Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 12 - propiedades en ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1. Opera y resuelve $\left\{\begin{matrix} y-x=3 \\ 5^x+5^y=\frac{126}{5} \end{matrix}\right\}$

De la primera ecuación → $y=x+3$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema → $5^x+5^{x+3}=\frac{126}{5} \rightarrow 5^x+125\cdot 5^x=\frac{126}{5}$

Cambio de variable $5^x=t \rightarrow t+125\cdot t=\frac{126}{5} \rightarrow 126\cdot t=\frac{126}{5} \rightarrow t=\frac{1}{5}$

Deshacemos el cambio de variable → $5^x=\frac{1}{5} \rightarrow x=-1$

Y obtenemos la segunda incógnita → $y=x+3 \rightarrow y=2$

2. **a) Resuelve** $4^{x^2-6x}=16384$ **b) Resuelve** $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0$

a) $4^{x^2-6x}=16384 \rightarrow 4^{x^2-6x}=4^7$ → Igualo exponentes → $x^2-6x=7 \rightarrow x^2-6x-7=0$

Soluciones → $x=-1$, $x=7$

b) $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0 \rightarrow 343\cdot 7^{2x}-56\cdot 7^x+1=0$ → cambio de variable $7^x=t$

$$343\cdot t^2-56\cdot t+1=0 \rightarrow t=\frac{56\pm\sqrt{56^2-4\cdot 343}}{2\cdot 343}=\frac{56\pm 42}{2\cdot 343} \rightarrow t=\frac{1}{7} \ , \ t=\frac{1}{49}$$

Deshacemos el cambio de variable.

$$7^x=t \rightarrow 7^x=\frac{1}{7} \rightarrow 7^x=7^{-1} \rightarrow x=-1$$

$$7^x=t \rightarrow 7^x=\frac{1}{49} \rightarrow 7^x=7^{-2} \rightarrow x=-2$$

3. Resuelve

a) $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0$

b) $3^{2x}=\sqrt{4^{x-1}}$

a) $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0 \rightarrow 7^{2x}\cdot 7^3-8\cdot 7^x\cdot 7^1+1=0$

Si $7^x=t \rightarrow 343t^2-56t+1=0$

$$t=\frac{56\pm\sqrt{56^2-1372}}{686}$$

$$t=\frac{1}{7} \rightarrow x=-1$$

$$t=\frac{1}{49} \rightarrow x=-2$$

b) $3^{2x}=\sqrt{4^{x-1}}$

Elevamos al cuadrado ambos miembros → $3^{4x}=4^{x-1}$

Aplicamos logaritmo en base decimal y sacamos exponentes del logaritmo.

$4x\cdot\log(3)=(x-1)\log(4)$

Usamos la calculadora para obtener el valor de los logaritmos.

$1{,}306x=-0{,}602 \rightarrow x=-0{,}461$

Y comprobamos que este valor satisface la ecuación de partida.

4. Sabiendo que $\log(2)=0{,}301$ **y** $\log(3)=0{,}4771$ **, calcula:**

a) $\log\sqrt{\dfrac{48\sqrt{3}}{5^3}}$

b) $\log_3 25$

a) Aplicando propiedades de logaritmo:

$$\frac{1}{2}[\log(48\cdot\sqrt{3})-\log(5^3)]$$

$$\frac{1}{2}[\log(3\cdot 2^4)+\frac{1}{2}(\log 3)-3\log(5)]$$

$$\frac{1}{2}[\log(3)+4\log(2)+\frac{1}{2}(\log 3)-3\log(5)]$$

$$\frac{1}{2}[\frac{3}{2}\log(3)+4\log(2)-3\log(5)]$$

Obteniendo con la calculadora que $\log(5)=0{,}6989$, y con los datos del enunciado, tenemos:

$$\frac{1}{2}[-0{,}1771]=-0{,}08855$$

b) Sabiendo la propiedad de cambio de base → $log_a\, x=\dfrac{log_b x}{log\ _b a}$

Aplicado a nuestro problema, y obteniendo con la calculadora $\log(5)=0{,}6989$, tendremos:

$$log_3\, 25=\frac{log_{10}25}{log\ _{10}3} \rightarrow log_3\, 25=\frac{2\ log_{10}5}{log\ _{10}3} \rightarrow log_3\, 25=\frac{1{,}39794}{0{,}4771} \rightarrow log_3\, 25=2{,}9299$$

5. Resuelve $\begin{Bmatrix} \log x+\log(y+3)=\log 6 \\ \log\dfrac{x+7}{y+2}=1 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} \log x+\log(y+3)=\log 6 \\ \log\dfrac{x+7}{y+2}=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \log[x(y+3)]=\log 6 \\ \log\dfrac{x+7}{y+2}=\log(10) \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x(y+3)=6 \\ \dfrac{x+7}{y+2}=10 \end{Bmatrix}$$

De la primera ecuación → $x=\dfrac{6}{y+3}$ → Sustituimos en la segunda ecuación del sistema.

$$\frac{\dfrac{6}{y+3}+7}{y+2}=10 \rightarrow \frac{6+7y+21}{y+3}=10y+20 \rightarrow 7y+27=(10y+20)(y+3)$$

$$7y+27=10y^2+30y+20y+60 \rightarrow 10y^2+43y+33=0$$

$$y=\frac{-43\pm\sqrt{43^2-4\cdot 10\cdot 33}}{2\cdot 10}=\frac{-43\pm 23}{20} \rightarrow y=\frac{-33}{10} \quad , \quad y=-1$$

La solución $y=\dfrac{-33}{10}$ no es posible, ya que hace negativo el argumento de $\log(y+3)$.

Si $y=-1$, $x=\dfrac{6}{y+3} \rightarrow x=3$