Derivadas.

Tasa de variación media.

La **tasa de variación media** de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, a+h]$ o $[a, b]$ se designa por $TVM(a,h)$ o $TVM(a,b)$ y viene dada por

$$TVM(a,h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=TVM(a,b)$$

El cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se representa también como $\frac{\Delta f(a)}{\Delta a}$. Además, hay que observar este cociente que dependiendo del valor de $\Delta f(a)$, puede ser positiva, negativa o nula.

 # Ejemplo.- Las $TVM_f(2,4)$, $TVM_f(4,6)$ *y* $TVM_f(2,8)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *serán*

$$TVM_f(a,h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=TVM_f(a,b)$$

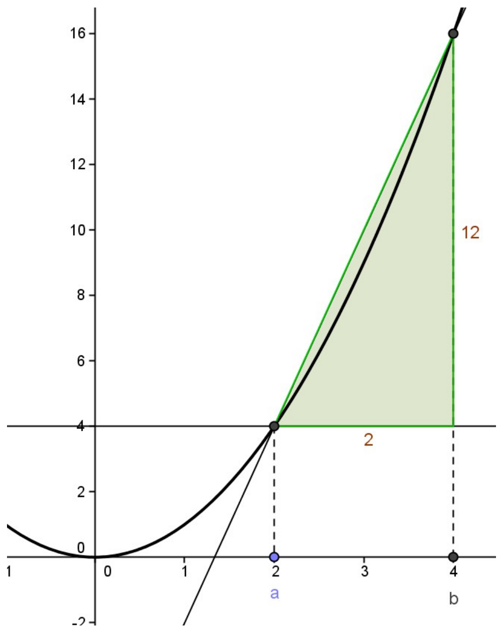
$$TVM_f(4,6)=\frac{f(6)-f(4)}{6-4}=\frac{6^2-4^2}{2}=10$$

$$TVM_f(8,2)=\frac{f(8)-f(2)}{8-2}=\frac{8^2-2^2}{6}=10$$

Interpretación geométrica de la tasa de variación media

La tasa de variación media de $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

 # Ejemplo.- La $TVM(2,4)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *, representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos* $(2,4)$ *y* $(4,16)$.



Tasa de variación instantánea. Derivada de una función en un punto,

La **tasa de variación instantánea** de la función $f(x)$ en el punto a (*se designa por* $TVI_f(a)$) o derivada de f en un punto a (*se designa por f'(a)*), cuando existe es

$$TVI_f(a)=\lim_{h\to 0} TVM(a,h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

 # Ejemplo.- Las $TVI_f(2)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *será*

$$f'(2)=TVI(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^2+2h+h^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0} 2+h=2$$

Si denominamos $\Delta y=f(x)-f(a)$ *y* $\Delta x=x-a$ *, también podemos expresar*

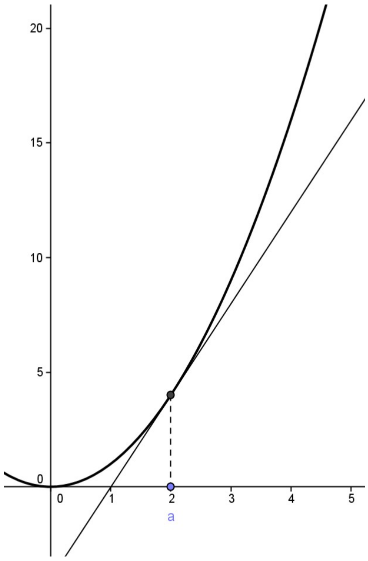
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Una función es derivable es un intervalo (a,b) si lo es para cada uno de sus puntos.

Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto

La tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto a, o f'(a) representa la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto $(a, f(a))$

 # Ejemplo.- La $TVI(2)$ *de la función* $f(x)=x^2$ *, representa la pendiente de la recta tangente a* $f(x)=x^2$ *que pasa por el punto 2.*



Función derivada. Derivada sucesiva.

Si f es una función derivable en todo su dominio, entonces podemos definir la función $f'(x)$ tal que a cada $x\in D_f$, $f'(x)$ es la derivada de f en el punto x ($D_{f'}\subset D_f$) .

 # Ejemplo.- La derivada de la función $f(x)=3x^2+x-1$ *es* $f'(x)=6x+1$.

A partir de una función derivada f' (o derivada), si existe también su derivada, recibe el nombre de derivada segunda y se designa por $f'' o f^{(2)}$. Y así, sucesivamente si existen $f''' o f^{(3)}$, ….

 # Ejemplo.- La segunda derivada de la función $f(x)=3x^2+x-1$ *es* $f''(x)=6$.

Derivadas laterales.

Si $f(x)$ es una función real de variable real y a un punto de su dominio, decimos que:

- f es derivable en a por la izquierda y representamos por $f'(a^-)$ si existe

$$f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- f es derivable en a por la derecha y representamos por $f'(a^+)$ si existe

$$f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Además, una función f(x) es derivable en x = a si y solo si es derivable por la izquierda y por la derecha de a, y las derivadas laterales coinciden.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=|x|$ *tiene derivadas izquierda y derecha distintas en* $x=0$ *, ya que*

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{-h}{h}=-1 \qquad f'(0^-)=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\frac{h}{h}=+1$$

Además, como estos límites son distintos, la función $f(x)=|x|$ *no es derivable en* $x=0$.

Continuidad y derivabilidad.

Si una función tiene derivada finita en un punto a, entonces es continua en a.

Sin embargo el que sea continua en dicho punto a, no implica que sea derivable.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=|x^2|$ *tiene derivada en* $x=0$ *, ya que la izquierda y derecha distintas en* $x=0$ *, ya que*

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{|(0+h)^2|-|0^2|}{h}=0=\lim_{h\to 0^+}\frac{|(0+h)^2|-|0^2|}{h}=f'(0^+)$$

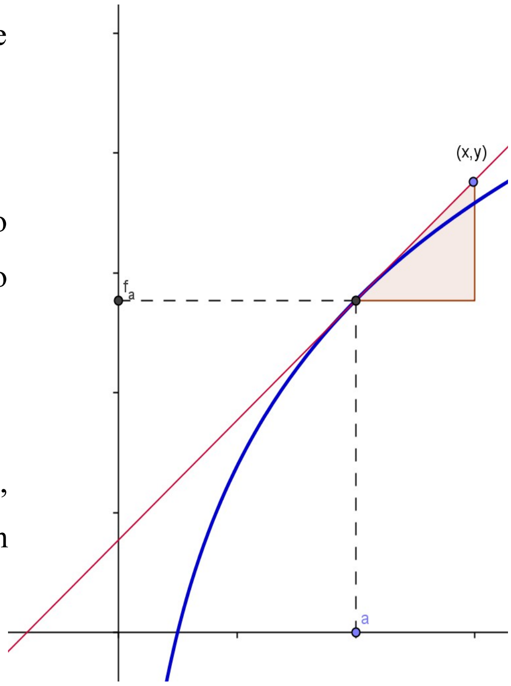
Y por tanto es derivable en $x=0$ *, y como consecuencia, también es continua en* $x=0$.

Sin embargo, la función $f(x)=|x|$ *a pesar de ser continua en* $x=0$ *, ya que* $\lim_{x\to 0^-}|x|=0=\lim_{x\to 0^+}|x|$ *no es derivable en* $x=0$ *, tal y como hemos visto en un ejemplo anterior.*

Tangente a una curva en un punto.

Si $f(x)$ es una función derivable en $x=a$, y r es la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Si m es la pendiente de la recta m, se cumplirá:

$$m=f'(a)$$



Además, teniendo en cuenta que el punto $(a, f(a))$ pertenece a la recta r, si (x,y) es un punto cualquiera de la recta se cumplirá:

$$m=\frac{y-f(a)}{x-a}$$

Luego, igualando las dos ecuaciones anteriores, tenemos que la ecuación de la recta r tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ será

$$f'(a)=\frac{y-f(a)}{x-a}$$

 # Ejemplo.- Hallar la ecuación de la tangente a la curva $f(x)=x^4$ *en* $x=2$.

Como $f'(x)=4x^3$ *, la pendiente de la tangente en el punto* $x=2$ *es* $f'(2)=32$ *, y como para* $x=2$ *es* $f(2)=16$ *, la ecuación de la recta tangente a* f *, en el punto* $P(2,16)$ *es:*

$$y-16=32.(x-2)$$

Derivada de función constante. Derivada de producto de número por función

Si $f(x)=k$ (*constante*), se cumplirá $f'(x)=0$, ya que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$$

Si $f(x)=x$, se cumplirá $f'(x)=1$, ya que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

Si $f(x)=k.x$ (*k constante*), se cumplirá $f'(x)=k$ ya que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k.(x+h)-k.x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k.h}{h}=k$$

Si $f(x)=k.g(x)$ (*k constante y g derivable*), se cumplirá $f'(x)=k.g'(x)$ ya que

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k.g(x+h)-k.g(x)}{h}=k.\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=k.g'(x)$$

 # Ejemplo.- $(7x^3)'=7.(x^3)'=21.x^2$

Operaciones aritméticas con derivadas.

Algunas reglas aritméticas de derivación son

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, se cumple

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Ya que, se cumple

$$(f(x) \pm g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \pm g(x+h) - (f(x) \pm g(x))}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x)$$

 # Ejemplo.- $(3x^2 + 2x - 5)' = (3x^2)' + (2x)' - (-5)' = 6x + 2$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables, se cumple

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

Ya que si tomamos logaritmos neperianos, se cumple

$$\ln(f(x).g(x)) = \ln(f(x)) + \ln(g(x))$$

Y derivando esta igualdad, se cumple

$$\frac{(f(x).g(x))'}{(f(x).g(x))} = \frac{f(x)'}{f(x)} + \frac{g(x)'}{g(x)}$$

Que operando

$$\frac{(f(x).g(x))'}{(f(x).g(x))} = \frac{f(x)'.g'(x) + f(x).g(x)'}{(f(x).g(x))} \Rightarrow (f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones derivables y $g(x) \neq 0$, se cumple

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

Ya que si tomamos logaritmos neperianos, se cumple

$$\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \ln(f(x)) - \ln(g(x))$$

Y derivando esta igualdad, se cumple

$$\frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{f(x)'}{f(x)} - \frac{g(x)'}{g(x)}$$ Que operando

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)}{g(x)} . \frac{f(x)'.g'(x) - f(x).g(x)'}{(f(x).g(x))} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g(x)^2}$$

 # Ejemplo.- $\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)'=\dfrac{2.x.(x^2+1)-x^2.2.x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2.x}{(x^2+1)^2}$

Derivadas de funciones compuestas (regla de la cadena).

- **Si** $f(g(x))$ **es una función compuesta, donde** $Ima(g(x))\subset Dom(f(x))$ **, entonces**

  $(f(g(x)))'=f'(g(x)).g'(x)$

  Ya que

$$(f(g(x)))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}.\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}.\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(g(x)).g'(x)$$

 # Ejemplo.- $(sen(\ln x))'=sen'(\ln x),(\ln x)'=\cos(\ln x).\dfrac{1}{x}$

Derivadas de función inversa.

- Si $f(x)$ tiene función inversa $f^{-1}(x)$, entonces

  $(f^{-1}(x))'=\dfrac{1}{f'(y)}$ con $f^{-1}(x)=y$

  Teniendo en cuenta que se cumple

  $f(f^{-1}(x))=x$

  Utilizando la derivada de la función compuesta, se cumplirá

  $\left(f'(f^{-1}(x))\right)'=(x)' \quad \Rightarrow \quad \left(f'(f^{-1}(x))\right).\left(f^{-1}(x)\right)'=1$

  Luego:

  $\left(f^{-1}(x)\right)'=\dfrac{1}{\left(f'(f^{-1}(x))\right)}=\dfrac{1}{\left(f'(y)\right)}$

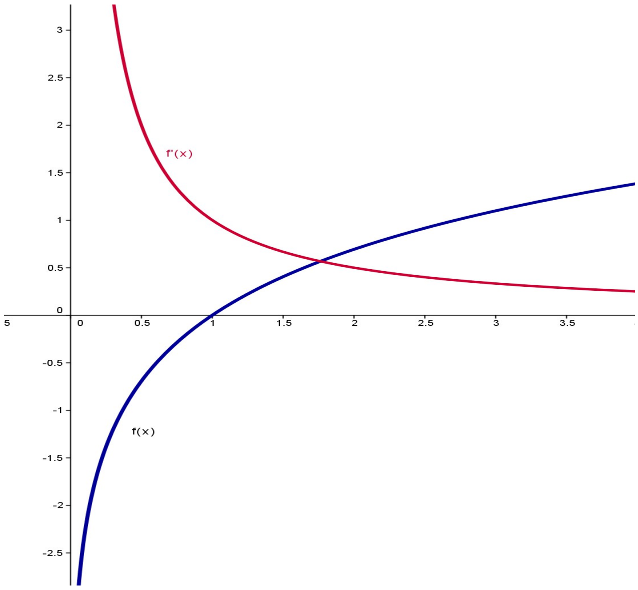
Derivadas de algunas funciones.

Función logaritmo

- La **derivada** de la función $f(x)=\ln x$ en $(0,+\infty)$ es $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, ya que

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{h}{x}}\right)=$$
$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{h}{x}}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln e=\frac{1}{x}$$

y cuyas gráficas son



Teniendo en cuenta que $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, se cumplirá

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln e}{\ln a} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a e \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

Función exponencial

- La **derivada** de la función $f(x) = e^x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x) = e^x$, ya que

$$(\ln e^x)' = \frac{e^x}{(e^x)'} \qquad \Rightarrow \qquad (e^x)' = e^x$$
$$(\ln e^x)' = (x . \ln e)' = x' = 1$$

- Teniendo en cuenta que $a^x = e^{x . \ln a}$, se cumplirá

$$(a^x)' = (e^{x . \ln a})' = (e^{x . ln a})' . (x . ln a)' = (\ln a) . a^x$$

Función potencial

- La **derivada** de la función $f(x) = x^a$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x) = a . x^{a-1}$, ya que

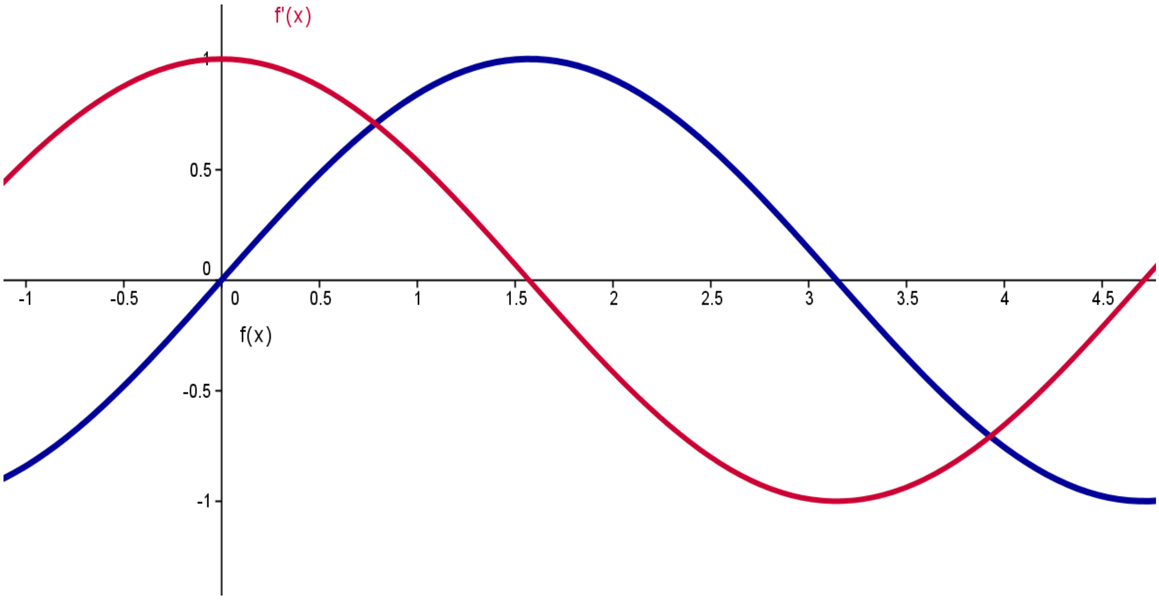
$$(x^a)' = (e^{a . \ln x})' = (e^{a . ln x})' . (a . ln x)' = x^a . \frac{a}{x} = a . x^{a-1}$$

Función seno

- La **derivada** de la función $f(x) = sen\, x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x) = \cos x$, ya que

$$(sen\, x)' = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{senx . \cos h + \cos x . sen\, h - sen\, x}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{senx . (\cos h - 1) + \cos x . sen\, h}{h} = \lim_{h \to 0} \left[sen\, x . \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x . \frac{sen\, h}{h} \right] =$$
$$= \cos x$$

Y cuyas gráficas son



Función coseno

- La **derivada** de la función $f(x)=\cos x$ en $\mathbb{R}$ es $f'(x)=-sen\, x$, ya que

$$(\cos x)'=\left(sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-sen\, x$$

Función tangente

- La **derivada** de la función $f(x)=tg\, x$ en $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ es , $f'(x)=1+tg^2 x$ ya que

$$\left(\frac{sen\, x}{\cos x}\right)'=\left(\frac{\cos x\,.\cos x+sen\, x\, sen\, x}{\cos^2 x}\right)=\frac{1}{\cos^2 x}=sec^2 x=1+tg^2 x$$

Monotonía: crecimiento y decrecimiento en un intervalo.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **creciente** si para todo y $x\in[a,b]$ todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $f(x)<f(x+h)$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **constante** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $f(x)=f(x+h)$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **decreciente** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es $f(x)>f(x+h)$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **monótona** si $f(x)$ es creciente en $[a,b]$ o $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$.

Tasa de variación y monotonía

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **creciente** si para todo y $x\in[a,b]$ todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es
$$TVM_{(x,h)}f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0 \quad .$$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **constante** si para todo y todo $x\in[a,b]$ $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es
$$TVM_{(x,h)}f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **decreciente** si para todo y todo $x\in[a,b]$ $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es
$$TVM_{(x,h)}f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<0$$

Derivada y monotonía.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **creciente** si para todo es $x\in[a,b]$ $f'(x)>0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **constante** si para todo es $x\in[a,b]$ $f'(x)=0$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **decreciente** si para todo es $x\in[a,b]$ $f'(x)<0$

 # Ejemplo.- Como la función

$$f(x)=x^4-2x^2$$

tiene por derivada

$$f'(x)=4.x.(x-1).(x+1)$$

Se cumplirá

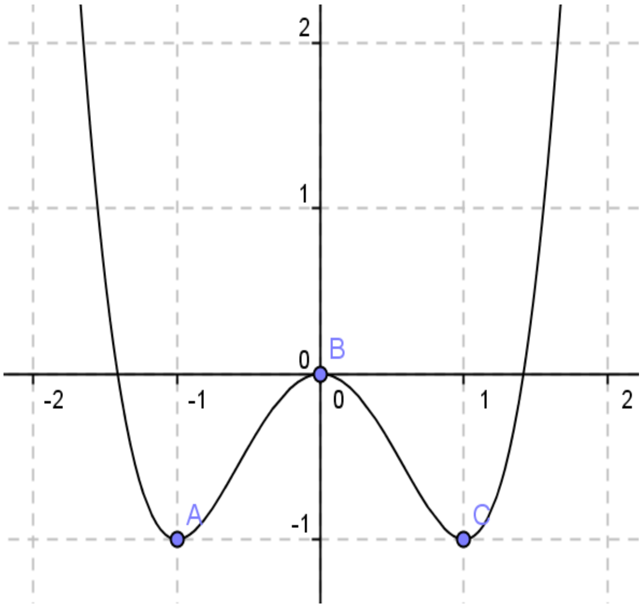
$$f'(x)<0\, si\ x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$$

$$f'(x)>0\, si\ x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$$

Luego, se cumplirá

$f(x)$ es decreciente $si\, x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$

$f'(x)$ es creciente $si\, x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$



Curvatura: concavidad y convexidad.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **lineal** si para todo $x\in[a,b]$ y todo $h>0$ tal que e $x+h\in[a,b]$ s

$$TVM_{(x,h)}f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}= \quad \textbf{constante}.$$

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **convexa** si para todo y $x\in[a,b]$ todo $h>0$ tal que $x+h\in[a,b]$ es

$$TVM_{(x,h)}f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0 \quad \textbf{creciente}.$$

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **cóncava** si para todo y $x\in[a,b]$ todo $h>0$ tal que e $x+h\in[a,b]$ s

$$TVM_{(x,h)}f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<0 \quad \text{es } \textbf{decreciente.}$$

 # Ejemplo.- Como la tasa de variación media en el intervalo $[x, x+h]$ *de la función* $f(x)=x^3$ *es*

$$TVM_{(x,h)} f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3.x^2+3.x.h+h^2$$

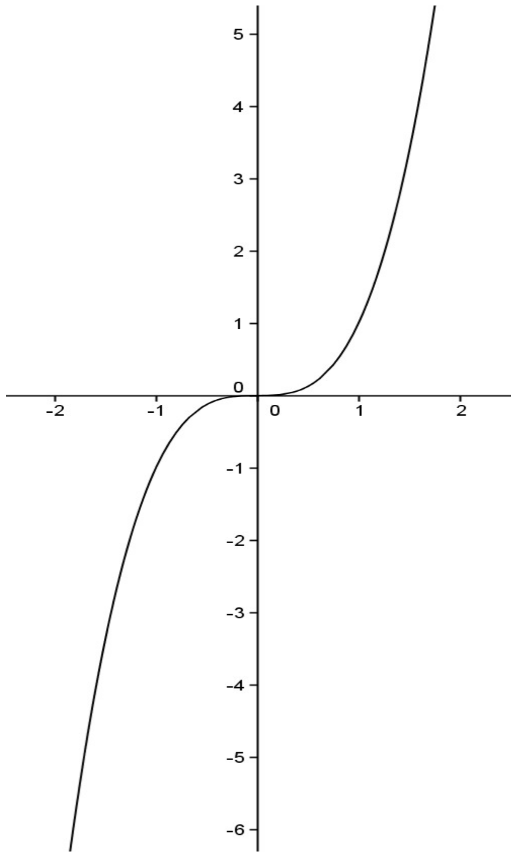
Se cumplirá

$TVM_{(x,h)} f(x)$ es decreciente $para\ x<0$

$TVM_{(x,h)} f(x)$ es creciente $para\ x>0$

La función $f(x)=x^3$ *, será*

Cóncava en $(-\infty, 0)$ *y convexa en* $(0, +\infty)$



Derivada y curvatura

Primera derivadas y curvatura

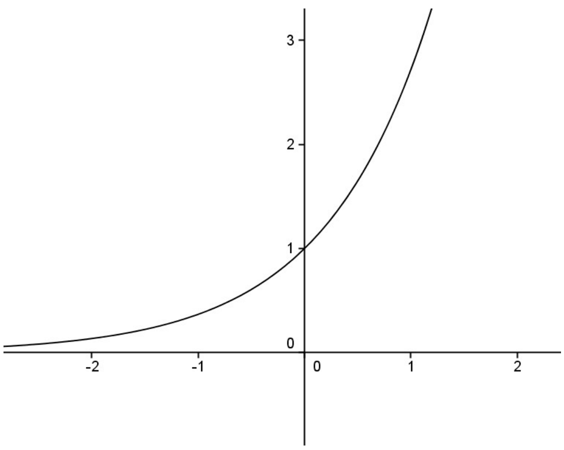
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **lineal** si para todo $x\in[a,b]$ $f'(x)$ es **constante**.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **convexa** si para todo $x\in[a,b]$ $f'(x)$ es **creciente**.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **cóncava** si para todo $x\in[a,b]$ $f'(x)$ es **decreciente.**

Segunda derivada y curvatura

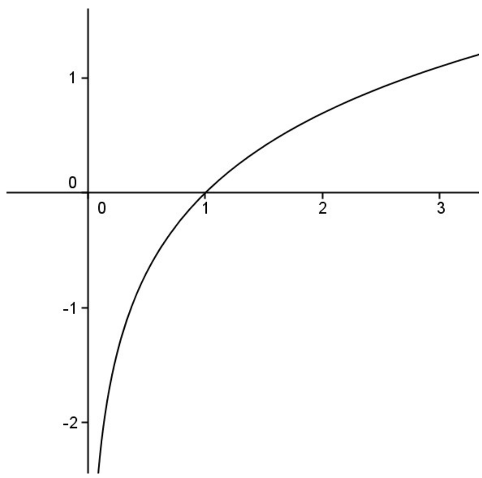
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **lineal** si para todo $x\in[a,b]$ $f''(x)=0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **convexa** si para todo $x\in[a,b]$ $f''(x)>0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **cóncava** si para todo $x\in[a,b]$ $f''(x)<0$ **.**

 # Ejemplo.- La función $f(x)=e^x$ *es convexa en todo* $\mathbb{R}$ *, ya que* $f'(x)=e^x$ *que es una función creciente en* $\mathbb{R}$ *o bien utilizando la segunda derivada* $f''(x)=e^x>0$ *para cualquier* $x\in\mathbb{R}$ *. Mientras que la función* $f(x)=\ln x$ *es cóncava en todo* $\mathbb{R}^+$ *, ya que* $f'(x)=\frac{1}{x}$ *que es una función decreciente en* $\mathbb{R}^+$ *o bien utilizando la segunda derivada* $f''(x)-\frac{1}{x^2}<0$ *para cualquier* $x\in\mathbb{R}^+$

$f(x)=e^x$



$f(x)=\ln(x)$



Puntos de Inflexión

Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ tiene un punto de inflexión en $(c,f(c))$ con $c\in[a,b]$ si la función $f(x)$ cambia de curvatura en dicho punto.

Además, si una función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(c,f(c))$ su segunda deriva se anula, es decir

$$(c,f(c)) \text{ es punto de inflexión } \Rightarrow \quad f''(c)=0$$

El recíproco no es cierto, es decir puedes ser $f''(c)$ = 0 y no ser $(c,f(c))$ un punto de inflexión

 # Ejemplo.- Para hallar los puntos de inflexión de la función

$$f(x)=x^4-6x^2 \quad ,$$

hallamos la segunda derivada

$$f''(x)=12.(x^2-1) \quad ,$$

que se hace cero para $x=-1$ *y* $x=1$.

Y como

$$f''(x)>0 \; para \; x<-1 \Rightarrow f(x) \; es \; convexa \; en \; (-\infty,-1)$$

$$f''(x)<0 \; para \; -1<x<1 \Rightarrow f(x) \; es \; cóncava \; en \; (-1,1)$$

$$f''(x)>0 \; para \; x>1 \Rightarrow f(x) \; es \; convexa \; en \; (1,+\infty)$$

Los puntos

$$(-1, f(-1)) \quad y \quad (1, f(1))$$

son puntos de inflexión de f

Puntos extremos: máximos y mínimos.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ y $c \in (a,b)$, decimos que el punto $P(c, f(c))$ es un **máximo** de $f(x)$, si para todo $x \in [a,b]$ con $x \neq c$, existe un entorno de c, $E(c,h)$ tal que $f(x)<f(c)$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ y $c \in (a,b)$, decimos que el punto $P(c, f(c))$ un **mínimo** de $f(x)$, si para todo $x \in [a,b]$ con $x \neq c$, existe un entorno de c, $E(c,h)$ tal que $f(x)>f(c)$.

Además, si una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ tiene puntos extremos (*máximos o mínimos*), entonces su derivada se anula en ellos. Es decir

Si $P(c, f(c))$ es punto extremo de $f(x)$ $\Rightarrow$ $f'(c)=0$.

- *El teorema reciproco no es cierto, ya que por ejemplo* $f(x)=x^3$ *, cumple* $f'(0)=3.0^2=0$ *. Sin embargo, el el punto* $P(0, f(0))=P(0,0)$ *. La función es creciente, y por tanto no tiene ningún máximo, ni ningún mínimo. Este punto es un punto de inflexión, la función pasa en este punto de cóncava a convexa.*

Para estudiar los máximos o los mínimos podemos utilizar la primera derivada que nos aporta información del crecimiento o decrecimiento de la función o la segunda derivada que nos aporta información de la concavidad o convexidad.

Es decir si $f(x)$ es una función definida y continua en un intervalo $[a,b]$ y $c \in (a,b)$

Si $f'(c)=0$ y $E(c,h)$ es un entorno de c

- Si $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c)$ y $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c,c+h)$, $(c,f(c))$ es un **máximo** de la función $f(x)$.
- Si $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c)$ y $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c,c+h)$, $(c,f(c))$ es un **mínimo** de la función $f(x)$ **.**
- Si $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ o $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$, $(c,f(c))$ es un punto de **inflexión** de la función $f(x)$.
- Si $f''(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ la función $f(x)$ es convexa en un entono de $P(c,f(c))$, luego $(c,f(c))$ es un punto de **mínimo** de la función $f(x)$.
- Si $f''(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ la función $f(x)$ es cóncava en un entono de $P(c,f(c))$, luego $(c,f(c))$ es un punto de **máximo** de la función $f(x)$.

 # Ejemplo.- ¿De qué tipo son los posibles puntos extremos de $f(x)=x^4-2x^2$ *?*

Como la derivada primera es

$$f'(x)=4x^3-4x$$

Los posibles puntos críticos son

$$x=0, x=-1, x=1$$

Como la derivada segunda es

$$f''(x)=12x^2-4$$

Para $x=-1, f''(x)=8 \Rightarrow$ es convexa en $x=-1 \Rightarrow P(-1,-1)$ es un punto mínimo .

Para $x=0, f''(x)=-4 \Rightarrow$ es cóncava en $x=0 \Rightarrow P(0,)$ es un punto máximo .

Para $x=1, f''(x)=8 \Rightarrow$ es convexa en $x=1 \Rightarrow P(1,-1)$ es un punto mínimo .