακές διαδικασίες είναι ασυνείδητες – όχι κατασταλμένες κατά τη Φροϋδική έννοια, αλλά απλά απρόσβατες σε άμεση συνειδητή ενδοσκόπηση. Δεν μπορούμε μέσω της ενδοσκόπησης να κοιτάξουμε απ' ευθείας τα εννοιολογικά μας συστήματα και τις χαμηλού επιπέδου γνωσιακές διαδικασίες μας. Αυτό περιλαμβάνει το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής σκέψης.
3. *Μεταφορική σκέψη.* Κατά το μεγαλύτερο μέρος, τα ανθρώπινα όντα αντιλαμβάνονται τις αφηρημένες έννοιες με σαφή τρόπο, με τη χρήση ακριβούς συμπερασματικής δομής και τρόπων συλλογισμού θεμελιωμένων στο αισθησιο-κινητικό σύστημα. Ο γνωσιακός μηχανισμός μέσω του οποίου το αφηρημένο κατανοείται μέσω του σαφούς ονομάζεται *εννοιολογική μεταφορά*[2] (conceptual metaphor). Η μαθηματική σκέψη επίσης χρησιμοποιεί την εννοιολογική μεταφορά, όπως όταν αντιλαμβανόμαστε τους αριθμούς ως σημεία πάνω σε μια ευθεία, ή το χώρο ως σύνολα σημείων.

Στα επόμενα σκοπεύω να δώσω μια γενική επισκόπηση του πώς μπορούν να εφαρμοστούν αυτά τα εμπειρικά ευρήματα στην περιοχή των μαθηματικών ιδεών. Δηλαδή, εκλαμβάνοντας τα μαθηματικά ως μια θεματική ύλη για τη γνωσιακή επιστήμη θα ρωτήσω πώς ορισμένες περιοχές των μαθηματικών δημιουργούνται και γίνονται αντιληπτές. Στην πορεία, θα δείξω ότι με αυτές τις πρόσφατες προόδους στη γνωσιακή επιστήμη καθίσταται εφικτή μια βαθιά και θεμελιωμένη *Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών* (για λεπτομέρειες, βλ. Lakoff & Núñez, 2000). Ας έχουμε κατά νου ότι τότε το κύριο μέλημα δεν είναι μόνο το τι είναι αληθές στα μαθηματικά, αλλά το τι *σημαίνουν* οι μαθηματικές ιδέες, και γιατί οι μαθηματικές αλήθειες είναι αληθείς δυνάμει του τι σημαίνουν.

---

[2] Όπως θα δούμε αργότερα, αυτός είναι ένας τεχνικός όρος.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να δηλώσω ότι όταν αναφέρομαι στη γνωσιακή επιστήμη, αναφέρομαι στις σύγχρονες ενσώματες προσανατολισμένες προσεγγίσεις (βλ., λόγου χάρη, Johnson, 1987, Lakoff, 1987, Varela, Thompson & Rosch, 1991, Núñez, 1995, 1999), οι οποίες είναι ριζικά διαφορετικές από την ορθόδοξη γνωσιακή επιστήμη. Η τελευταία δομεί στη βάση δυϊκών, φορμαλιστικών και ομπτζεκτιβιστικών παραδοχών, ενώ οι πρώτες τις έχουν αρνηθεί ρητά, ειδικά, το χωρισμό νου-σώματος (δυϊσμός). Για τις ενσώματες προσανατολισμένες προσεγγίσεις οποιαδήποτε θεωρία πρέπει να λάβει υπ' όψη τις ιδιαιτερότητες των εγκεφάλων, των σωμάτων και των περιβαλλόντων στα οποία αυτά υπάρχουν. Για τούτους τους λόγους οι αναλύσεις του είδους που θα δώσω στη συνέχεια δε νοούνταν καν την εποχή της ορθόδοξης γνωσιακής επιστήμης και του εκτός σώματος νου, η οποία αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1960 και στις αρχές της δεκαετίας του 1970. Γενικά, υπό την παραδοσιακή σκοπιά, η οποία υπό τη μορφή της νέο-γνωσιακής επιστήμης (neo-cognitivism) (Freeman & Núñez, 1999) εξακολουθεί να έχει έντονη δράση στις μέρες μας, οι αναφορές στη σκέψη γίνονται μέσω του χειρισμού καθαρώς αφηρημένων συμβόλων και οι έννοιες αντιμετωπίζονται ως κυριολεκτικές – απαλλαγμένες από όλους τους βιολογικούς περιορισμούς και τις ανακαλύψεις για τον εγκέφαλο.

Το αναφέρω αυτό, διότι, δυστυχώς, μέσα στην κοινότητα της διδακτικής των μαθηματικών, για πολλούς, η γνωσιακή επιστήμη είναι συνώνυμη της ορθόδοξης άποψης. Εξαιτίας των ποικίλων περιορισμών που αυτή η παραδοσιακή άποψη έχει διακηρύξει διαχρονικά, πολλοί ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών απασχολήθηκαν με αναπτυξιακούς, κοινωνικούς και πολιτισμικούς παράγοντες και έχουν απορρίψει συνολικά τη γνωσιακή επιστήμη, με την παραδοχή ότι έχει ελάχιστα να προσφέρει (Núñez, Edwards & Matos, 1998). Θέλω να καταστήσω σαφές, λοιπόν, ότι η Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών προέρχεται από ενσώματες προσανατολισμένες προσεγγίσεις στη γνωσιακή επιστήμη. Για έναν ενδελεχέστερο σχολιασμό των διαφορών μεταξύ της ορθόδοξης γνωσιακής επιστήμης και της σύγχρονης ενσώματης προσανατολισμένης γνωσιακής επιστήμης, βλ. Núñez (1997), Lakoff & Johnson (1999), και Núñez & Freeman (1999).

Συνήθης Γνωσιακή Λειτουργία και Μαθηματική Γνωσιακή Λειτουργία

Ουσιαστική έρευνα στη νευροψυχολογία, την παιδική ανάπτυξη και τη ζωική γνωσιακή λειτουργία υποδηλώνει ότι όλα τα άτομα του είδους *Homo Sapiens* γεννιούνται με την ικανότητα να διακρίνουν μεταξύ πολύ μικρών πληθών αντικειμένων και γεγονότων (δηλαδή, την άμεση αναγνώριση μικρού πλήθους αντικειμένων[3]) και να εκτελούν την απλούστερη αριθμητική – την αριθμητική των πολύ μικρών αριθμών (για πρόσφατες επισκοπήσεις αυτών και σχετικών με αυτά θεμάτων, βλ. Dehaene, 1997, και Butterworth, 1999). Τούτα τα ευρήματα είναι σημαντικά για την κατανόηση των βιολογικών θεμελίων της βασικής αριθμητικής. Παρά ταύτα, μας δίνουν ελάχιστες πληροφορίες για την πλήρη πολυπλοκότητα και την αφαίρεση των μαθηματικών. Τα μαθηματικά είναι κάτι πολύ περισσότερο από την αριθμητική των πολύ μικρών αριθμών. Η τριγωνομετρία και ο απειροστικός λογισμός πόρρω απέχουν από το «3 μείον 1 ίσον 2». Ακόμη και η κατανόηση του ότι το μηδέν είναι ένας αριθμός και ότι οι

[3] Subitizing.

αρνητικοί αριθμοί είναι αριθμοί χρειάστηκε αιώνες πολύπλοκης ανάπτυξης. Η επέκταση των αριθμών στους ρητούς, τους πραγματικούς, τους φανταστικούς και τους υπερ-πραγματικούς (hyperreals) απαιτεί ένα τεράστιο γνωσιακό μηχανισμό που υπερβαίνει κατά πολύ τα όσα τα βρέφη και τα ζώα και ένας φυσιολογικός ενήλικας χωρίς διδασκαλία μπορούν να κάνουν. Οπότε το ζήτημα της φύσης, της προέλευσης και του νοήματος των μαθηματικών ιδεών παραμένει ανοικτό: Ποιες είναι οι ενσώματες γνωσιακές ικανότητες που επιτρέπουν σε κάποιον να μεταβεί από τέτοιες έμφυτες βασικές αριθμητικές ικανότητες σε μια βαθιά και πλούσια κατανόηση, λόγου χάρη, των λυκειακών μαθηματικών;

Ο George Lakoff κι εγώ έχουμε αναφερθεί στο εν λόγω ζήτημα, χρησιμοποιώντας μεθοδολογίες από το αναπτυσσόμενο πεδίο της γνωσιακής γλωσσολογίας και της ψυχογλωσσολογίας (περισσότερα για το θέμα αυτό στη συνέχεια). Σύμφωνα με τα όσα έχουμε βρει ως σήμερα, φαίνεται ότι τέτοιες προηγμένες μαθηματικές ικανότητες δεν είναι ανεξάρτητες από το γνωσιακό μηχανισμό που χρησιμοποιείται εκτός των μαθηματικών. Φαίνεται, μάλλον, ότι η γνωσιακή δομή των ανώτερων μαθηματικών χρησιμοποιεί το είδος των εννοιολογικών μηχανισμών που αποτελούν το υλικό της καθημερινής σκέψης όπως τα εικονο-σχήματα, τα εννοιολογικά μίγματα, και η εννοιολογική μεταφορά[4]. Μάλιστα, η τελευταία είναι από τους σημαντικότερους, καθώς συνιστά την ίδια τη δομή των μαθηματικών. Είναι παρούσα σε όλους τους υποτομείς των μαθηματικών, όπως στην περίπτωση που αντιλαμβανόμαστε τις συναρτήσεις ως σύνολα σημείων, τα άπειρα αθροίσματα ωσάν να έχουν μια τελική μοναδική καταληκτική κατάσταση, ή τη δυναμική συνέχεια ωσάν να είναι στατική διατήρηση της εγγύτητας (το κριτήριο ε-δ του Weierstrass).

Ας δούμε τώρα το θεωρητικό υπόβαθρο της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΔΕΩΝ

Η επέκταση της μελέτης του γνωσιακού ασυνείδητου στη μαθηματική γνωσιακή λειτουργία συνεπάγεται την ανάλυση του τρόπου με τον οποίο σιωπηρά κατανοούμε τα μαθηματικά καθώς τα ασκούμε ή συζητούμε γι' αυτά. Ένα μεγάλο μέρος της ασυνείδητης σκέψης περιλαμβάνει σιωπηρή μάλλον παρά ρητή, αυτόματη, άμεση κατανόηση – την κατανόηση των πραγμάτων δίχως να έχουμε συνειδητή πρόσβαση στους γνωσιακούς μηχανισμούς μέσω των οποίων κατανοούμε τα πράγματα. Η συνήθης καθημερινή μαθηματική κατανόηση δε βρίσκεται στη μορφή συνειδητών αποδείξεων από αξιώματα ούτε είναι πάντα το αποτέλεσμα ρητής, συνειδητής, προσανατολισμένης σε στόχους διδασκαλίας. Το μεγαλύτερο μέρος της καθημερινής μας μαθηματικής *κατανόησης* λαμβάνει χώρα χωρίς εμείς να έχουμε τη δυνατότητα να εξηγήσουμε ακριβώς τι κατανοούμε και πώς το κατανοούμε. Αυτό που ο Lakoff και εγώ έχουμε κάνει είναι να μελετήσουμε την καθημερινή μαθηματική κατανόηση αυτού του αυτόματου ασυνείδητου είδους και να θέσουμε τα εξής κρίσιμα ερωτήματα:

- Ποιο μέρος της μαθηματικής κατανόησης χρησιμοποιεί τα ίδια είδη εννοιολογικών μηχανισμών που χρησιμοποιούνται στην κατανόηση των συνήθων, μη μαθηματικών περιοχών;

[4] Λόγω του στόχου αυτής της παρουσίασης, εδώ θα αναφερθώ μόνο στα εικονο-σχήματα και την εννοιολογική μεταφορά. Θα τα περιγράψω στην επόμενη ενότητα.

- Οι γνωσιακοί μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται για το χαρακτηρισμό των συνήθων ιδεών χρησιμοποιούνται και για το χαρακτηρισμό των μαθηματικών ιδεών;
- Αν ναι, ποια είναι η βιολογική ή σωματική θεμελίωση τέτοιων μηχανισμών;

Έχουμε διαπιστώσει ότι πάμπολλοι γνωσιακοί μηχανισμοί οι οποίοι δεν είναι συγκεκριμένα μαθηματικοί χρησιμοποιούνται για το χαρακτηρισμό μαθηματικών ιδεών. Σ' αυτούς περιλαμβάνονται τέτοιοι συνήθεις γνωσιακοί μηχανισμοί όπως εκείνοι που χρησιμοποιούνται για τις βασικές χωρικές σχέσεις, τις ομαδοποιήσεις, τα μικρά μεγέθη, την κίνηση, τις κατανομές αντικειμένων στο χώρο, τις μεταβολές, τους σωματικούς προσανατολισμούς, τους βασικούς χειρισμούς αντικειμένων (λόγου χάρη, την περιστροφή και την επιμήκυνση), τις επαναλαμβανόμενες δράσεις, κοκ.

Έτσι, λόγου χάρη:

- Η αντίληψη της τεχνικής μαθηματικής έννοιας της κατηγορίας – κλάσης – χρησιμοποιεί την καθημερινή έννοια μιας συλλογής αντικειμένων σε μια φραγμένη περιοχή του χώρου.
- Η αντίληψη της τεχνικής μαθηματικής έννοιας της επανάληψης χρησιμοποιεί την καθημερινή έννοια μια επαναλαμβανόμενης δράσης.
- Η αντίληψη της τεχνικής μαθηματικής έννοιας της μιγαδικής αριθμητικής χρησιμοποιεί την καθημερινή έννοια της περιστροφής.
- Η αντίληψη των παραγώγων στο διαφορικό λογισμό απαιτεί τη χρήση τέτοιων καθημερινών εννοιών όπως η κίνηση, η προσέγγιση ενός φράγματος, κοκ.

Από μη θετική σκοπιά, αυτό θα 'πρεπε να είναι απολύτως προφανές. Αλλά από την τεχνική σκοπιά της γνωσιακής επιστήμης υπάρχει ένα προκλητικό ερώτημα που πρέπει κανείς να θέσει:

> *Ποιες ακριβώς καθημερινές έννοιες και γνωσιακοί μηχανισμοί χρησιμοποιούνται και με ποιους ακριβώς τρόπους στην ασυνείδητη αντίληψη των τεχνικών ιδεών, ώστε να παρέχουν την ακριβή συμπερασματική δομή που παρατηρείται στα μαθηματικά;*

Η Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών εξαρτάται άμεσα από τις απαντήσεις στο εν λόγω ερώτημα. Έχουμε βρει ότι οι μαθηματικές ιδέες είναι θεμελιωμένες σε σωματικά βασισμένους μηχανισμούς και στην καθημερινή εμπειρία. Πολλές μαθηματικές ιδέες αποτελούν τρόπους μαθηματικοποίησης συνήθων ιδεών, όπως όταν η ιδέα της αφαίρεσης μαθηματικοποιεί τη συνήθη ιδέα της απόστασης, ή όταν η ιδέα μιας παραγώγου μαθηματικοποιεί τη συνήθη ιδέα της στιγμιαίας μεταβολής. Θα παρουσιάσω λεπτομερέστερα τούτα τα ευρήματα με κάποια παραδείγματα από τη θεωρία συνόλων και τη θεωρία υπερσυνόλων. Αλλά λόγω των τεχνικοτήτων που περιλαμβάνονται, πρέπει πρώτα να δούμε κάποιες βασικές έννοιες της γνωσιακής γλωσσολογίας που είναι απαραίτητες για την κατανόηση αυτών των παραδειγμάτων.

Κάποιες Βασικές Έννοιες της Γνωσιακής Γλωσσολογίας και του Ενσώματου Νου

Πρόσφατες εξελίξεις στη γνωσιακή γλωσσολογία έχουν αποβεί εξαιρετικά καρποφόρες στη μελέτη της υψηλού επιπέδου γνωσιακής λειτουργίας από μια ενσώματη σκοπιά (λόγου χάρη, η φυσική κατανόηση της γλώσσας και τα εννοιολογικά συστήματα). Ειδικότερα, η γνωσιακή σημασιολογία (Sweetser, 1990, Talmy, 1999), η θεωρίας της εννοιολογικής ενοποίησης (Fauconnier, 1997, Fauconnier & Turner, 1998) και της εννοιολογικής μεταφοράς (Lakoff, 1993, Lakoff & Johnson, 1980, 1999, Gibbs, 1994) έχουν αποδειχθεί πολύ ισχυρές. Αυτές οι προσεγγίσεις προσφέρουν τη δυνατότητα εμπειρικής μελέτης της εννοιολογικής δομής τεράστιων συστημάτων αφηρημένων εννοιών μέσω των κατά μείζονα λόγο ασυνείδητων, αβίαστων, καθημερινών γλωσσικών εκδηλώσεων. Παρέχουν ένα εξαιρετικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών.

Εννοιολογική Μεταφορά

Ένα σημαντικό εύρημα στη γνωσιακή γλωσσολογία είναι ότι οι έννοιες οργανώνονται συστηματικά μέσω τεράστιων δικτύων *εννοιολογικών αντιστοιχίσεων*, οι οποίες εμφανίζονται σε εξαιρετικά συντονισμένα συστήματα και συνδυάζονται με σύνθετους τρόπους. Κατά το μείζον μέρος αυτές οι εννοιολογικές αντιστοιχίσεις χρησιμοποιούνται ασυνείδητα και αβίαστα στην καθημερινή επικοινωνία. Ένα σημαντικό είδος αντιστοίχισης είναι εκείνο που αναφέρθηκε προηγουμένως, η *εννοιολογική μεταφορά*.

Είναι σημαντικό να έχουμε κατά νου ότι οι εννοιολογικές μεταφορές δεν είναι απλώς σχήματα λόγου, και ότι δεν αποτελούν απλώς παιδαγωγικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για να παρουσιάσουν κάποιο εκπαιδευτικό υλικό. Οι εννοιολογικές μεταφορές, μάλιστα, είναι θεμελιώδεις γνωσιακοί μηχανισμοί (από τεχνική άποψη, είναι *αντιστοιχίσεις διαμέσου περιοχών οι οποίες διατηρούν τα συμπεράσματα* [inference-preserving cross-domain mappings]) που προβάλλουν τη συμπερασματική δομή μιας *περιοχής πηγής* σε μια *περιοχή στόχου*, επιτρέποντας στη χρήση αβίαστου συγκεκριμένου για το είδος και σωματικά βασισμένου συμπεράσματος να δομήσει αφηρημένο συμπέρασμα. Λόγου χάρη, οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται φυσικά το Χρόνο (περιοχή στόχου) πρωτίστως μέσω της Μονοδιάστατης Κίνησης (περιοχή πηγής), είτε τις κινήσεις των μελλοντικών στιγμών προς έναν παρατηρητή (όπως στη φράση «*Πλησιάζουν* τα Χριστούγεννα») ή την κίνηση ενός παρατηρητή διαμέσου ενός χρονικού τοπίου (όπως στη φράση «*Πλησιάζουμε* στα Χριστούγεννα»). Δηλαδή η καθημερινή μας έννοια για το Χρόνο είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την εμπειρία της μονοδιάστατης κίνησης. Υπάρχουν, φυσικά, πολλές ακόμη σημαντικές λεπτομέρειες και παραλλαγές αυτής της γενικής αντιστοίχισης του Χρόνου ως Κίνησης αλλά οι αναλύσεις τους υπερβαίνουν το στόχο αυτής της παρουσίασης. Το σημαντικό εδώ είναι ότι οι εν λόγω εννοιολογικές μεταφορές (και εννοιολογικές αντιστοιχίσεις εν γένει) είναι μη αναγώγιμες, είναι εξαιρετικά ακριβείς (λόγου χάρη, στο παράδειγμα το Χρόνου ως Κίνησης, η συμπερασματική δομή τους διατηρεί τις μεταβατικές σχέσεις), χρησιμοποιούνται κατά κόρον, αβίαστα, ασυνείδητα και είναι τελικώς σωματικά θεμελιωμένες (για λεπτομέρειες, βλ. Lakoff & Johnson, 1999, Κεφ. 10, Núñez, 1999).

Αντίθετα προς τα όσα νομίζουν κάποιοι, οι εννοιολογικές μεταφορές (και οι εννοιολογικές αντιστοιχίσεις εν γένει) δεν είναι απλώς αυθαίρετες κοινωνικές συμβάσεις. Δεν είναι αυθαίρετες διότι δομούνται από συγκεκριμένους για το είδος περιορισμούς που βρίσκονται στη βάση της καθημερινής μας εμπειρίας – ειδικά της σωματικής εμπειρίας. Λόγου χάρη, στους περισσότερους πολιτισμούς η Αγάπη γίνεται αντιληπτή μέσω της θερμικής εμπειρίας: Θερμότητα (όπως στη φράση «Με χαιρέτησε θερμά»). Η θεμελίωση αυτής της αντιστοίχισης δεν εξαρτάται (μόνο) από κοινωνικές συμβάσεις. Αναδύεται από τη συσχέτιση που όλα τα άτομα του είδους βιώνουν, από την πρώιμη οντογενετική ανάπτυξη, μεταξύ της αγάπης και της σωματικής εμπειρίας της θερμότητας. Είναι επίσης σημαντικό να αναφέρουμε ότι τεράστιο πλήθος από τις εννοιολογικές μεταφορές που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας επικοινωνία, όπως Η Αγάπη Είναι Θαλπωρή, δε μαθαίνονται μέσω ρητής προσανατολισμένης σε στόχους εκπαιδευτικής παρέμβασης.

Η έρευνα στη σύγχρονη θεωρία της εννοιολογικής μεταφοράς δείχνει ότι υπάρχει ένα εκτενές συμβατικό σύστημα εννοιολογικών μεταφορών σε κάθε ανθρώπινο εννοιολογικό σύστημα. Όπως ανέφερα νωρίτερα, αντίθετα προς τις παραδοσιακές μελέτες της μεταφοράς, οι σύγχρονες ενσώματες απόψεις *δεν αντιμετωπίζουν τις μεταφορές ωσάν αυτές να κατοικούν στις λέξεις, αλλά στη σκέψη*. Οι μεταφορικές γλωσσικές εκφράσεις, επομένως, είναι μόνο επιφανειακές εκδηλώσεις της μεταφορικής σκέψης. Αυτοί οι θεωρητικοί ισχυρισμοί βασίζονται σε ουσιαστικά εμπειρικά αποδεικτικά στοιχεία από μια ποικιλία πηγών, στις οποίες μεταξύ άλλων περιλαμβάνονται, ψυχογλωσσολογικά πειράματα (Gibbs, 1994), γλωσσολογικές μελέτες (Yu, 1998), γενικεύσεις επί συμπερασματικών σχημάτων (Lakoff, 1987), γενικεύσεις επί συμβατικής και λογοτεχνικής γλώσσας (Lakoff & Turner, 1989), η μελέτη της ιστορικής σημασιολογικής μεταβολής (Sweetser, 1990), της πρόσκτησης της γλώσσας (C. Johnson, 1997), των αυθόρμητων χειρονομιών (McNeill, 1992), και της αμερικανικής νοηματικής γλώσσας (Taub, 1997). Οι εννοιολογικές αντιστοιχίσεις, επομένως, μπορούν να μελετηθούν εμπειρικά, και να διατυπωθούν επακριβώς.

Όσον αφορά τις μαθηματικές έννοιες, οι Lakoff και Núñez (2000) διακρίνουν τρεις σημαντικούς τύπους εννοιολογικών μεταφορών:

- *Τις θεμελιωτικές μεταφορές* (grounding metaphors), οι οποίες θεμελιώνουν την κατανόησή μας για τις μαθηματικές ιδέες μέσω της καθημερινής εμπειρίας. Στις περιπτώσεις αυτές, η περιοχή στόχου της μεταφοράς είναι μαθηματική, αλλά η περιοχή πηγής βρίσκεται εκτός των μαθηματικών. Στα παραδείγματα περιλαμβάνεται η μεταφορά *Οι Κατηγορίες Είναι σχήματα Εγκιβωτισμού* (βλ. παρακάτω) και άλλες εννοιολογικές μεταφορές για την αριθμητική.
- *Τις Επαναπροσδιοριστικές μεταφορές* (redefinitional metaphors), οι οποίες είναι μεταφορές που θέτουν μια τεχνική κατανόηση αντικαθιστώντας τις συνήθεις έννοιες (όπως η εννοιολογική μεταφορά που χρησιμοποίησε ο Georg Cantor για να αντιληφθεί εκ νέου τις έννοιες «περισσότερα από» και «τόσα όσα» για τα άπειρα σύνολα).
- Τις *Συνδετικές Μεταφορές* (linking metaphors), οι οποίες είναι μεταφορές εντός των μαθηματικών και που μας επιτρέπουν να αντιληφθούμε μια μαθηματική περιοχή μέσω μια άλλης μαθηματικής περιοχής. Στις περιπτώσεις αυτές, και οι δύο περιοχές της αντιστοίχισης είναι μαθηματικές. Στα παραδείγματα περιλαμβάνεται η μεταφορά του Von Neumann *Οι αριθμοί Είναι Σύνολα*, *Οι Συναρτήσεις Είναι Σύνολα Σημείων*, και, όπως θα δούμε αργότερα, η μεταφορά *Τα Σύνολα Είναι Γραφήματα*.

Οι συνδετικές μεταφορές είναι από πολλές απόψεις οι πλέον ενδιαφέρουσες από αυτές, αφού αποτελούν μέρος της δομής των ίδιων μαθηματικών. Εμφανίζονται όποτε ένας κλάδος των μαθηματικών χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση ενός άλλου, όπως συχνά συμβαίνει. Επιπλέον, οι συνδετικές μεταφορές είναι κεντρικές για τη δημιουργία, όχι μόνο των νέων μαθηματικών εννοιών, αλλά συχνά νέων κλάδων των μαθηματικών.

Τέτοιοι κλασικοί κλάδοι των μαθηματικών όπως η αναλυτική γεωμετρία, η τριγωνομετρία και η μιγαδική ανάλυση οφείλουν την ύπαρξή τους στις συνδετικές μεταφορές.

Έννοιες χωρικής σχέσης και εικονο- σχήματα

Ένα άλλο σημαντικό εύρημα της γνωσιακής γλωσσολογίας είναι το ότι τα εννοιολογικά συστήματα μπορούν να αποσυντεθούν τελικά σε πρωτογενείς έννοιες χωρικών σχέσεων που ονομάζονται *εικονο-σχήματα* (image schemas). Τα εικονο-σχήματα είναι βασικές δυναμικές τοπολογικές και προσανατολιστικές δομές που χαρακτηρίζουν χωρικά συμπεράσματα και συνδέουν τη γλώσσα με την οπτικο-κινητική εμπειρία (Johnson, 1987, Lakoff & Johnson, 1999). Όπως θα δούμε, ένα εξαιρετικά σημαντικό χαρακτηριστικό των εικονο-σχημάτων είναι ότι η *συμπερασματική δομή* τους *διατηρείται* υπό μεταφορικές αντιστοιχίσεις. Τα εικονο-σχήματα μπορούν να μελετηθούν εμπειρικά διαμέσου της γλώσσας (και των αυθόρμητων χειρονομιών), ειδικότερα διαμέσου της γλωσσικής εκδήλωσης χωρικών σχέσεων.

Κάθε γλώσσα διαθέτει ένα σύστημα χωρικών σχέσεων, αν και αυτές διαφέρουν ριζικά από γλώσσα σε γλώσσα. Στα Αγγλικά υπάρχουν προθέσεις όπως *in* (μέσα), *on* (επάνω), *through* (διαμέσου), *above* (υπεράνω), κοκ. Άλλες γλώσσες έχουν συστήματα τα οποία συχνά διαφέρουν ριζικά από το σύστημα της Αγγλικής. Μολαταύτα, οι χωρικές σχέσεις σε μια δεδομένη γλώσσα αποσυντίθενται σε εννοιολογικά πρωτογενή (τα εικονο-σχήματα) τα οποία εμφανίζονται να είναι καθολικά.

Λόγου χάρη, η αγγλική λέξη «on», με τη σημασία που χρησιμοποιείται στη φράση «The book is *on* the desk» (το βιβλίο είναι *επάνω* στο θρανίο) συντίθεται από τρία πρωτογενή εικονο- σχήματα:

- Το *Σχήμα Υπεράνω* (το βιβλίο είναι *υπεράνω* του θρανίου)
- Το *Σχήμα Επαφής* (το βιβλίο βρίσκεται *σε επαφή* με το θρανίο)
- Το *Σχήμα Υποστήριξης* (το βιβλίο *υποστηρίζεται* από το θρανίο)

Το Σχήμα Υπεράνω είναι προσανατολιστικό. Προσδιορίζει ένα προσανατολισμό στο χώρο σε σχέση με τη βαρυτική έλξη που δεχόμαστε στο σώμα μας. Το Σχήμα Επαφής είναι ένα από ένα πλήθος τοπολογικών σχημάτων. Υποδεικνύει την απουσία κενού. Το Σχήμα Υποστήριξης είναι δυναμικό (force-dynamic) στη φύση του. Υποδεικνύει την κατεύθυνση και τη φύση μιας δύναμης. Εν γένει, τα στατικά εικονο-σχήματα εμπίπτουν σε μια από τις εξής κατηγορίες: προσανατολιστικά, τοπολογικά και δυναμικά (force-dynamic). Σε άλλες γλώσσες τα πρωτογενή μπορούν να συνδυάζονται με πολύ διαφορετικούς τρόπους. Δεν έχουν όλες οι γλώσσες μία μοναδική έννοια όπως το αγγλικό *on*. Λόγου χάρη, ακόμη και σε μια γλώσσα που μοιάζει με τα Γερμανικά, το *on* στη φράση *on the table* (*επάνω στο τραπέζι*) γίνεται *auf*, ενώ το *on* στη φράση *on the wall* (*επάνω στον τοίχο*) (που δεν περιέχει το Σχήμα Υπεράνω) μεταφράζεται ως *an*.

Ένα κοινό εικονο-σχήμα μεγάλης σημασίας στα μαθηματικά είναι το *Σχήμα Εγκιβωτισμού* (Container Schema), το οποίο στην καθημερινή γνωσιακή λειτουργία εμφανίζεται ως το κεντρικό τμήμα του νοήματος λέξεων όπως *in* (εντός) και *out* (εκτός). Το Σχήμα Εγκιβωτισμού έχει τρία μέρη: ένα *Εσωτερικό*, ένα *Σύνορο*, κι ένα *Εξωτερικό*. Αυτή η δομή σχηματίζει μια μορφή (gestalt), υπό την έννοια ότι τα μέρη δεν έχουν κανένα νόημα χωρίς το όλο. Δεν υπάρχει Εσωτερικό δίχως Σύνορο και Εξωτερικό, ούτε Εξωτερικό δίχως Σύνορο και Εσωτερικό, ούτε Σύνορο δίχως πλευρές, σ' αυτή την περίπτωση Εσωτερικό και Εξωτερικό. Αυτή η δομή είναι τοπολογική, υπό την έννοια ότι το σύνορο μπορεί να μεγεθυνθεί, να σμικρυνθεί, ή να παραμορφωθεί και να εξακολουθήσει να αποτελεί το σύνορο σε κάποιο σχήμα Εγκιβωτισμού.

Τα σχήματα για τις έννοιες Εντός και Εκτός, έχουν μια κάπως διαφορετική δομή από το απλό Σχήμα Εγκιβωτισμού. Η έννοια Εντός απαιτεί τη *διαγραφή της κατατομής* του Εσωτερικού του Σχήματος Εγκιβωτισμού, δηλαδή, πρέπει να τονιστεί επί του Εξωτερικού και του Συνόρου. Επιπροσθέτως, υπάρχει επίσης μια διάκριση μεταξύ σχήματος και εδάφους (figure-ground). Λόγου χάρη, σε μια πρόταση όπως «Το αυτοκίνητο είναι στο γκαράζ», το γκαράζ είναι το έδαφος, δηλαδή, είναι το οροθέσιο σε σχέση με το οποίο το αυτοκίνητο, το σχήμα, τοποθετείται. Στη γνωσιακή γλωσσολογία το έδαφος σε ένα εικονο-σχήμα αποκαλείται *Οροθέσιο* (Landmark), και το σχήμα αποκαλείται *Τροχιακό* (Trajector). Οπότε, το Σχήμα Εντός έχει την ακόλουθη δομή:

- Σχήμα Εγκιβωτισμού, με Εσωτερικό, Σύνορο και Εξωτερικό
- Διαγραφή Κατατομής: του Εσωτερικού
- Οροθέσιο: το Εσωτερικό

Τα εικονο-σχήματα έχουν μια ειδική γνωσιακή λειτουργία: έχουν και αντιληπτική και εννοιολογική φύση. Ως τέτοια, παρέχουν μια γέφυρα μεταξύ της γλώσσας και του συλλογισμού από το ένα μέρος, και της όρασης από το άλλο. Τα εικονο-σχήματα μπορούν να προσαρμοστούν στην οπτική αντίληψη, όπως όταν βλέπουμε το γάλα *μέσα* στο ποτήρι. Μπορούν επίσης να επιβληθούν σε οπτικά σκηνικά, όπως όταν βλέπουμε τις μέλισσες να πετούν *μέσα* στον κήπο, όπου δεν υπάρχει κάποιο φυσικό κιβώτιο ή δοχείο μέσα στο οποίο βρίσκονται οι μέλισσες. Επειδή οι όροι χωρικών σχέσεων σε κάποια γλώσσα ονοματίζουν σύνθετα εικονο-σχήματα, τα εικονο- σχήματα αποτελούν το συνδετικό κρίκο μεταξύ της γλώσσας και της χωρικής αντίληψης.

Μπορούμε τώρα να αναλύσουμε πώς η συμπερασματική δομή των εικονο-σχημάτων (λόγου χάρη, του Σχήματος Εγκιβωτισμού) διατηρείται υπό τις μεταφορικές αντιστοιχίσεις για να παραγάγει περισσότερο αφηρημένες έννοιες (όπως η έννοια μιας κατηγορίας – κλάσης Boolean). Θα δούμε ακριβώς πώς τα εικονο-σχήματα παρέχουν τη συμπερασματική δομή στην περιοχή πηγής της εννοιολογικής μεταφοράς, η οποία μέσω της αντιστοίχισης προβάλλεται στην περιοχή στόχου της μεταφοράς για να παραγάγει τα συμπεράσματα κλάσης Boolean.

<u>Δομή των Εικονο-Σχημάτων και μεταφορικές προβολές</u>

Όταν σχεδιάζουμε παραδείγματα Σχημάτων Εγκιβωτισμού, διαπιστώνουμε ότι μοιάζουν μάλλον με διαγράμματα Venn για κατηγορίες-κλάσεις Boolean. Αυτό δεν είναι καθόλου τυχαίο. Ο λόγος είναι ότι οι κλάσεις κανονικά γίνονται αντιληπτές μέσω Σχημάτων Εγκιβωτισμού. Λόγου χάρη, σκεπτόμαστε (και μιλάμε) για στοιχεία ωσάν αυτά να βρίσκονται *εντός* ή *εκτός* μιας κλάσης. Τα Διαγράμματα Venn αποτελούν οπτικές αναπαραστάσεις Σχημάτων Εγκιβωτισμού. Ο λόγος για τον οποίο τα διαγράμματα Venn λειτουργούν ως συμβολισμοί κλάσεων είναι ότι οι κλάσεις γίνονται συνήθως μεταφορικά αντιληπτές ως κιβώτια-δοχεία – δηλαδή, ως φραγμένες περιοχές στο χώρο.

Τα Σχήματα Εγκιβωτισμού έχουν μια λογική που εμφανίζεται να ανακύπτει από τη δομή του οπτικού και απεικονιστικού μας συστήματος, προσαρμοσμένη για πιο γενική χρήση. Ειδικότερα, τα Σχήματα Εγκιβωτισμού φαίνονται να κατανοούνται νευρικά με τη χρήση τέτοιων εγκεφαλικών μηχανισμών όπως οι τοπογραφικοί χάρτες του οπτικού πεδίου, κοκ (Regier, 1996). Η συμπερασματική δομή αυτών των σχημάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για τη δόμηση του χώρου όσο και για πιο αφηρημένη λογική, και προβάλλεται στο εννοιολογικό μας σύστημα της καθημερινότητας μέσω μιας συγκεκριμένης εννοιολογικής μεταφοράς, της μεταφοράς Οι Κατηγορίες (ή 'Κλάσεις') Είναι Κιβώτια. Αυτό ερμηνεύει μέρος (αλλά κατ' ουδένα τρόπο το σύνολο!!) του συλλογισμού μας για τις εννοιολογικές κατηγορίες. Η λογική Boolean πηγάζει επίσης από τη δυνατότητά μας να αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο μέσω των σχημάτων εγκιβωτισμού και να σχηματίζουμε νοερές εικόνες με τη χρήση τους.

Οπότε, πώς αντιλαμβανόμαστε φυσιολογικά τη διαισθητική προ-μαθηματική έννοια των κλάσεων; Η απάντηση είναι μέσω των Σχημάτων Εγκιβωτισμού. Με άλλα λόγια, φυσιολογικά αντιλαμβανόμαστε μια κλάση οντοτήτων μέσω μιας φραγμένης περιοχής του χώρου, με τα στοιχεία της κλάσης να βρίσκονται όλα *εντός* της φραγμένης περιοχής και τα μη στοιχεία *εκτός* της φραγμένης περιοχής. Από γνωσιακή άποψη, οι διαισθητικές κλάσεις είναι, επομένως, μεταφορικά εννοιολογικά κιβώτια-δοχεία, που χαρακτηρίζονται γνωσιακά από μια μεταφορική αντιστοίχιση – μια θεμελιωτική μεταφορά – τη μεταφορά Οι Κλάσεις Είναι Κιβώτια. Η ακόλουθη αντιστοίχιση είναι η αντιστοίχιση μια τέτοιας εννοιολογικής μεταφοράς.

Οι Κλάσεις Είναι Κιβώτια

Περιοχή Πηγής Σχήματα Εγκιβωτισμού		Περιοχή Στόχου Κλάσεις
Εσωτερικά των Σχημάτων Εγκιβωτισμού	→	Κλάσεις
Αντικείμενα στα Εσωτερικά	→	Τα Στοιχεία των Κλάσεων
Η ιδιότητα ενός Αντικειμένου να βρίσκεται σε κάποιο Εσωτερικό	→	Η Σχέση του Στοιχείου
Ένα Εσωτερικό ενός Σχήματος Εγκιβωτισμού μέσα σε ένα Μεγαλύτερο	→	Μια υπο-κλάση μιας Μεγαλύτερης Κλάσης
Η Αλληλεπικάλυψη των εσωτερικών Δύο Σχημάτων Εγκιβωτισμού	→	Η Τομή Δύο Κλάσεων
Το Άθροισμα των Εσωτερικών Δύο Σχημάτων Εγκιβωτισμού	→	Η Ένωση Δύο Κλάσεων
Το Εξωτερικό ενός Σχήματος Εγκιβωτισμού	→	Το Συμπλήρωμα μιας Κλάσης

Αυτή είναι η φυσική μας, καθημερινή ασυνείδητη εννοιολογική μεταφορά για το τι είναι μια κλάση. Τούτη είναι μια θεμελιωτική μεταφορά. Θεμελιώνει την έννοιά μας για μια κλάση στην έννοιά μας για μια φραγμένη περιοχή του χώρου, μέσω του εννοιολογικού μηχανισμού του εικονικού σχήματος για το περιεχόμενο. Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τις κλάσεις στην καθημερινή ζωή.

Μπορούμε τώρα να αναλύσουμε πώς τα εννοιολογικά εικονο-σχήματα (στην περίπτωση αυτή τα Σχήματα Εγκιβωτισμού) αποτελούν την πηγή τεσσάρων συμπερασματικών νόμων της λογικής. Οι δομικοί περιορισμοί στα Σχήματα Εγκιβωτισμού οι οποίοι αναφέρθηκαν νωρίτερα (δηλαδή, οι εγκεφαλικοί μηχανισμοί όπως οι τοπογραφικοί χάρτες του οπτικού πεδίου, τα center surround receptive fields, gating circuitry, κοκ) τους δίνουν μια συμπερασματική δομή, την οποία ο Lakoff κι εγώ ονομάσαμε «Νόμους των Σχημάτων Εγκιβωτισμού» (Lakoff & Núñez, 2000). Αυτοί οι λεγόμενοι «νόμοι» έχουν εννοιολογική φύση και αποτελούν κατοπτρισμούς στο γνωσιακό επίπεδο εγκεφαλικών δομών στο νευρικό επίπεδο (βλ. Σχ. 1). Οι τέσσερις συμπερασματικοί νόμοι αποτελούν εκδοχές, μέσω Σχημάτων Εγκιβωτισμού, των κλασικών νόμων της λογικής: *Αποκλεισμός του Μέσου, Modus Ponens, Υποθετικός συλλογισμός,* και *Modus Tollens*. Ας δούμε τις λεπτομέρειες.

Συμπερασματικοί Νόμοι των Ενσώματων Σχημάτων Εγκιβωτισμού:

- *Νόμος Αποκλείσεως Τρίτου*: Κάθε αντικείμενο Χ είτε βρίσκεται *εντός* του Σχήματος Εγκιβωτισμού Α ή *εκτός* του Σχήματος Εγκιβωτισμού Α.
- *Νόμος Απόσπασης - Modus Ponens*: Δοθέντων δύο Σχημάτων Εγκιβωτισμού Α και Β και ενός αντικειμένου Χ, αν το Α βρίσκεται *εντός* του Β και το Χ βρίσκεται *εντός* του Α, τότε το Χ βρίσκεται *εντός* του Β.
- *Νόμος Υποθετικού Συλλογισμού (ή Μετάβασης Συνεπαγωγής)*: Δοθέντων τριών Σχημάτων Εγκιβωτισμού Α, Β και C, αν το Α βρίσκεται *εντός* του Β και το Β βρίσκεται *εντός* του C, τότε το Α βρίσκεται *εντός* του C.
- *Νόμος Συλλογισμού Αρνητικής Μορφής - Modus Tollens*: Δοθέντων δύο Σχημάτων Εγκιβωτισμού Α και Β και ενός αντικειμένου Υ, αν το Α βρίσκεται *εντός* του Β και το Υ βρίσκεται *εκτός* του Β, τότε το Υ βρίσκεται *εκτός* του Α.

Σχήμα 1. Οι «νόμοι» των γνωσιακών Σχημάτων Εγκιβωτισμού. Το σχήμα παρουσιάζει ένα γνωσιακό Σχήμα Εγκιβωτισμού, Α, που εμφανίζεται μέσα σε ένα άλλο, Β. Με την παρατήρηση, μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι αν το Χ βρίσκεται εντός του Α, τότε το Χ βρίσκεται εντός του Β, και αν το Υ βρίσκεται εκτός του Β, τότε το Υ βρίσκεται εκτός του Α. Αντιλαμβανόμαστε τα φυσικά κιβώτια (δοχεία) σε σχέση με τα γνωσιακά κιβώτια (δοχεία). Τα γνωσιακά Σχήματα Εγκιβωτισμού δε χρησιμοποιούνται μόνο στην νόηση και τη φαντασία αλλά και στην αντίληψη, όπως, λόγου χάρη, όταν αντιλαμβανόμαστε τις μέλισσες ωσάν να πετούν *εντός* του κήπου. Τα Σχήματα Εγκιβωτισμού είναι οι γνωσιακές δομές που μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε τα γνωστά μας διαγράμματα Venn.

Τώρα, θυμηθείτε ότι οι εννοιολογικές μεταφορές επιτρέπουν στη συμπερασματική δομή της περιοχής πηγής να χρησιμοποιηθεί για τη δόμηση της περιοχής στόχου. Οπότε, η Μεταφορά Οι Κλάσεις Είναι Κιβώτια αντιστοιχίζει τους συμπερασματικούς νόμους που δόθηκαν παραπάνω για τα ενσώματα Σχήματα Εγκιβωτισμού (περιοχή πηγής) στις εννοιολογικές κλάσεις (περιοχή στόχου). Σ' αυτές περιλαμβάνονται τόσο οι κλάσεις της καθημερινότητας όσο και οι κλάσεις Boolean, που αποτελούν μεταφορικές επεκτάσεις των κλάσεων της καθημερινότητας. Οι συνέπειες μιας τέτοιας εννοιολογικής αντιστοίχισης είναι οι εξής:

Συμπερασματικοί Νόμοι για Κλάσεις Αντιστοιχιζόμενοι από τα Ενσώματα Σχήματα Εγκιβωτισμού

- *Νόμος Αποκλείσεως Τρίτου*: Κάθε στοιχείο Χ είτε *είναι στοιχείο της* κλάσης Α ή *δεν είναι στοιχείο της* κλάσης Α.
- *Νόμος Απόσπασης - Modus Ponens*: Δοθέντων δύο κλάσεων Α και Β και ενός στοιχείου Χ, αν η Α είναι μια *υποκλάση* της Β και το Χ *είναι στοιχείο της* κλάσης Α, τότε το Χ *είναι στοιχείο της* κλάσης Β.
- *Νόμος Υποθετικού Συλλογισμού (ή Μετάβασης Συνεπαγωγής)*: Δοθέντων τριών κλάσεων Α, Β και C, αν η Α είναι *υποκλάση* της Β και η Β *υποκλάση* της C, τότε η Α είναι *υποκλάση* της C.
- *Νόμος Συλλογισμού Αρνητικής Μορφής - Modus Tollens*: Δοθέντων δύο κλάσεων Α και Β και ενός στοιχείου Υ, αν η Α είναι υποκλάση της Β και το Υ *δεν είναι στοιχείο της* κλάσης Β, τότε το Υ *δεν είναι στοιχείο της* κλάσης Α.

Το δίδαγμα, επομένως, είναι ότι αυτοί οι παραδοσιακοί νόμοι της λογικής είναι στην ουσία γνωσιακές οντότητες και, ως τέτοιες, είναι θεμελιωμένες στις νευρικές δομές που χαρακτηρίζουν τα Σχήματα Εγκιβωτισμού. Με άλλα λόγια, αυτοί οι νόμοι αποτελούν μέρος των σωμάτων μας. Αφού δεν υπερβαίνουν τα σώματά μας, δεν είναι νόμοι κάποιας υπερβατικής λογικής. Συνεπώς, οι αλήθειες αυτών των παραδοσιακών νόμων της λογικής δεν είναι δογματικές. Είναι αληθείς δυνάμει του τι σημαίνουν.

Μ' αυτό ολοκληρώνεται η σύντομη και γενική επισκόπηση κάποιων κρίσιμων εννοιών της γνωσιακής γλωσσολογίας. Ας δούμε τώρα πώς αυτό το υπόβαθρο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών σε κάποιες συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές, τη θεωρία Συνόλων και τη θεωρία Υπερ-συνόλων (Hypersets).

ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΟΛΑ ΤΑ ΥΠΕΡ-ΣΥΝΟΛΑ;
ΜΙΑ ΑΠΟΨΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΔΕΩΝ

Θεωρήστε το εξής ερώτημα των σύγχρονων μαθηματικών: Είναι σύνολα τα υπερ-σύνολα; Αν όχι, τότε τι είναι; Θα δούμε τώρα τι μπορεί να πει η ενσώματη γνωσιακή επιστήμη σχετικά με αυτό. Αφού τα υπερ-σύνολα και τα σύνολα είναι ανθρώπινες (τεχνικές, μαθηματικές) ιδέες μπορούμε να δώσουμε μια απάντηση μέσω της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών. Ιδού τι μπορούμε να πούμε

Σύνολα

Από την τυπική σκοπιά της αξιωματικής μεθόδου, ένα «σύνολο» είναι οποιαδήποτε μαθηματική δομή «ικανοποιεί» τα αξιώματα της συνολοθεωρίας όπως γράφονται με σύμβολα. Τα παραδοσιακά αξιώματα της συνολοθεωρίας (τα αξιώματα Zermelo-Fraenkel) διδάσκονται συχνά ωσάν να πρόκειται για σύνολα που γίνονται αντιληπτά ως κιβώτια. Πολλοί συγγραφείς μιλούν για τα σύνολα ωσάν αυτά να «περιέχουν» τα στοιχεία τους, και οι περισσότεροι μαθητές τα θεωρούν κατά τον τρόπο αυτό. Ακόμη και η επιλογή της λέξης «στοιχείο» υποδηλώνει μια τέτοια ερμηνεία, όπως και τα διαγράμματα Venn που χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή του θέματος. Αλλά αν μελετήσετε προσεκτικά αυτά τα αξιώματα δε θα βρείτε σ' αυτά τίποτε που να χαρακτηρίζει ένα κιβώτιο. Οι όροι «σύνολο» και «στοιχείο» λαμβάνονται ως μη ορισμένα πρωτογενή. Στα τυπικά μαθηματικά τούτο σημαίνει ότι μπορούν να είναι οτιδήποτε ταιριάζει με τα αξιώματα. Ιδού τα κλασικά αξιώματα Zermelo-Fraenkel, συμπεριλαμβανομένου του αξιώματος επιλογής, τα οποία κατά κοινό τρόπο αποκαλούνται αξιώματα ZFC.

- Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια στοιχεία. Με άλλα λόγια, ένα σύνολο ορίζεται μονοσήμαντα από τα στοιχεία του.
- Δοθέντος ενός συνόλου A και ενός μονοθέσιου κατηγορήματος, P(x) το οποίο είναι είτε αληθές ή ψευδές για κάθε στοιχείο του A, υπάρχει ένα υποσύνολο του A τα στοιχεία του οποίου είναι ακριβώς εκείνα τα στοιχεία του A για τα οποία το P(x) αληθεύει.
- Για κάθε δύο σύνολα, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου είναι και τα δύο στοιχεία.
- Για κάθε συλλογή συνόλων, υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα στοιχεία των συνόλων αυτής της συλλογής.
- *Δυνατότητα σχηματισμού υποσυνόλων.* Για κάθε σύνολο A υπάρχει ένα σύνολο P(A) του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα υποσύνολα του συνόλου A.
- Υπάρχει ένα σύνολο A τέτοιο ώστε (1) το κενό σύνολο είναι στοιχείο του A, και (2) αν x είναι ένα στοιχείο του A, τότε ο επόμενος του x είναι στοιχείο του A.
- *Το αξίωμα επιλογής: Δοθέντος ενός μη κενού συνόλου S του οποίου τα στοιχεία είναι μη κενά σύνολα, υπάρχει ένα σύνολο C το οποίο έχει ως στοιχεία του ένα και μόνο ένα στοιχείο από κάθε στοιχείο του S.*

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι σ' αυτά τα αξιώματα δεν υπάρχει απολύτως τίποτε που να απαιτεί ρητά τα σύνολα να είναι κιβώτια. Εκείνο που κάνουν τα εν λόγω αξιώματα, συλλογικά, είναι να *δημιουργούν* οντότητες που ονομάζονται «σύνολα», αρχικά από στοιχεία και κατόπιν από σύνολα που έχουν δημιουργηθεί προηγουμένως. Τα αξιώματα δε λένε ρητά το πώς πρέπει να γίνουν αντιληπτά τα σύνολα.

Το θέμα εδώ είναι ότι, εντός των τυπικών μαθηματικών, όπου όλες οι μαθηματικές έννοιες αντιστοιχίζονται σε συνολοθεωρητικές δομές, τα «σύνολα» που χρησιμοποιούνται στις δομές αυτές δεν γίνονται τεχνικώς αντιληπτά ως τα Σχήματα Εγκιβωτισμού που περιγράψαμε παραπάνω. Δεν έχουν καθόλου δομή σχήματος εγκιβωτισμού με ένα εσωτερικό, ένα σύνορο και ένα εξωτερικό. Μάλιστα, εντός των τυπικών μαθηματικών, δεν υπάρχουν καθόλου έννοιες, και συνεπώς τα σύνολα δε γίνονται αντιληπτά ως κάτι συγκεκριμένο. Είναι μη ορισμένες οντότητες των οποίων οι μόνοι περιορισμοί είναι ότι πρέπει να «ταιριάζουν» στα αξιώματα. Για τους ειδικούς της τυπικής λογικής και της θεωρίας μοντέλων, τα σύνολα είναι εκείνες οι οντότητες που ταιριάζουν στα αξιώματα και χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση άλλων κλάδων των μαθηματικών.

Φυσικά, οι περισσότεροι από μας αντιλαμβανόμαστε τα σύνολα μέσω των Σχημάτων Εγκιβωτισμού, και τούτο είναι απόλυτα συνεπές με τα αξιώματα που δόθηκαν παραπάνω. Παρά ταύτα, όταν αντιλαμβανόμαστε τα σύνολα ως Σχήματα Εγκιβωτισμού, μια συγκεκριμένη συνέπεια έπεται αυτομάτως: *Τα σύνολα δε μπορούν να είναι στοιχεία των εαυτών τους*, αφού τα κιβώτια δε μπορεί να βρίσκονται μέσα στον εαυτό τους. Αλλά μιλώντας αυστηρά, αυτή η συνέπεια δεν έπεται από τα ίδια τα αξιώματα, αλλά μάλλον από τη μεταφορική μας κατανόηση των συνόλων μέσω των κιβωτίων. Τα παραπάνω αξιώματα δεν αποκλείουν τα σύνολα που αυτοπεριέχονται. Μάλιστα, ένα ακόμη αξίωμα προτάθηκε από τον Von Neumann για το αποκλεισμό αυτής της περίπτωσης:

> *Το Αξίωμα Θεμελίωσης (Foundation)*: Δεν υπάρχουν άπειρες φθίνουσες ακολουθίες συνόλων υπό τη σχέση του περιέχεσθαι. Δηλαδή, η περίπτωση $S_{i+1} \in S_i \in \ldots \in S$ αποκλείεται.

Εφόσον το να επιτραπεί σε σύνολα να είναι στοιχεία των εαυτών τους θα κατέληγε σε μια τέτοια ακολουθία, αυτό το αξίωμα έχει την έμμεση επίδραση του αποκλεισμού της περίπτωσης ενός συνόλου που αυτοπεριέχεται.

<u>Υπερ-σύνολα</u> (Hypersets)

Τεχνικά εντός των τυπικών μαθηματικών, η θεωρία μοντέλων δεν έχει καμιά σχέση με την κατανόηση της καθημερινότητας. Οι μοντελο-θεωρητικοί δεν εξαρτώνται από τη συνήθη βασιζόμενη στα κιβώτια έννοιά μας ενός συνόλου. Μάλιστα, ορισμένοι μοντελο-θεωρητικοί έχουν διαπιστώσει ότι η συνήθης μας θεμελιωτική μεταφορά Οι Κλάσεις Είναι Σχήματα Εγκιβωτισμού γίνεται εμπόδιο στη μοντελοποίηση κάποιων ειδών φαινομένων που θέλουν να μοντελοποιήσουν, ειδικότερα των επαναληπτικών φαινομένων. Λόγου χάρη, θεωρήστε εκφράσεις όπως η:

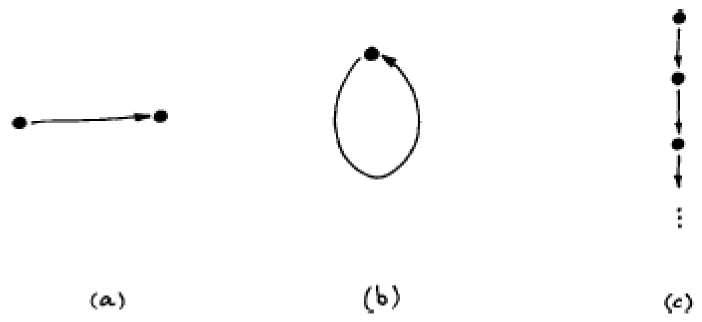
$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}$$

Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο παρονομαστής του κυρίως κλάσματος έχει την τιμή που ορίζεται για το ίδιο το x. Με άλλες λέξεις, η παραπάνω έκφραση είναι ισοδύναμη με την

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Τέτοιες επαναληπτικές εκφράσεις είναι συνηθισμένες στα μαθηματικά και την επιστήμη των Η/Υ. Οι περιπτώσεις μοντελοποίησης τέτοιων εκφράσεων με χρήση «συνόλων» αποκλείονται αν το μοναδικό είδος «συνόλων» που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση πρέπει να είναι εκείνα που δε μπορούν να έχουν τους εαυτούς τους ως στοιχεία. Οι ειδικοί της θεωρίας συνόλων έχουν αντιληφθεί ότι χρειάζεται μια νέα μεταφορά χωρίς κιβώτια για τη θεώρηση των συνόλων, και έχουν με σαφή τρόπο κατασκευάσει μία (βλ. Barwise και Moss, 1991).

Η κεντρική ιδέα έγκειται στη χρήση γραφημάτων, όχι κιβωτίων, για το χαρακτηρισμό των συνόλων. Τα είδη των γραφημάτων που χρησιμοποιούνται είναι τα Accessible Pointed Graphs (Προσβάσιμα Κατευθυνόμενα Γραφήματα), ή APGs. Το «Pointed» (κατευθυνόμενα) υποδεικνύει μια ασυμμετρική σχέση μεταξύ των κόμβων στο γράφημα, η οποία υποδεικνύεται οπτικά από ένα βέλος που κατευθύνεται από τον ένα κόμβο στον άλλο – ή από ένα κόμβο προς τον ίδιο τον κόμβο (βλ. Σχήμα 2). Το «Accessible» (προσβάσιμα) υποδεικνύει ότι υπάρχει μοναδικός κόμβος ο οποίο συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους του γραφήματος, και επομένως μπορεί να είναι «προσβάσιμος» από κάθε άλλο κόμβο.



Σχήμα 2

Από την αξιωματική σκοπιά, έχουν αντικαταστήσει το Αξίωμα της Θεμελίωσης με ένα άλλο αξίωμα που συνεπάγεται την άρνησή του, το «Αξίωμα Αντι-Θεμελίωσης» (Anti-Foundation). Από τη σκοπιά της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών έχουν χρησιμοποιήσει σιωπηρά μια εννοιολογική μεταφορά, μια συνδετική μεταφορά της οποία η αντιστοίχιση είναι η εξής:

Η Μεταφορά «Τα Σύνολα Είναι Γραφήματα»

Περιοχή Πηγής Accessible Pointed Graphs		Περιοχή Στόχου Σύνολα
Ένα APG	→	Η Δομή της σχέσης «Ανήκει» για ένα Σύνολο
Ένα Βέλος	→	Η Σχέση «Ανήκει»
Κόμβοι Που Είναι Ουρές Βελών	→	Σύνολα
Επισημάνσεις Κόμβων Που Είναι Αιχμές Βελών	→	Στοιχεία
APGs Χωρίς Βρόχους	→	Κλασικά Σύνολα Με το Αξίωμα Θεμελίωσης
APGs Με ή Χωρίς Βρόχους	→	Υπερσύνολα Με το Αξίωμα Αντι-Θεμελίωσης

Το αποτέλεσμα αυτής της μεταφοράς είναι η εξάλειψη της έννοιας του περιέχεσθαι από την έννοια ενός «συνόλου». Τα γραφήματα δεν έχουν καμιά έννοια του περιέχεσθαι ενσωματωμένη σ’ αυτά. Και η σχέση του περιέχεσθαι δε μοντελοποιείται από τα γραφήματα.

Τα γραφήματα που δεν έχουν βρόχους ικανοποιούν τα αξιώματα ZFC και το Αξίωμα της Θεμελίωσης. Επομένως λειτουργούν ακριβώς σαν σύνολα που γίνονται αντιληπτά ως κιβώτια. Αλλά τα γραφήματα που έχουν βρόχους μοντελοποιούν τα σύνολα που μπορούν να «έχουν τους εαυτούς τους ως στοιχεία». Δε λειτουργούν ως σύνολα που γίνονται αντιληπτά ως κιβώτια, και δεν ικανοποιούν το Αξίωμα της Θεμελίωσης.

Ένα «υπερσύνολο» είναι ένα APG το οποίο μπορεί να περιέχει ή αν μην περιέχει βρόχους. Συνεπώς τα υπερ-σύνολα δεν ταιριάζουν με το Αξίωμα της Θεμελίωσης, αλλά μάλλον με ένα άλλο αξίωμα με τον αντίθετο στόχο:

- *Το Αξίωμα Αντι-Θεμελίωσης (Anti-Foundation)*: Κάθε APG απεικονίζει ένα μοναδικό σύνολο.

Το γεγονός ότι τα υπερ-σύνολα ικανοποιούν τα αξιώματα Zermelo-Fraenkel επιβεβαιώνει τα όσα είπαμε παραπάνω: *Τα αξιώματα Zermelo-Fraenkel για τη θεωρία συνόλων – εκείνα που είναι εν γένει αποδεκτά στα μαθηματικά – δεν ορίζουν καθόλου την συνήθη μας έννοια ενός συνόλου ως κιβωτίου!* Δηλαδή, τα αξιώματα της «θεωρίας συνόλων» δεν αφορούν, και ουδέποτε αφορούσαν, αυτά που συνήθως αποκαλούμε «σύνολα», τα οποία αντιλαμβανόμαστε μέσω των Σχημάτων Εγκιβωτισμού.

Τι είναι λοιπόν τα σύνολα, εν τέλει;

Εδώ διαπιστώνουμε την ισχύ της εννοιολογικής μεταφοράς στα μαθηματικά. Τα σύνολα, που γίνονται αντιληπτά στην καθημερινότητα μέσω κιβωτίων, δεν έχουν τις σωστές ιδιότητες για να μοντελοποιήσουν όλα όσα χρειάζεται. Οπότε μπορούμε τώρα να αντιληφθούμε μεταφορικά εκ νέου τα «σύνολα» ώστε να αποκλείσουμε το περιέχεσθαι χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα είδη γραφημάτων. Το μόνο στοιχείο που προκαλεί σύγχυση είναι ότι η εν λόγω ειδική περίπτωση της θεωρίας γραφημάτων εξακολουθεί να αποκαλείται «θεωρία συνόλων» για ιστορικούς λόγους.

Εξαιτίας αυτής της παραπλανητικής ορολογίας, κάποιες φορές λέγεται ότι η θεωρία των υπερ-συνόλων είναι μια «θεωρία συνόλων στην οποία τα σύνολα μπορούν να αυτοπεριέχονται». Από γνωσιακή άποψη τούτο είναι εντελώς παραπλανητικό διότι δεν πρόκειται για μια θεωρία «συνόλων» όπως τα κατανοούμε συνήθως μέσω του περιέχεσθαι. Ο λόγος για τον οποίο αυτά τα αντικείμενα της θεωρίας γραφημάτων αποκαλούνται «σύνολα» είναι λειτουργικός: διαδραματίζουν το ρόλο που διαδραμάτιζαν τα κλασικά σύνολα με το Αξίωμα Θεμελίωσης στα αξιώματα μοντελοποίησης.

Το δίδαγμα είναι ότι τα μαθηματικά έχουν (τουλάχιστον) δύο πολύ αντιφατικές μεταφορικές αντιλήψεις των συνόλων, μία μέσω των Σχημάτων Εγκιβωτισμού (μια θεμελιωτική μεταφορά) και μια μέσω γραφημάτων (μια συνδετική μεταφορά). Είναι κάποια από τις δύο αυτές αντιλήψεις ορθή και κάποια εσφαλμένη; Υπάρχει μια σκοπιά από την οποία κάποιος θα μπορούσε να νομίσει κάτι τέτοιο, μια σκοπιά που λέει ότι πρέπει να υπάρχει μόνο μια κυριολεκτικά ορθή έννοια για το «σύνολο». Αλλά από τη σκοπιά της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών αυτές οι δύο διακεκριμένες έννοιες του «συνόλου» ορίζουν διαφορετικά και αμοιβαίως αντιφατικά θεματικά αντικείμενα, που γίνονται αντιληπτά μέσω ριζικά διαφορετικών εννοιολογικών μεταφορών. Η κατάσταση είναι πολύ περισσότερο συνηθισμένη στα μαθηματικά από ό,τι αντιλαμβάνεται εν γένει το κοινό κατά κανόνα. Η Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών είναι εκείνη που μας βοηθά να αντιληφθούμε και να αναλύσουμε αυτές τις περιπτώσεις, καθιστώντας σαφές ό,τι είναι γνωσιακά ασαφές.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ: ΚΑΠΟΙΕΣ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΙΔΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θα ήθελα να κλείσω την παρουσίασή μου κάνοντας κάποιες γενικές παρατηρήσεις για τις πιθανές συνέπειες της Ανάλυσης Μαθηματικών Ιδεών για τη διδακτική των μαθηματικών εν γένει, και ειδικότερα για την ψυχολογία της διδακτικής των μαθηματικών. Ο παρών κατάλογος δεν είναι επ' ουδενί εξαντλητικός. Είναι απλώς ένας ανοικτός κατάλογος που πρέπει να εκληφθεί ως μια πρόταση για συζήτηση κατά τη διάρκεια των ποικίλων συνεδριάσεων της συνάντησης του PME-2000.

Εν συντομία, θα μπορούσα να πω ότι η βαθύτερη συνέπεια που παρέχει η Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών, είναι το είδος της φιλοσοφίας των μαθηματικών και της διδακτικής των μαθηματικών που το προβάλλει. Η προσέγγιση που παρουσιάζεται εδώ δίνει ένα πορτραίτο των μαθηματικών που είναι θεμελιωδώς ανθρώπινο. Οι έννοιες και οι ιδέες είναι ανθρώπινες, και οι αλήθειες που εξάγονται από αυτές είναι σχετικές με τα ανθρώπινα εννοιολογικά συστήματα. Αυτό περιλαμβάνει και τα μαθηματικά. Έπεται από αυτή τη σκοπιά ότι η διδασκαλία των μαθηματικών συνεπάγεται τη διδασκαλία ανθρώπινου νοήματος, και τη διδασκαλία του γιατί τα θεωρήματα είναι αληθή δυνάμει του τι πραγματικά σημαίνουν τα στοιχεία που εμπλέκονται. Από τούτη τη σκοπιά μπορούν να αναφερθούν τουλάχιστον οι εξής συνέπειες:

- Η διδακτική των μαθηματικών πρέπει να απομυθοποιήσει την αλήθεια, την απόδειξη, τους ορισμούς και τους φορμαλισμούς. Αν και είναι σχετικά, θα πρέπει να διδάσκονται στο πλαίσιο των υποκείμενων ανθρώπινων ιδεών. Επομένως ερωτήματα όπως εκείνα της πρώτης παραγράφου αυτού του άρθρου θα πρέπει να ληφθούν πολύ σοβαρά υπόψη στη διδακτική διαδικασία.
- Η διδακτική των μαθηματικών θα πρέπει επίσης να απομυθοποιήσει την πεποίθηση ότι το νόημα, η διαίσθηση και οι ιδέες είναι ασαφή και (καθαρώς) υποκειμενικά. Οι ανθρώπινες ιδέες και το νόημα έχουν ένα εντυπωσιακό πλήθος σωματικά θεμελιωμένων περιορισμών που τα καθιστούν μη-αυθαίρετα.
- Τα μαθηματικά θα πρέπει να διδάσκονται ως ανθρώπινο εγχείρημα, με τις πολιτισμικές και ιστορικές του διαστάσεις (οι οποίες δεν πρέπει να αποτελούν μια παρουσίαση ημερομηνιών και μια χρονολογική λίστα γεγονότων). Αυτές οι ανθρώπινες διαστάσεις θα πρέπει να περιλαμβάνουν εκείνες τις στιγμές των αμφιβολιών, των δισταγμών, των θριάμβων και των διαισθήσεων που σχηματοποίησαν την ιστορική διαδικασία της απόδοσης νοήματος.
- Οι νέες γενιές καθηγητών των μαθηματικών θα πρέπει όχι μόνο να έχουν ένα καλό γνωστικό υπόβαθρο στη διδακτική, την ιστορία και τη φιλοσοφία, αλλά και κάποιες γνώσεις γνωσιακής επιστήμης, ειδικότερα της εμπειρικής μελέτης των εννοιολογικών δομών και των καθημερινών ασυνείδητων συμπερασματικών μηχανισμών. Θα πρέπει να γνωρίζουν ποια είναι η σιωπηρή εννοιολογική δομή των ιδεών που πρέπει να διδάξουν.
- Οι αποκαλούμενες «παρανοήσεις» δεν είναι πραγματικά παρανοήσεις. Αυτός ο όρος συνεπάγεται ότι υπάρχει μια «λανθασμένη» αντίληψη, λανθασμένη σε σχέση με κάποια «αλήθεια». Αλλά η Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών δείχνει ότι δεν υπάρχουν καθαυτές λανθασμένες αντιλήψεις, αλλά μάλλον παραλλαγές ιδεών και εννοιολογικών συστημάτων με διαφορετικές συμπερασματικές δομές (κάποτε ακόμη και αντιφατικές μεταξύ τους, όπως είδαμε για την περίπτωση των συνόλων και των υπερσυνόλων).

- Από παιδαγωγική άποψη, επομένως, θα ήταν πολύ σημαντικό να αναγνωρίσουμε ποιες ακριβώς είναι οι παραλλαγές της συμπερασματικής δομής που παράγουν τις αποκαλούμενες παρανοήσεις. Καθιστώντας τούτο σαφές, θα πρέπει να ακολουθήσει μια παιδαγωγική μεσολάβηση για να παρακινήσει τους μαθητές να λειτουργήσουν με τις κατάλληλες εννοιολογικές αντιστοιχίσεις που προβάλλουν τη συμπερασματική δομή που απαιτείται από την εξεταζόμενη μαθηματική ιδέα.
- Όταν εφαρμοστεί κατάλληλα, η Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών μπορεί να εξυπηρετήσει ως εργαλείο για να βοηθηθούν οι άνθρωποι (κυρίως οι έφηβοι και οι ενήλικες) να συνειδητοποιήσουν την οργάνωση, τους περιορισμούς και τις δυνατότητες των δικών τους εννοιολογικών συστημάτων, καθιστώντας σαφές (και συνειδητό) ό,τι στην καθημερινή ζωή είναι ασαφές.
- Τα να «είναι» κάποιος «καλός στα μαθηματικά» δε σημαίνει απαραίτητα να είναι καλός στο να εκτελεί υπολογισμούς ή να εφαρμόζει αλγορίθμους. Σημαίνει να γνωρίζει πώς να χρησιμοποιεί σωστά τις μεταφορές του, πότε να λειτουργεί με τις κατάλληλες μεταφορές, πότε να μετατοπίζεται από τη μια στην άλλη, πότε να τις συνδυάζει, κοκ. Η διδασκαλία του πλήρους ελέγχου αυτής της εννοιολογικής γυμναστικής θα πρέπει να είναι στόχος της διδακτικής των μαθηματικών.
- Πέρα από το καθαυτό μαθηματικό περιεχόμενο, η εμπειρική μελέτη των εννοιολογικών συστημάτων μπορεί επίσης να δώσει σημαντικές ενοράσεις στις συμπεριφορές και τις πεποιθήσεις που έχουν οι μαθητές ως προς τα μαθηματικά. Η λεπτομερειακή μελέτη των εννοιολογικών δομών των μαθητών οι οποίες αποτελούν τη βάση των γλωσσικών τους εκφράσεων μπορούν να αποκαλύψουν την πηγή των δυσκολιών, της έλλειψης κινήτρου, του άγχους κοκ., που μπορούν να εμπλέκονται στη μάθηση των μαθηματικών.

Όπως μπορείτε να διαπιστώσετε, τούτη η αναφορά πόρρω απέχει από το να είναι ένας εξαντλητικός κατάλογος. Πιστεύω ότι η γνωσιακή επιστήμη των μαθηματικών, και ειδικότερα η Ανάλυση Μαθηματικών Ιδεών, παρέχει ένα πλούσιο και εμβριθές εργαλείο, με στερεό θεωρητικό υπόβαθρο, για την επαναφορά του ανθρώπινου νοήματος στα μαθηματικά. Η πρόσκληση κατόπιν επεκτείνεται για την εξερεύνηση του πώς αυτό μπορεί να επιτευχθεί στη διαδικασία της διδασκαλίας αυτής της εκπληκτικής εννοιολογικής δομής που αποκαλείται μαθηματικά.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Barwise, J., & L. Moss (1991). Hypersets. *The Mathematical Intelligencer,* 13 (4): 31-41.

Butterworth, B. (1999). *What Counts : How Every Brain is Hardwired for Math.* New York: Free Press.

Dauben, J. W. (1979). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton:Princeton University Press.

Dedekind, R. (1888/1976). Was sind und was sollen die Zahlen. In P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques.* Paris: J. Vrin.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Fauconnier, G. (1997). *Mappings in Thought and Language.* New York: Cambridge University Press.

Fauconnier, G., & M. Turner (1998). Conceptual integration networks. *Cognitive Science,* 22 (2): 133-187.

Freeman, W. J., & R. Nunez (1999). Restoring to cognition the forgotten primacy of action, intention, and emotion. In R. Nunez & W. J. Freeman (eds.), *Reclaiming Cognition: The Primacy of Action, Intention, and Emotion.* Thorverton, UK: Imprint Academic.

Gibbs, R. (1994). *The Poetics of Mind: Figurative Thought Language, and Understanding.* New York: Cambridge University Press.

Johnson, C. (1997). Metaphor vs. conflation in the acquisition of polysemy: The case of SEE. In M. K. Hiraga, C. Sinha, & S. Wilcox, (eds.), *Cultural, Typological and Psychological Issues in Cognitive Linguistics.* Current Issues in Linguistic Theory. Amsterdam: John Benjamins.

Johnson, M. (1987). *The Body in the Mind: The Bodily Basis of Meaning, Imagination, and Reason.*Chicago: University of Chicago Press.

Kitcher, P. (1976). Hubert's epistemology. *Philosophy of Science,* 43: 99-115.

Lakoff, G. (1987). *Women, Fire, and Dangerous Things: What Categories Reveal about the Mind.*Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G. (1993). The contemporary theory of metaphor. In A. Ortony (ed.), *Metaphor and Thought* 2nd ed. New York: Cambridge University Press.

Lakoff, G., & M. Johnson (1980). *Metaphors We Live By.* Chicago: University of Chicago Press.

Lakoff, G., & M. Johnson (1999). *Philosophy in the Flesh.* New York: Basic Books.

Lakoff, G., & R. Núñez (1997). The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In L. English (ed.) *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lakoff, G., & R. Núñez (1998). Conceptual metaphor in mathematics. In J. P. Koenig (ed.), *Discourse and Cognition: Bridging the Gap.* Stanford, CA: CSLI/Cambridge.

Lakoff, G. & R. Núñez (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being.* New York: Basic Books.

Lakoff, G., & M. Turner (1989). *More than Cool Reason: A Field Guide to Poetic Metaphor.*Chicago: University of Chicago Press.

Maor, E. (1994). *e: The Story of a Number.* Princeton: Princeton University Press. McNeill, D. (1992). *Hand and Mind: What Gestures Reveal about Thought.* Chicago: Chicago University Press.

Núñez, R. (1995). What brain for God's-eye? Biological naturalism, ontological objectivism, and Searle. *Journal of Consciousness Studies,* 2(2): 149-166.

Núñez, R. (1997). Eating soup with chopsticks: Dogmas, difficulties, and alternatives in the study of conscious experience. *Journal of Consciousness Studies,* 4 (2): 143-166.

Núñez, R. (1999). Could the future taste purple? Reclaiming mind, body, and cognition. In R. Nunez & W. J. Freeman (eds.), *Reclaiming Cognition: The Primacy of Action, Intention, and Emotion.* Thorverton, UK: Imprint Academic.

Núñez, R., L. Edwards, & J. F. Matos (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 39 (1-3): 45-65.

Núñez, R., & W. J. Freeman (eds.) (1999). *Reclaiming Cognition: The Primacy of Action, Intention, and Emotion.* Thorverton, UK: Imprint Academic.

Núñez, R., & G. Lakoff (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and ε-δ continuity. *Mathematical Cognition,* 4 (2): 85-101.

Poincaré, H. (1913/1963). *Mathematics and Science: Last Essays* [Dernières pensées]. New York: Dover.

Regier, T. (1996). *The Human Semantic Potential* Cambridge: MIT Press. Sweetser, E. (1990). *From Etymology to Pragmatics: Metaphorical and Cultural Aspects of Semantic Structure.* New York: Cambridge University Press.

Talmy, L. (1999). *Toward a Cognitive Linguistics.* Cambridge: MIT Press.

Taub, S. (1997). *Language in the Body: Iconicity and Metaphor in American Sign Language.* PhD dissertation, Linguistics Department, University of California at Berkeley.

Varela, F., E. Thompson, & E. Rösch (1991). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience.* Cambridge: MIT Press.

Weyl, H. (1918/1994). *The Continuum: A Critical Examination of the Foundation of Analysis.* New York: Dover.

Yu, N. (1998). *The Contemporary Theory of Metaphor: A Perspective from Chinese. Amsterdam:* John Benjamins.